НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА И Л. Н.О

Функциональный анализ

ОПРЕДЕЛЕНИЯ

- **Нормированное пространство, X – это упорядоченная пара $<X, \| . \| >$, где $\| . \|$ - норма в л.п. X**

Норма, $\| . \|$ - это ф**ункция** $\| . \|: X \to [0, +\infty) \mid \forall$ $x, y \in X$, $\lambda \in \mathbf{R}$ ($\mathbf{C}$)

1° $\| x \| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

2° $\| \lambda x \| = |\lambda| \, \| x \|$

3° $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$

ПРИМЕРЫ НОРМ

1. X=B[a, b] (X=C[a, b])

$$\forall x \in X : \|x\| = \sup_{t\in[a,b]} |\, x(t)\,|$$

2. X=L_1[a, b]

$$\forall x \in X : \|x\|_1 = \int_a^b \,|\, x(t)\,|\, dt$$

3. X=L_2[a, b]

$$\forall x \in X : \|x\|_2 = \sqrt{\int_a^b |\, x(t)\,|^2 \; dt}$$

$$X = L_p[a,b],\; p \geq 1$$

$$\|x\|_p = \left(\int_a^b |\, x(t)\,|^p \; dt \right)^{1/p}$$

4. X=l_1

$$\forall x \in X :\; \|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} |\, x_k\,|$$

ПРИМЕРЫ НОРМ

5. X=l_2.

$$\forall x \in X: \ \|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} | x_k |^2}$$

6. X=R^n; C^n.

$$\forall x \in X: \ \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} | x_k |^2}$$

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} | x_k | \qquad \| x \|_{\sup} = \sup_{k=1,n} | x_k |$$

7. X- л.п. ограниченных последовательностей $\forall x \in X: \ \|x\| = \sup_{k=1,\infty} | x_k |$

ПРИМЕРЫ НА ВЫЧИСЛЕНИЕ НОРМЫ

1) $X = C[0,1]$

$x_0(t) = 2t^2 + t - 6$

$\|x_0\| = ?$ $Решение: \|x_0\| = \sup\limits_{t\in[0,1]} |2t^2 + t - 6| = 6$

2) $X = C^3[0,1]$

$x_0(t) = 2t^2 + t - 6$

$\|x_0\| = ?$

$Решение: \|x_0\| = \sup\limits_{[0,1]} |x_0(t)| + \sup\limits_{[0,1]} |x_0'(t)| + \sup\limits_{[0,1]} |x_0''(t)| + \sup\limits_{[0,1]} |x_0^{(3)}(t)| =$

$= 6 + 5 + 4 + 0 = 15$

3) $X = L_2[0,\pi],\ x_0(t) = t\cdot\cos t$

$$\|x_0\| = \sqrt{\int_0^\pi |t\cos t|^2\,dt} = \sqrt{\frac{1}{2}\int_0^\pi t^2dt + \frac{1}{2}\int_0^\pi t^2\cos 2t\,dt} = \sqrt{\frac{\pi^3}{6} - \frac{1}{2}\int_0^\pi t\sin 2t dt} =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi^3}{6} + \frac{\pi}{4}}$$

$$4)\ X = l_1;\ \ x_0 = \left\{ \frac{(2i)^{n-1}}{3^{n+1}} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

$$\|x_0\| = \sum_{n=1}^{\infty} |\, x_k \,| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^{n+1}} = \frac{2^{-1}}{3^1} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n = \frac{1}{3}$$

$$5)\ X = l_\infty - \textit{мн. огранич. послед} - \textit{тей};\ x_0 = \{(-i)^n\}_{n=1}^{\infty}$$

$$\|x_0\| = \sup_{n=1,\infty} |\, x_n \,| = \sup_{n=1,\infty} 1^n = 1$$

МЕТРИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА Н.П.

Метрика в н.п.X – неотрицательная функция

$\mathbf{d}(x,y) = \| x - y \| : \mathbf{X}\times\mathbf{X} \to [0, +\infty)$ $\forall$ $x,y,z \in X$

1° $\mathbf{d}(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

2° $\mathbf{d}(x,y) = \mathbf{d}(y,x)$

3° $\mathbf{d}(x,y) \le \mathbf{d}(x,z) + \mathbf{d}(z,y)$

Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X,\ x_0 \in X$

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется ***сходящейся*** к x_0: $x_n \to x_0$, если

$\mathbf{d}(x_n , x) \to 0$, $n \to \infty$

$$\Leftrightarrow \|x_n - x_0\| \to 0,\ n \to \infty$$

ПРИМЕРЫ СХОДЯЩИХСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Сходится ли $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ к $x_0(t)\equiv 0$ в н.п. X ?

