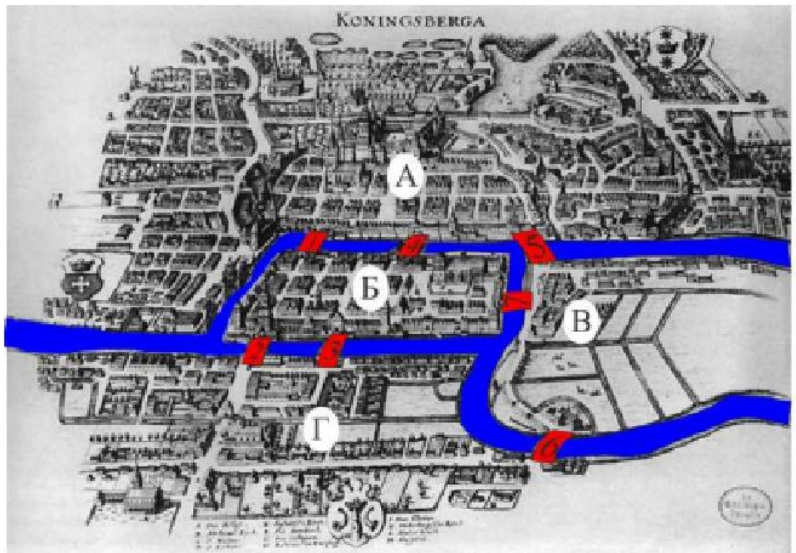
Теория графов

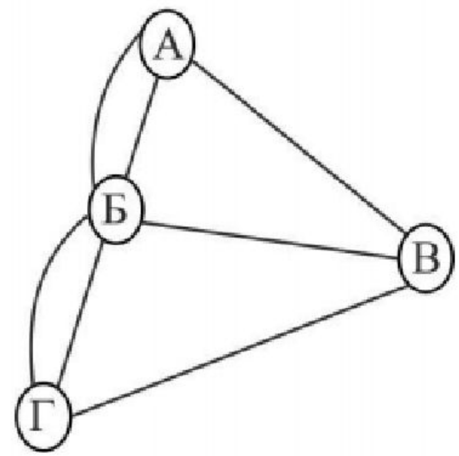
Основные вопросы лекции.

- Введение
- Понятие графа.

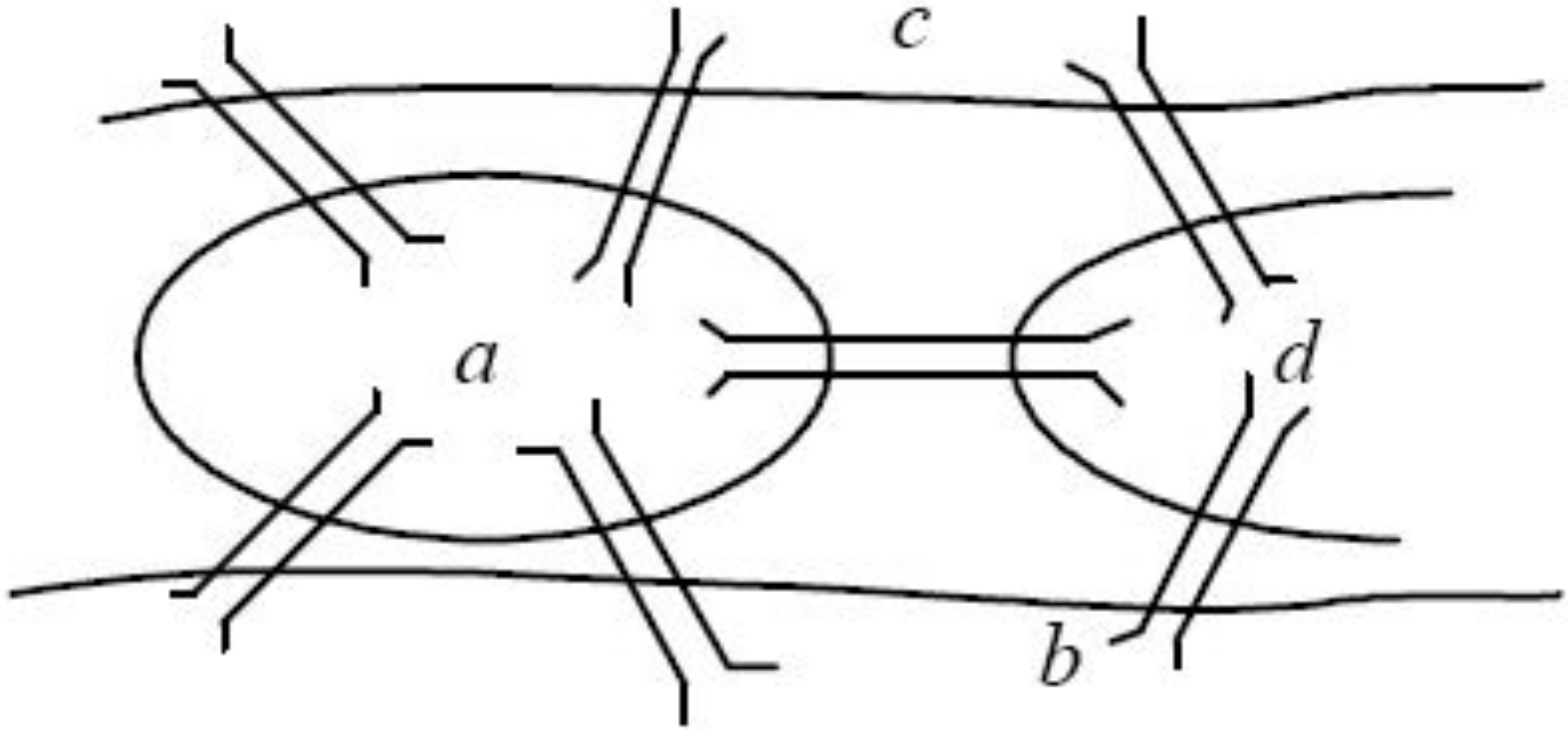
- Первая работа по графам была опубликована математиком Эйлером в 1736 году.
- Она содержала решение задачи о кенигсбергских мостах:

