Тема: «Математическое ожидание случайной величины»

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

Возникновение теории вероятностей как науки относят к средним векам, к романтическому времени королей и мушкетеров, прекрасных дам и благородных рыцарей. Первоначальным толчком к развитию теории вероятностей послужили задачи, относящиеся к азартным играм, таким, как орлянка, кости, карты, рулетка, когда в них начали применять количественные подсчеты и прогнозирование шансов на успех

Кавалер Шарль

Зарождение теории вероятностей началось с того, что придворный французского короля, шевалье (кавалер) де Мере (1607-1648), сам азартный игрок, обратился к французскому физику, математику и философу

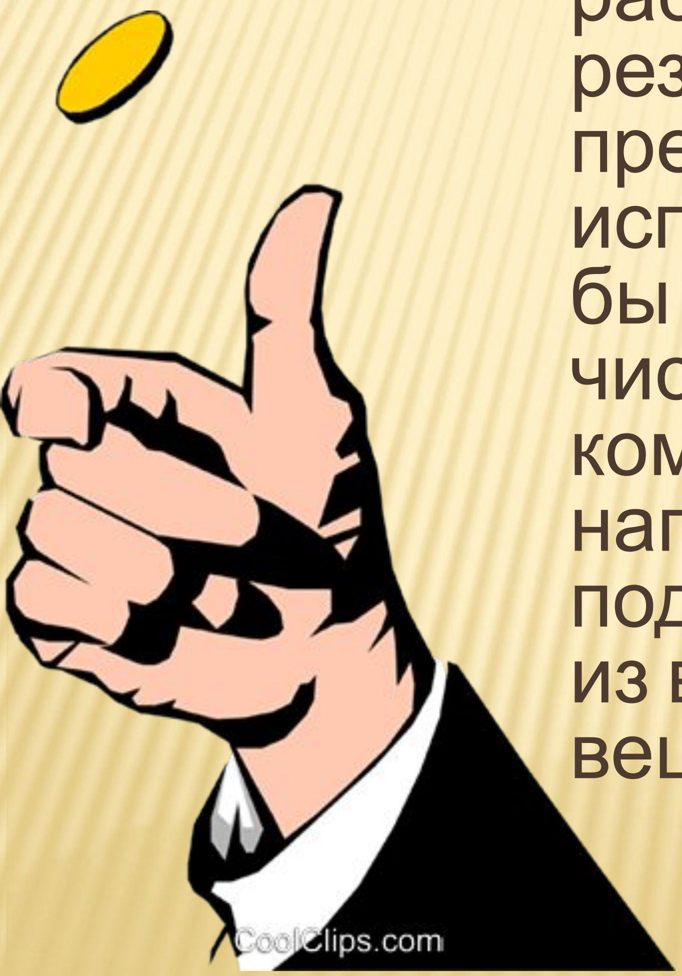
До нас дошли два опроса де Мере к Паскалю:

1) сколько раз надо бросить две игральные кости, чтобы случаев выпадения сразу двух шестерок было больше половины от общего числа бросаний;

2) как справедливо разделить поставленные на кон деньги, если игроки прекратили игру преждевременно? В 1654 г. Паскаль обратился к математику Пьеру Ферма (1601-1665) и переписывался с ним по поводу этих задач. Они вдвоем установили некоторые исходные положения ТВ, в частности пришли к понятию математического ожидания и теоремам сложения и умножения вероятностей. Далее голландский ученый Х.Гюйгенс (1629-1695) в книге «О расчетах при азартных играх» (1657 г.) попытался дать собственное решение вопросов, затронутых в этой переписке. знаменитых в этой переписке.

Пьер Ферма (1601-1665)

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ



В теории вероятностей рассматриваются **испытания**, результаты которых нельзя предсказать заранее, а сами испытания можно повторять, хотя бы теоретически, произвольное число раз при неизменном комплексе условий. Испытаниями, например, являются: подбрасывание монеты, выстрел из винтовки, проведение денежно-вещевой лотереи.

Случайным событием (возможным событием или просто событием) называется любой факт, который в результате испытания может произойти или не произойти. Для приведенных выше испытаний приведем примеры случайных событий: появление герба (реверса), попадание (промах) в цель, выигрыш автомобиля по билету лотереи. Случайное событие – это не какое-нибудь происшествие, а лишь возможный **исход**, результат испытания (опыта, эксперимента). События обозначаются прописными (заглавными) буквами латинского алфавита: A,B,C.