1. X=C[0,1], $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{t^n\}_{n=1}^{\infty}$ $\|t^n - 0\| = \sup\limits_{[0,1]} |t^n| = 1 \not\to 0,\ n \to \infty$

не сходится

2. X=C[0; 0,7], $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{t^n\}_{n=1}^{\infty}$

сходится

3. X=l_1; $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$: $x_n = (\underbrace{\frac{1}{n^2}; \frac{1}{n^2}; \ldots; \frac{1}{n^2}}_{n}; 0; \ldots 0; \ldots)$

сходится

4. X=$L_2[0,+\infty)$; $x_n(t) = e^{-nt}$

$$\|e^{-nt} - 0\|_2 = \sqrt{\int_0^{+\infty} |e^{-nt} - 0|^2\, dt} = \sqrt{\int_0^{+\infty} e^{-2nt} dt} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2n}} = \frac{1}{\sqrt{2n}} \to 0,\ n \to \infty$$

сходится

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

- **ОПРЕДЕЛЕНИЕ** Последовательность $\{x_n\}$ называется ***фундаментальной***, если при
  $\forall\ n,m \to \infty \Rightarrow \mathbf{d}(x_n, x_m) \to 0$
- ***Полным*** пространством называется м.**п.**, в котором $\forall$ фундаментальная последовательность сходится (к некоторому $x_0 \in X$)
- Полное нормированное пространство называется ***банаховым***

ПРИМЕРЫ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Пример 1. Пространство $C([a;b])$ непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций с метрикой $\rho(f,g) = \sup\limits_{x\in[a;b]} |f(x) - g(x)|$ является полным.

<u>Доказательство</u> Если последовательность функций $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, фундаментальна относительно метрики , то при любом фиксированном $x \in [a;b]$ числовая последовательность $\{f_n(x)\}$ является фундаментальной, и поэтому имеет предел (в силу полноты пространства $\mathbb{R}$). Обозначим этот предел $f(x)$. Очевидно $f_n(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$ по метрике . Действительно, так как

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon : \quad \forall n,m \geqslant N_\varepsilon \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

для любого $x \in [a;b]$. Зафиксируем x и перейдём к пределу при $m \to \infty$, в пределе для любого $n \geqslant N_\varepsilon$ получим неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon \quad \forall x \in [a;b].$$

Следовательно, последовательность непрерывных на $[a;b]$ функций $f_n(x)$ равномерно сходится к функции $f(x)$. Ранее было доказано, что тогда функция $f(x)$ тоже непрерывна на $[a;b]$. Полнота пространства $C([a;b])$ доказана.

ПРИМЕР 2.

Пример 2. Пространство ограниченных на отрезке $[a;b]$ функций с sup-нормой является банаховым

Пример 3. Множество всех сходящихся последовательностей действительных чисел является полным нормированным пространством с sup - нормой

Пример 4. В множестве функций, определённых и непрерывных на отрезке $[-1;1]$, введём норму по формуле:

$$\|f(x)\| = \int_{-1}^{1} |f(x)|\,dx,\ x \in C[-1;1]$$

Покажем, что такое н.п. не является полным:

рассмотрим последовательность:

$$f_n(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } x \in \left[-1; -\frac{1}{n}\right], \\ nx, & \text{если } x \in \left[-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right], \\ +1, & \text{если } x \in \left[\frac{1}{n}; 1\right]. \end{cases}$$

Очевидно, для любых n и p

$$\int_{-1}^{1} |f_{n+p}(x) - f_n(x)|\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-1}^{1} |f_{n+p}(x) - \operatorname{sgn} x|\, dx + \int_{-1}^{1} |\operatorname{sgn} x - f_n(x)|\, dx =$$

$$= \frac{1}{n+p} + \frac{1}{n},$$

и поэтому последовательность непрерывных функций фундаментальна относительно своей нормы

Покажем, что она сходится к разрывной функции $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $x \in [-1; 1]$. И во множестве непрерывных функций предела нет.

Предположим противное: пусть последовательность сходится к непрерывной функции $g(x)$, $x \in [-1; 1]$.
Тогда

$$\int_{-1}^{1} |f(x) - g(x)|\, dx = 0,$$

причём функция $F(x) = f(x) - g(x)$ непрерывна во всех точках отрезка $[-1; 1]$, кроме точки $x = 0$. Следовательно, $g(x) = f(x)$ для любого $x \neq 0$ из отрезка $[-1; 1]$, что противоречит предположению, что $g(x)$ непрерывна на $[-1; 1]$.

ОСНОВНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

1) Согласованность линейной и метрической структуры в н.п.

1.1.Алгебраические операции в н.п. непрерывны:

если $(x_n \to x,\ y_n \to y,\ \lambda_n \to \lambda) \Rightarrow$

а) $x_n + y_n \to x + y$

б) $\lambda_n x_n \to \lambda x$.

1.2. Норма непрерывна: $x_n \to x \Rightarrow \|x_n\| \to \|x\|$.

1.3. Шар $B_{x0,R} = x_0 + R*B_{\theta,1}$.

$$B_{x_0,R} = \{x \in X : \|x - x_0\| < R\} - \textit{открытый шар}$$

$$\overline{B}_{x_0,R} = \{x \in X : \|x - x_0\| \le R\} - \textit{замкнутый шар}$$

НЕРАВЕНСТВА ГЁЛЬДЕРА И МИНКОВСКОГО

- если ($p,q > 1$ & $1/p + 1/q = 1 \Leftrightarrow p + q = pq \Leftrightarrow p = (p-1)q$) тогда:

1) $||xy||_1 \leq ||x||_p \, ||y||_q$.
2) $(p \geq 1) \Rightarrow ||x + y||_p \leq ||x||_p + ||y||_p$.