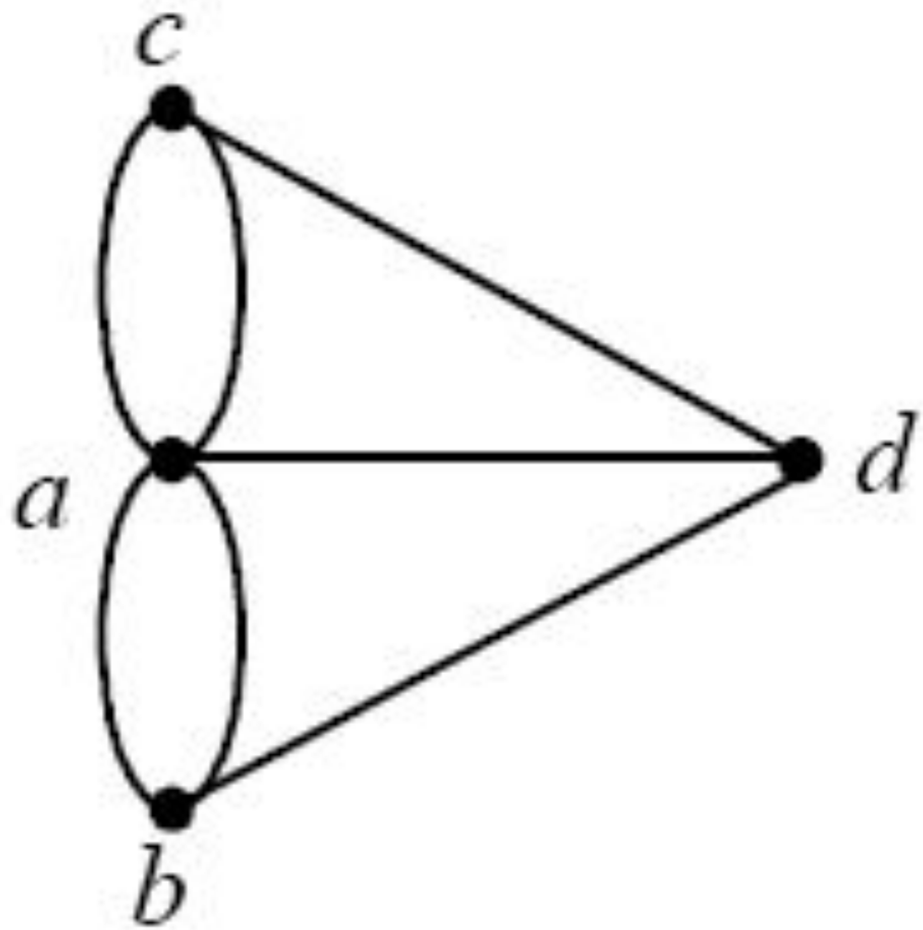
  можно ли совершить прогулку таким образом, чтобы, выйдя из любого места города, вернуться в него, пройдя в точности один раз по каждому мосту.