Если при каждом испытании, при котором происходит событие А, происходит и событие В, то говорят, что А влечет за собой событие В (входит в В) или В включает событие А и обозначают $A \subset B$. Если одновременно $A \subset B$ и $B \subset A$, то в этом случае события А и В называются равносильными. События А и В называются **несовместными**, если наступление одного из них исключает появление другого в одном и том же испытании. События А и В называются **совместными** если они могут произойти вместе в одном и том же испытании.

ПРИМЕР 1

Испытание состоит в однократном подбрасывании игральной кости с шестью гранями. Событие А – появление трех очков, событие В – появление четного числа очков, С – появление нечетного числа очков. События А и С совместны, поскольку число 3 – нечетное, а значит, если выпало 3 очка, то произошло и событие А и событие С. Кроме того, событие А влечет за собой событие С.

События А и В несовместны, т.к. если произошло и событие А, то не произойдет событие В, а если произошло событие В, то не произойдет событие А. События В и С также являются несовместными. События называются **попарно несовместными** (или **взаимоисключающими**), если любые два из них несовместны.

ПРИМЕР 3.

«Выигрыш» и «проигрыш» по одному билету денежно-вещевой лотереи – события противоположные. Событие называется **достоверным**, если в результате испытания оно обязательно должно произойти. Событие называется **невозможным**, если в данном испытании оно заведомо не может произойти. Обозначим достоверное событие Ω , а невозможное $\varnothing$.

СВОЙСТВА ВЕРОЯТНОСТИ

1. Вероятность достоверного события Ω равна единице.

Доказательство. Так как достоверное событие всегда происходит в результате опыта, то все исходы этого опыта являются для него благоприятными, то есть т = п, следовательно исходя из (1.1), Р(Ω) = 1.

2. Вероятность невозможного события ∅ равна нулю.

Доказательство. Для невозможного события ни один исход опыта не является благоприятным, поэтому т = 0 и на основании формулы (1.1) имеем Р(∅) = 0.

3. Вероятность любого события удовлетворяет двойному неравенству 0 ≤ Р(А) ≤1.

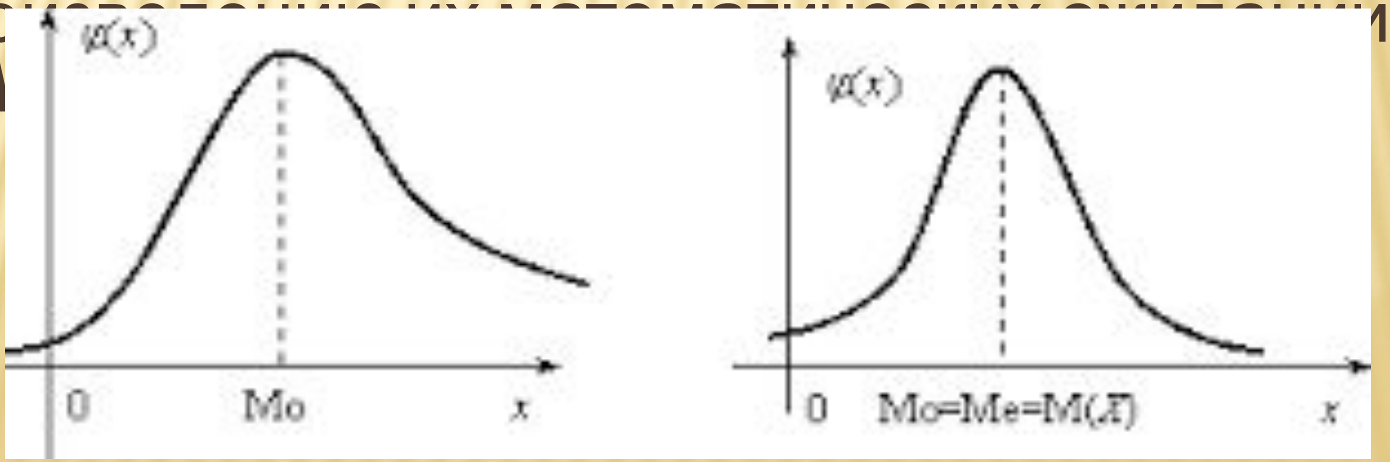
Доказательство. Случайное событие происходит при некоторых благоприятствующих исходах опыта , удовлетворяющих неравенству (0–для невозможного события и –для достоверного), и из (1.1) следует, что m 0 ≤ m ≤ n n 0 ≤ Р(А) ≤1.

События, вероятности которых очень малы (близки к нулю) или очень велики (близки к единице), называются **практически невозможными или практически достоверными** событиями.