КРИТЕРИЙ БАНАХОВОСТИ

$\langle X, || \, . \, ||_X \rangle$ банахово (1) $\Leftrightarrow$
(X - замкнутое п/п в б.п. $\langle Y, || \, . \, ||_X \rangle$) (2) $\Leftrightarrow$
($\forall$ абсолютно сходящийся ряд в X сходится) (3)

<u>**Доказательство:**</u>

$\Leftarrow$(1)?

Y=X! (1)$\Rightarrow$? **X$\supset\{x_n\}$ фундаментальна** =(X$\subseteq$Y)$\Rightarrow$

Y$\supset\{x_n\}$ фундаментальна =(Y - б.п.)$\Rightarrow$

$x_n \to x \in Y$ =(X замкнуто, а X$\supset\{x_n\}$)$\Rightarrow$

$x_n \to x \in X$ =(определение б.п.)$\Rightarrow$ X б.п.!

(X – ЗАМКНУТОЕ П/П В Б.П. $\langle Y, \|\cdot\|_Y\rangle$ $\Longrightarrow$ $\langle X, \|\cdot\|_X\rangle$ БАНАХОВО

(2)$\Rightarrow$? Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ абсолютно сходится,

т.е. сходится числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ из норм членов исходного ряда.

Рассмотрим $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$; при $m>n$ $s_m - s_n = x_{n+1} + \ldots + x_m$

=(неравенство треугольника)$\Rightarrow$ $\|s_m - s_n\| \le \sum\limits_{k=n+1}^{m} \|x_k\| \to 0 (m, n \to \infty)$

в силу критерия Коши для сходящегося числового ряда

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ =(определение фундаментальной последовательности)$\Rightarrow$

$\{s_n\}$ фундаментальна =(X – б.п.)$\Rightarrow$ $s_n \to s = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$!

$\Leftarrow$(2)? Пусть **X$\supset$$\{x_n\}$ фундаментальна**.

Выберем из $\{x_n\}$ «быстро сходящуюся» подпоследовательность $\{x_{n(k)}\}$:

$$(*) \qquad \|x_{n(k+1)} - x_{n(k)}\| \le \frac{1}{2^k},\ k=1,2,\dots,$$

(для $\frac{1}{2^k} > 0\ \exists\ n_k|\ n,m \ge n_k\ \|x_n - x_m\| \le \frac{1}{2^k}$). Рассмотрим ряд

$$(**) \qquad x_{n(1)} + \sum_{k=1}^{\infty}(x_{n(k+1)} - x_{n(k)}),$$

последовательность частичных сумм которого

$s_N = x_{n(1)} + (x_{n(2)} - x_{n(1)}) + \dots + (x_{n(N+1)} - x_{n(N)}) = x_{n(N+1)}$,

т.е. сходимость ряда (**) эквивалентна сходимости последовательности $\{x_{n(k)}\}$.

(*) =(мажорантный признак сходимости рядов с неотрицательными членами)$\Rightarrow$

ряд (**) абсолютно сходится =(условие теоремы)$\Rightarrow$

(**) сходится =(доказанная выше эквивалентность)$\Rightarrow$ $x_{n(k)} \to x \in X$.

$x_n \to x$? Фиксируем $\varepsilon>0$ =($\{x_n\}$ фундаментальна)$\Rightarrow$

$\exists\, n_\varepsilon \mid (n,m \ge n_\varepsilon \Rightarrow \|x_n - x_m\| \le \frac{\varepsilon}{2})$ =(n(k) строго возрастает & $x_{n(k)} \to x$)$\Rightarrow$

$\exists$ номер k | $n_k \ge n_\varepsilon$ & $\|x_{n(k)} - x\| \le \frac{\varepsilon}{2}$ =(неравенство треугольника)$\Rightarrow$

$\|x_n - x\| = \|x_n - x_{n(k)}\| + \|x_{n(k)} - x\| \le \varepsilon$ =(определение сходящейся последовательности)$\Rightarrow$

$\mathbf{x_n \to x \in X}$ **=(определение б.п.**.)$\Rightarrow$ X – б.п.♣

Теорема.

<B(T), || . ||$_{\sup}$> - банахово пространство.

Доказательство:

$X = B(T)$ – *множество функций, ограниченных на компакте* $T \Rightarrow$

$\forall x \in B(T)\ \sup\limits_{t\in T} |x(t)| < +\infty;\ \|x\|_{\sup} = \sup\limits_{t\in T} |x(t)|$

Рассмотрим фундаментальную последовательность $\{x_n(t)\}_{n=1}^{+\infty} \subset X$:

$\|x_n - x_m\| \to 0,\ n, m \to \infty;$

Фикс. $t_0 \in T$: *числовая последовательность* $\{x_n(t_0)\}_{n=1}^{\infty}$ – *фундам. послед.*

т.к. R – *банахово пр-во, то* $\{x_n(t_0)\}$ *сходится*: $x_n(t_0) \to a_0,\ |a_0| < +\infty.$

Тогда, $\forall t_0 \in T\ \ x_n(t_0) \to a_0,\ |a_0| < +\infty.$ *Следовательно,*

последовательность $\{x_n(t)\}$ *схходится поточечно к* $x(t)$: $x_n(t) \to x(t),\ t \in T;$

где $x(t) = a_0,\ t = t_0 \in T;\ |x(t)| \le \sup\limits_{t_0 \in T} |a_0| < +\infty \Rightarrow x(t) \in B(T);$

Докажем сходимость по норме:

$\forall t \in T:\ |x_n(t) - x(t)| \le \sup\limits_{t\in T} |x_n(t) - x(t)| = |x_n(t_0) - a_0| \to 0,\ n \to \infty$

переходя к sup *по* $t \in T$, *получим*:

$\|x_n - x\| \to 0,\ n \to \infty.$

Таким образом, фундам. посл-ть сходится $\Rightarrow B(T)$ – *банахово пр-во.*

СЛЕДСТВИЯ

1) l_∞ - б.п.;

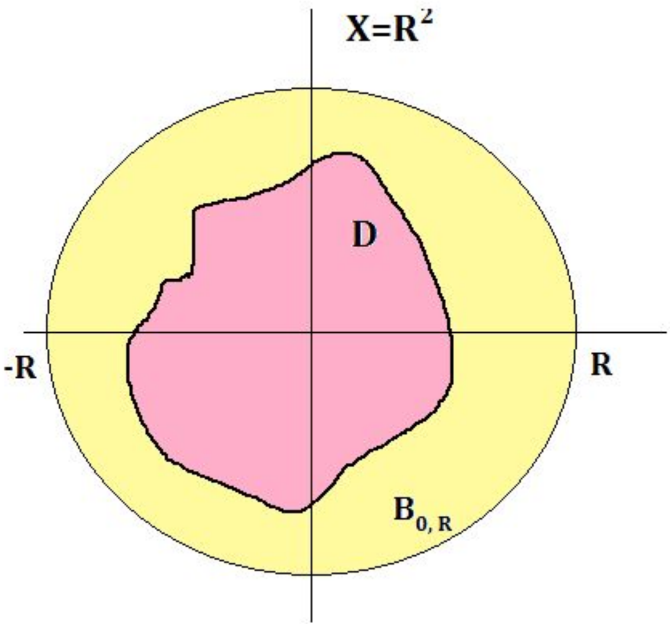
2) если T – компактное множество $\Rightarrow$ $<C(T), || . ||_{sup}>$ - б.п.;

3) C[a, b] – сепарабельное *(в нем существует счетное, всюду плотное множество)*, бесконечномерное б.п.

Лемма Рисса о почти перпендикуляре.

(Пусть X н.п., X ≠ Y-замкнутое п/п в X, ε>0), тогда ($\exists p \in X \mid \|p\| = 1$ & $\mathrm{dist}(p,Y) \geq 1-\varepsilon$).

Определение. Множество $D \subseteq X$ является ограниченным, если содержится в шаре конечного радиуса:



$$\exists R > 0 : D \subset B_{x_0, R} \Leftrightarrow$$

$$\forall x \in D : \|x - x_0\| < R$$

ПРИМЕРЫ ОГРАНИЧЕННЫХ МНОЖЕСТВ

$$1)\ X = C[0,1];$$

$$D = \left\{ x \in X : x(t) = C_1 + C_2 t^2,\ |C_1| \le 2;\ |C_2| \le 1 \right\} \subset Sp(1, t^2)$$

$$\textit{Проверим ограниченность}:$$

$$\forall x \in D : \left\| x - \theta \right\| = \left\| x \right\| = \left\| C_1 + C_2 t^2 \right\| \le |C_1| + |C_2| \cdot \left\| t^2 \right\| =$$

$$= (\left\| t^2 \right\| = \sup_{[0,1]} |t^2| = 1) = |C_1| + |C_2| \le 2 + 1 = 3 \Rightarrow$$

$$x \in \overline{B}_{\theta,3} \Rightarrow D \subset \overline{B}_{\theta,3} \Rightarrow D - \textit{ограничено в } X$$