- *Математическое ожидание* - число, вокруг которого сосредоточены значения случайной величины. Математическое ожидание случайной величины x обозначается ***M***x .
- *Математическое ожидание дискретной случайной величины* x , имеющей распределение

x_1	x_2	…	x_n
p_1	p_2	…	p_n

- Основные свойства математического ожидания:
- математическое ожидание константы равно этой константе, **M***c*=*c* ;
- математическое ожидание - линейный функционал на пространстве случайных величин, т.е. для любых двух случайных величин x , h и произвольных постоянных *a* и *b*справедливо: **M**(*ax* + *bh*) = *a* **M**(x)+ *b* **M**(h);
- математическое ожидание произведения двух *независимых* случайных величин равно про и, т. е. **M**



МОМЕНТЫ

В теории вероятностей и математической статистике, помимо математического ожидания и дисперсии, используются и другие числовые характеристики случайных величин. В первую очередь это *начальные* и *центральные* моменты.

- *Начальным моментом k-го порядка* случайной величины x называется математическое ожидание *k*-й степени случайной величины x , т. е. $a_k = \mathbf{M}x^k$.
- *Центральным моментом k-го порядка* случайной величины x называется величина m_k, определяемая формулой $m_k = \mathbf{M}(x - \mathbf{M}x)^k$.
- Заметим, что математическое ожидание случайной величины - начальный момент первого порядка, $a_1 = \mathbf{M}x$, а дисперсия - центральный момент второго порядка,
- $a_2 = \mathbf{M}x^2 = \mathbf{M}(x - \mathbf{M}x)^2 = \mathbf{D}x$.
- Существуют формулы, позволяющие выразить центральные моменты случайной величины через ее начальные моменты, например:
- $m_2 = a_2 - a_1^2$, $m_3 = a_3 - 3a_{2a1} + 2a_1^3$.
- Если плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины симметрична относительно прямой $x = \mathbf{M}x$, то все ее центральные моменты нечетного порядка равны нулю.

АСИММЕТРИЯ

В теории вероятностей и в математической статистике в качестве меры асимметрии распределения является коэффициент асимметрии, который определяется формулой , $\beta(\xi) = \frac{\mu_3}{\sigma_\xi^3}$

- где m_3 - центральный момент третьего порядка, - среднеквадратичное отклонение.

ЭКСЦЕСС

Нормальное распределение наиболее часто используется в теории вероятностей и в математической статистике, поэтому график плотности вероятностей нормального распределения стал своего рода эталоном, с которым сравнивают другие распределения. Одним из параметров, определяющих отличие распределения случайной величины x , от нормального распределения, является эксцесс.

- *Эксцесс* g случайной величины x определяется равенством . $\gamma = \frac{\mu_4}{(D\xi)^2} - 3$
- У нормального распределения, естественно, g = 0. Если g (x) > 0, то это означает, что график плотности вероятностей p_x (*x*) сильнее “заострен”, чем у нормального распределения, если же g (x) < 0, то “заостренность” графика p_x (*x*) меньше, чем у нормального распределения.

- *Средним геометрическим* случайной величины, принимающей положительные значения, называется величина $G_\xi = e^{M(\ln \xi)}$
- Название “среднее геометрическое” происходит от выражения среднего геометрического дискретной случайной величины, имеющей равномерное распределение

x	a_1	a_2	a_3	…	a_n
p	1/n	1/n	1/n	…	1/n

Среднее геометрическое, вычисляется следующим образом:

$$G_\xi = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\ln a_i}{n}\right) = a_1^{\frac{1}{n}} \cdot a_2^{\frac{1}{n}} \cdot \ldots \cdot a_n^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$$

- т.е. получилось традиционное определение среднего геометрического чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$.
- Например, среднее геометрическое случайной величины, имеющей показательное распределение с параметром λ, вычисляется следующим образом:

$$M(\ln \xi) = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} \ln x \, dx = -(C + \ln \lambda)$$

ДИСПЕРСИЯ

- Дисперсией конечной случайной величины х называется число по определению математического ожидания, дисперсия вычисляется по следующей формуле Дисперсию иногда обозначают как s 2 (x) или называется среднеквадратичным отклонением или стандартным отклонением случайной величины

СВОЙСТВА ДИСПЕРСИИ

- 1.Дисперсия любой случайной величины неотрицательна D x>0 При этом D x=0 тогда и только тогда, когда случайная величина постоянна.
- 2. Константа выносится из-под знака дисперсии с квадратом
- 3. Сдвиг на константу не меняет дисперсии:
- 4. Дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме их дисперсий: (x и h независимы)