$$2) X = L_1[0,1]; D = \left\{ x \in X : |x(t)| < 2 \right\}$$

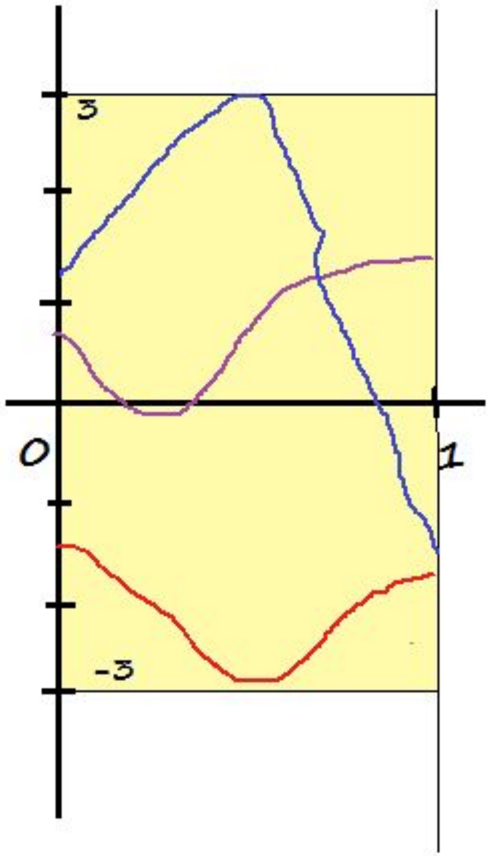
$$\forall x \in D : \left\| x - \theta \right\|_1 = \left\| x \right\|_1 = \int_0^1 |x(t)|\, dt < 2 \cdot \int_0^1 dt = 2 \Rightarrow$$

$$x \in B_{\theta,2} \Rightarrow D \subset B_{\theta,2} \Rightarrow D - \textit{ограничено в } X$$

ПРИМЕРЫ ШАРОВ

шар $\overline{B}_{0,3}$

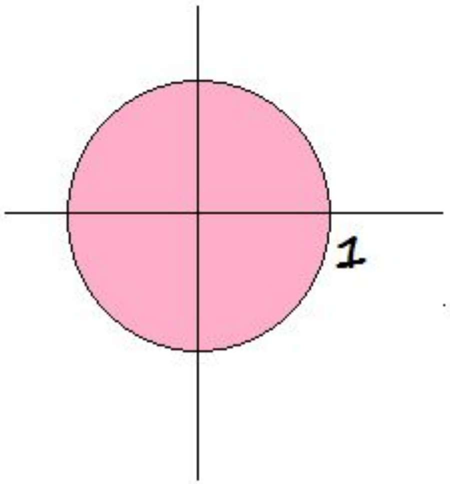
в $C[0,1]$



шар $\overline{B}_{0,1}$ в R^2

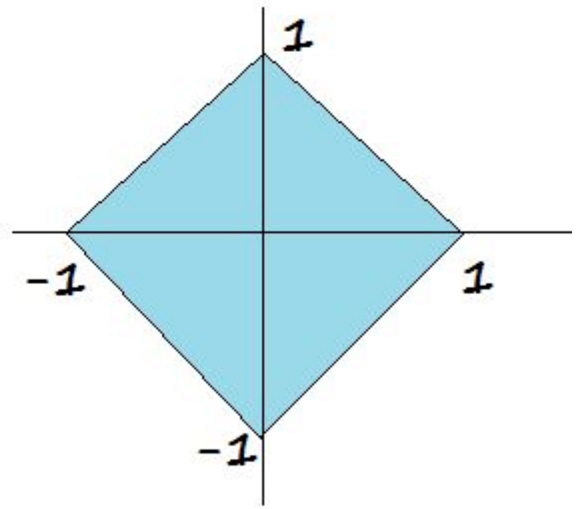
1. $||x||=\sqrt{|x_1|^2+|x_2|^2}$

$||x||\leq 1$



2. $||x||=|x_1|+|x_2|$

$||x||\leq 1$



ЛИНЕЙНЫЕ НЕПРЕРЫВНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Пусть X,Y-н.п.А: X→Y – линейный оператор

Определение. Оператор А называется ограниченным, если он всякое ограниченное множество переводит в ограниченное:

$$D \subseteq B_{\theta_X, r} \Rightarrow A(D) \subseteq B_{\theta_Y, R}$$

Определение.

Оператор А называется непрерывным, если

$$(\forall \{x_n\} : x_n \to x_0,\ n \to \infty) \Rightarrow (A(x_n) \to A(x_0),\ n \to \infty)$$

ПРИМЕРЫ НЕПРЕРЫВНЫХ ОПЕРАТОРОВ

1) $X = Y = C[0,1];$

$(Ax)(t) = a(t) \cdot x(t),\ t \in [0,1]$

$a(t) \in C[0,1]$

2) $X = Y = L_1[0,1]$

$(Ax)(t) = \int_0^1 k(t,s) \cdot x(s)\, ds,\ k(t,s) \in L_1[0,1]^2$

3) $X = Y = C(-\infty;+\infty)$

$(Ax)(t) = x(t+h),\ h \in R$

4) $X = Y = l_2;$

$Ax = (0, 0, x_1, x_2, \ldots., x_n, \ldots)$

КРИТЕРИЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ

Пусть A:**$<X, \| . \|_X> \to <Y, \| . \|_Y>$ - л.о., тогда**

(A непрерывен)$\overset{(1)}{\Leftrightarrow}$(A непрерывен в т. θ)$\overset{(2)}{\Leftrightarrow}$

(A ограничен)$\overset{(3)}{\Leftrightarrow}$ $\overset{(4)}{}$ $(\exists M > 0 : \|Ax\| \le M \cdot \|x\|, \forall x \in X)$

<u>Доказательство:</u>

$1^\circ \Leftrightarrow 2^\circ$? $1^\circ \Rightarrow 2^\circ$? - Очевидно!

$2^\circ \Rightarrow 1^\circ$? $\mathbf{x_n \to x}$ =(непрерывность алгебраических операций в X)$\Rightarrow$ $x_n - x \to \theta_X$ =(2°)$\Rightarrow$ $A(x_n - x) \to A\theta_X = \theta_Y$ =(A - л.о.)$\Rightarrow$

$Ax_n - Ax \to \theta_Y$ =(непрерывность алгебраических операций в Y)$\Rightarrow$

$\mathbf{Ax_n \to Ax}$ **$\Leftarrow$(определение н.о.)$\Rightarrow$** 1°!

- **$2^\circ \Rightarrow 3^\circ \Rightarrow 4^\circ \Rightarrow 2^\circ$?**
- **$2^\circ \Rightarrow 3^\circ$?** Предположим противное:

  [$X \supset D$ - ограниченное, но $A(D)$ не ограничено] =(определение ограниченного множества)$\Rightarrow$

  $A(D) \not\subset B_{\theta,n}$ $\forall n \in \mathbf{N}$ =(определение $\subseteq$)$\Rightarrow$ $A(D) \cap (Y \setminus B_{\theta,n}) \neq \varnothing$ $\forall n \in \mathbf{N}$ =(аксиома выбора)$\Rightarrow$ $\forall n \in \mathbf{N}$ $\exists$ $y_n \in A(D) \cap (Y \setminus B_{\theta,n})$ =(определение образа $A(D)$)$\Rightarrow$ $\forall n \in \mathbf{N}$ $\exists$ $x_n \in D \mid y_n = Ax_n \in A(D) \cap (Y \setminus B_{\theta,n})$ =(определение дополнения $Y \setminus B_{\theta,n}$) $\Rightarrow$ $\forall n \in \mathbf{N}$ $\exists$ $x_n \in D \mid \|Ax_n\| \geq n$ =(т.к. $\{x_n\} \subseteq D$ - ограничено)$\Rightarrow$ $z_n = x_n/n \to \theta$ при $n \to \infty$, но $\|Az_n\|$ =($z_n = x_n/n$)= $\|A(x_n/n)\|$ =(линейность о. A и полуоднородность нормы)= $\|Ax_n\| / n \geq$($\|Ax_n\| \geq n$)≥ 1, т.е. Az_n не сходится к θ_Y - противоречит 2° =(не $3^\circ \Rightarrow$ не 2° эквивалентно $2^\circ \Rightarrow 3^\circ$)$\Rightarrow 3^\circ$!

3°⇒4°? Предположим противное: не 4°, т. е. $\forall n \in \mathbf{N}\ \exists\ x_n \neq \theta$ (?) |

$\|Ax_n\|_Y > n\|x_n\|$ =(невырожденность и полуоднородность нормы и линейность о. A)⇒ $\left\|A\left(\frac{x_n}{\|x_n\|}\right)\right\| > n \frac{\|x_n\|}{\|x_n\|} = n$

=($\left\{\frac{x_n}{\|x_n\|}\right\}$- ограничена, но $A\left(\left\{\frac{x_n}{\|x_n\|}\right\}\right)$ не ограничена)⇒ противоречит 3° =(не 4°

⇒ не 3° эквивалентно 3°⇒4°)⇒ 4° !

$4^\circ \Rightarrow 2^\circ$? $\mathbf{x_n} \to \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{X}}$ $\Leftarrow$(определение сходящейся послед -ти)$\Rightarrow$ $||x_n||_X$ $\to 0$ $=$($||Ax||_Y \le M||x||_X$)$\Rightarrow$

$0 \le ||Ax_n||_Y \le M||x_n||_X \to 0$

$=$(лемма о зажатой посл-ти)$\Rightarrow$ $||Ax_n||_Y \to 0$

$\Leftarrow$(определение сходящейся последовательности)$\Rightarrow$ $\mathbf{Ax_n} \to \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{Y}} \Leftarrow$

(**определение непрерывного в θ о.**)$\Rightarrow 2^\circ$

ЧТД

НОРМА Л.Н.О.

$A:X\to Y$- л.н.о.

Для линейных операторов непрерывность эквивалентна его ограниченности

Оператор А – ограничен

$\Leftrightarrow \exists \text{константа ограниченности } M:$

$\forall x \in X : \|Ax\| \le M \cdot \|x\|$

Наименьшей из всех констант ограниченности называется нормой оператора А $(\|A\|)$

$$\Rightarrow \forall x \in X \ \|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\|$$

ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ НОРМЫ А

- <u>Теорема</u> *Формулы для вычисления нормы л.н. о.* $A \in \mathbf{N}(X,Y)$:

$$\|A\| = (\alpha)\ \sup\{\,\|Ax\|_Y : \|x\|_X \le 1\} =$$
$$(\beta)\ \sup\{\,\|Ax\|_Y : \|x\|_X = 1\} =$$
$$(\gamma)\ \sup\{\,\|Ax\|_Y / \|x\|_X : x \ne \theta\}.$$

Примеры: Вычислить норму оператора

$$1)\ X = Y = C[a,b]$$

$$(Ax)(t) = a(t)\cdot x(t),\ a(t) \in X$$

$$2)\ X = Y = C[a,b];$$

$$(Ax)(t) = \int_0^1 k(t,s)\,x(s)\,ds$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ НОРМЫ ОПЕРАТОРА

$X = Y = C[a, b]; (Ax)(t) = a(t)\cdot x(t),\ t \in [a,b]$

1) $\exists M > 0 : \| Ax \| \le M \| x \|,\ \forall x \in X$

$\forall t \in [a,b] : |(Ax)(t)| = |a(t)\cdot x(t)| = |a(t)|\cdot|x(t)| \le |a(t)|\cdot \sup\limits_{t\in[a,b]} |x(t)| = |a(t)|\cdot\| x \|$

переходя к $\sup$ *по* $t \in [a,b]$, *получим*:

$\| Ax \| \le \sup\limits_{t\in[a,b]} |a(t)|\cdot\| x \| \Rightarrow\ M = \sup\limits_{t\in[a,b]} |a(t)| \Rightarrow \| A \| \le \sup\limits_{t\in[a,b]} |a(t)|$

2) $\| Ax \| \le \| A \|\cdot\| x \|,\ \forall x \in X$

задача: *показать, что* $\| A \| \ge \sup\limits_{t\in[a,b]} |a(t)|$

возьмём $x_0(t) : \| Ax_0 \| = M;\ \| x_0 \| = 1$

$x_0(t) \equiv 1;\ (Ax_0)(t) = a(t) \Rightarrow \| x_0 \| = 1;\ \| Ax_0 \| = M = \sup\limits_{t\in[a,b]} |a(t)| \Rightarrow$

$\sup\limits_{t\in[a,b]} |a(t)| \le \| A \|$

Исходя из 1) *и* 2), *получим*: $\| A \| = \sup\limits_{t\in[a,b]} |a(t)|.$

$$1.1.\quad X=Y=C[0,1];\ (Ax)(t)=\left(2t^2+1-6\right)\cdot x(t);$$

$$a(t)=2t^2+t-6;\ \|a\|=\sup_{t\in[0,1]}|2t^2+t-6|=6\Rightarrow\|A\|=\|a\|=6$$

$$1.2.\quad X=Y=C[0,1];\ (Ax)(t)=\frac{t^2}{t^2+1}\cdot x(1);\ \|A\|=?$$

$$1)\ \forall t\in[0,1]\ |(Ax)(t)|=\left|\frac{t^2}{t^2+1}\cdot x(1)\right|=\left|\frac{t^2}{t^2+1}\right|\cdot|x(1)|\le\frac{1}{2}\cdot\sup_{t\in[0,1]}|x(t)|=0{,}5\cdot\|x\|$$

переходя к $\sup$ *по* $t\in[0,1]$, *получим* :

$$\|Ax\|\le 0{,}5\cdot\|x\|\Rightarrow\|A\|\le 0{,}5;$$

$$2)\ \forall x\in X:\ \|Ax\|\le\|A\|\cdot\|x\|$$

$$x_0(t)=1:\|x_0\|=1;\|Ax_0\|=0{,}5;\Rightarrow\|A\|\ge 0{,}5$$

Из п. 1) *и* 2) *следует* : $\|A\|=0{,}5.$

ВЫЧИСЛЕНИЕ НОРМЫ ОПЕРАТОРА

$$X = Y = C[0,1]$$

$$(Ax)(t) = (3t^2 + t - 2) \cdot x(t)$$

$$\|A\| = \|3t^2 + t - 2\|_{C[0,1]} = \sup_{[0,1]} |3t^2 + t - 2| = 2$$

$$X = Y = C[0,1]$$

$$(Ax)(t) = \frac{t^2}{t^2 + 1} \cdot x(t)$$

$$\|A\| = \sup_{[0,1]} \left| \frac{t^2}{t^2 + 1} \right| = 0{,}5$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ НОРМЫ ОПЕРАТОРА

$$X = Y = C[a,b]$$

$$(Ax)(t) = \int_a^b k(t,s)\,x(s)\,ds$$

$$1. \forall t \in [a,b]: |(Ax)(t)| = \left|\int_a^b k(t,s)\,x(s)\,ds\right| \le \int_a^b |k(t,s)| \cdot |x(s)|\,ds \le \int_a^b |k(t,s)|\,ds \cdot \|x\|$$

переходя к $\sup$ *по* $t \in [a,b]$, *получим*:

$$\|Ax\| \le \sup_{t\in[a,b]} \int_a^b |k(t,s)|\,ds \cdot \|x\| \Rightarrow \|A\| \le \sup_{t\in[a,b]} \int_a^b |k(t,s)|\,ds = M$$

$$2. \|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\| \ \forall x \in X \Rightarrow \exists x_0 \in X:$$

$\|x_0\| = 1 \wedge \|Ax_0\| = M$, *в качестве* $x_0(t)$ *можно выбрать функцию* $x_0(t) \equiv 1$

$$(Ax_0)(t) = \int_a^b k(t,s)\,ds \Rightarrow \|Ax_0\| = \sup_{[a,b]} \int_a^b |k(t,s)|\,ds = M \Rightarrow$$

$\|Ax_0\| \le \|A\| \cdot \|x_0\|$, *т.е.* $M \le \|A\|$

*Из п.*1 *и п.*2 $\Rightarrow \|A\| = M = \int_a^b |k(t,s)|\,ds$

пример: $X = Y = C[-1,1]$, $(Ax)(t) = \int_{-1}^1 t^2 s^3\, x(s)\,ds$

$$\|A\| = \sup_{t\in[-1,1]} \int_{-1}^1 |t^2 s^3|\,ds = \sup_{t\in[-1,1]} |t^2| \cdot \int_{-1}^1 |s^3|\,ds = 2\int_0^1 |s^3|\,ds = 0{,}5$$

СВОЙСТВА Л.Н.О.

Множество всех л.н.о. , действующих из X в Y, обозначим **N(X,Y).**

1)N(X,Y) нормированное пространство с $\|A\|$,

1.1. N(X,Y) – линейное пространство

1.2. N(X,Y) – метрическое пространство

1.3. $\|A\|$ удовл. аксиомам нормы

2) Если Y-б.п., то N(X,Y)-б.п.

3) A, B - л.н.о. $\Rightarrow$ BA - л.н.о. & $\|BA\| \le \|B\| \cdot \|A\|$.

4) $A \in \mathbf{N}(X) \Rightarrow A^n \in \mathbf{N}(X)\ \forall\ n \in \mathbf{N}\ \&\ \|A^n\| \le \|A\|^n$.

5) Умножение л.н.о. *непрерывно*:
$(A_n \to A\ \&\ B_n \to B) \Rightarrow B_n A_n \to BA$.

6) Дистрибутивный закон для операторных рядов:
$(A_k, B, \sum A_k \in \mathbf{N}(X)) \Rightarrow B \sum A_k = \sum B A_k$.

СВОЙСТВА К/М Н.П.

Теорема. В конечномерном н.п.

1) $\forall$ две нормы эквивалентны;

2) сходимость по любой норме - покоординатная сходимость (в любом базисе);

3) к/м н.п. полно и сепарабельно;

4)к/м п/п в н.п. всегда замкнуто;

5) к/м н.п. локально компактно;

6)любой л.о. в к/м н.п. непрерывен;

7) к/м н.п. одинаковой размерности изоморфны в категории **N**.

ТЕОРЕМЫ ОБ ОПЕРАТОРАХ В Б.П.

- Теорема о продолжении по непрерывности.

  (X - н.п., Y - б.п., D_A - н.п/п в X, $A{:}D_A \subset X \to Y$ - л.н.о.) , тогда

  $\exists$ единственный л.н.о. □A:□$D_A \subset X \to Y$, продолжающий A на замыкание □D_A (т.е. □$A|D_A$ = A) & ‖□A‖= ‖A‖).

- Теорема Банаха-Штейнгауза - критерий ограниченности в **N**(X,Y).

  (**N**(X - б.п., Y) $\supset$ M - ограничено) $\Leftrightarrow$ ($\forall x \in X$ числовое м. $\{\|Ax\|_Y : A \in M\}$ ограничено).

- Теорема об открытом отображении.

  Пусть $A \in \mathbf{N}$(X - б.п., Y - б.п.); тогда (A - открытое отображение (т.е. образ $\forall$ открытого м. открыт)) $\Leftrightarrow$ A сюръективен.

- Теорема Банаха об обратном операторе.

  ($\mathbf{N}$(X - б.п., Y - б.п.) $\ni$ A - биективен) $\Leftrightarrow$ ($A^{-1} \in \mathbf{N}$(Y - б.п., X - б.п.), т.е. A - изоморфизм в $\mathbf{N}$)

- Следствия.
- Об эквивалентности норм.

$(\langle X, \|\cdot\|_\alpha\rangle$ - б.п., $\langle X, \|\cdot\|_\beta\rangle$ - б.п. &
$\exists\ c>0 \mid \|\cdot\|_\alpha \le c\|\cdot\|_\beta) \Rightarrow \|\cdot\|_\alpha \sim \|\cdot\|_\beta$.

- Теорема о замкнутом графике.

$(X, Y$ - б.п., $A{:}X\to Y$ - л.о.$) \Rightarrow$
(A непрерывен $\Leftrightarrow$
график $Gr(A) = \{\langle x, Ax\rangle : x \in X\}$ - замкнутое
л. п/п в б.п.
$\langle X\times Y, \|\langle x,y\rangle\|_{X\times Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y\rangle$).

$$f : R \to R; \quad y = f(x) = 5x;$$

$$f - \text{линейный}\left(f(ax_1 + bx_2) = 5(ax_1 + bx_2) = a * 5x_1 + b * 5x_2 = af(x_1) + bf(x_2)\right);$$

$$\text{непрерывный оператор} : \| f \| = 5$$

График замкнут.

$$Gr(f) = \{(x, 5x),\ x \in R\}$$