Старинная карта Кёнигсберга. Буквами обозначены части города: А — Альтштадт, Б — Кнайпхоф, В — Ломзе, Г — Форштадт. Цифрами обозначены мосты (в порядке строительства): 1 — Лавочный, 2 — Зелёный, 3 — Рабочий, 4 — Кузнечный, 5 — Деревянный, 6 — Высокий, 7 — Медовый.

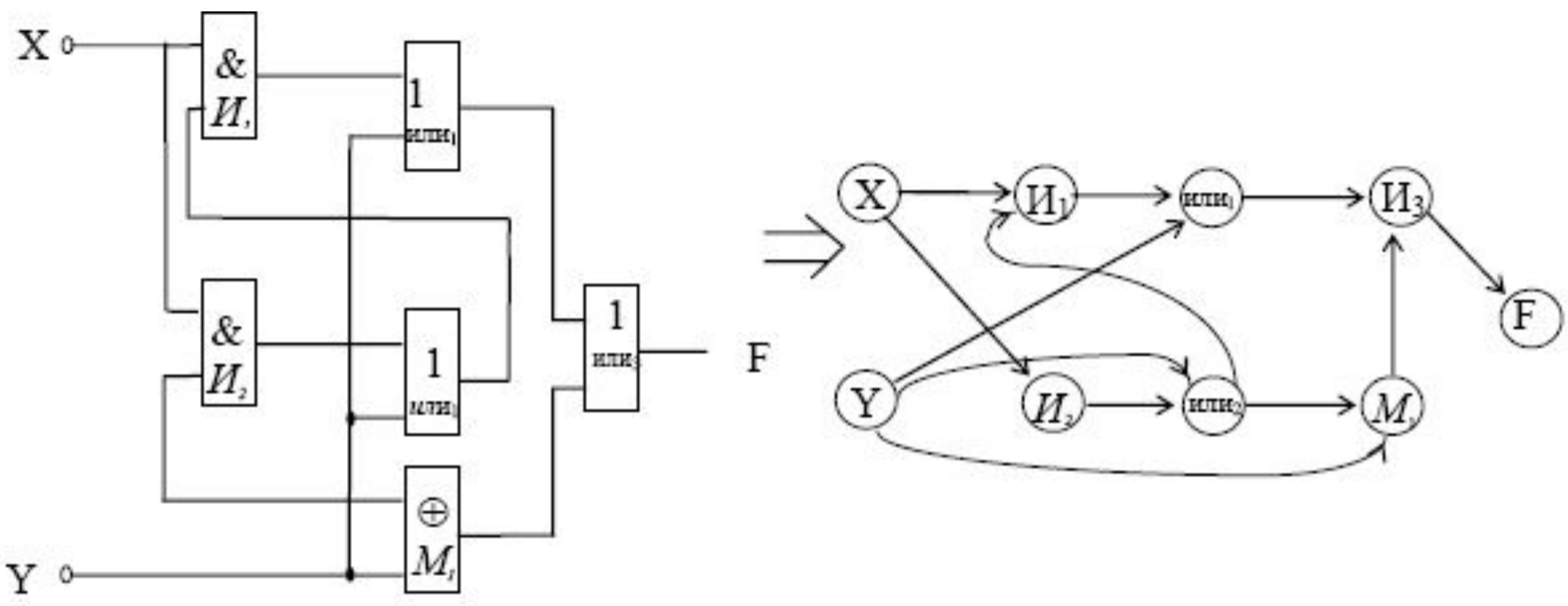

c
a
d
b


c
a
d
b

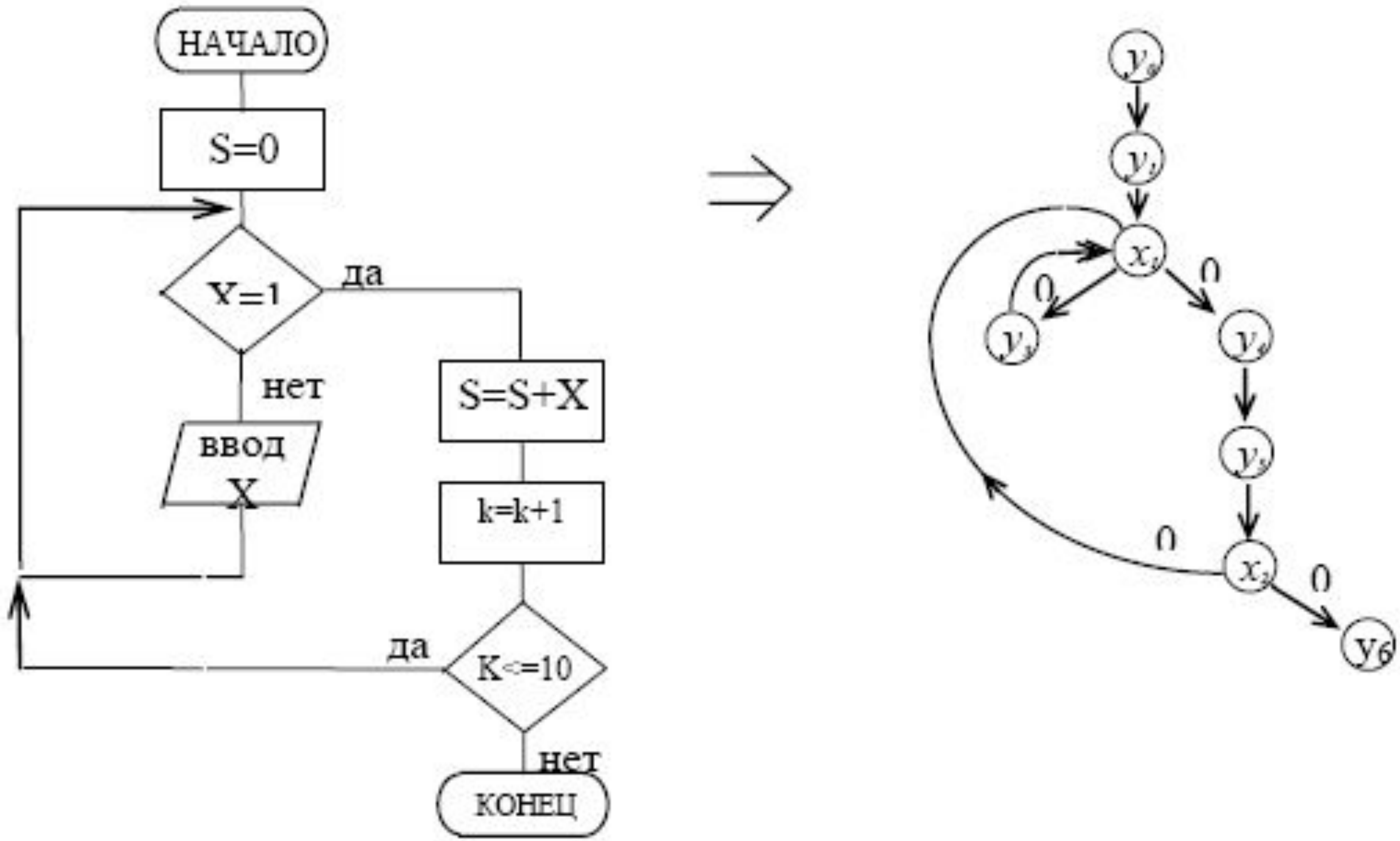
Начало развития теории графов как самостоятельной математической дисциплины положено **Д. Кенигом**, выпустившим в 1936 году книгу " Теория конечных и бесконечных графов".

- ***Преимущество графов*** следует из того, что они однозначно описывают структуру системы, на их основе просто записываются канонические уравнения, фиксируются физические свойства и причинная зависимость между переменными.
- ***Их особенностью*** является геометрический подход к изучению объектов, т.е. представление в виде диаграмм.

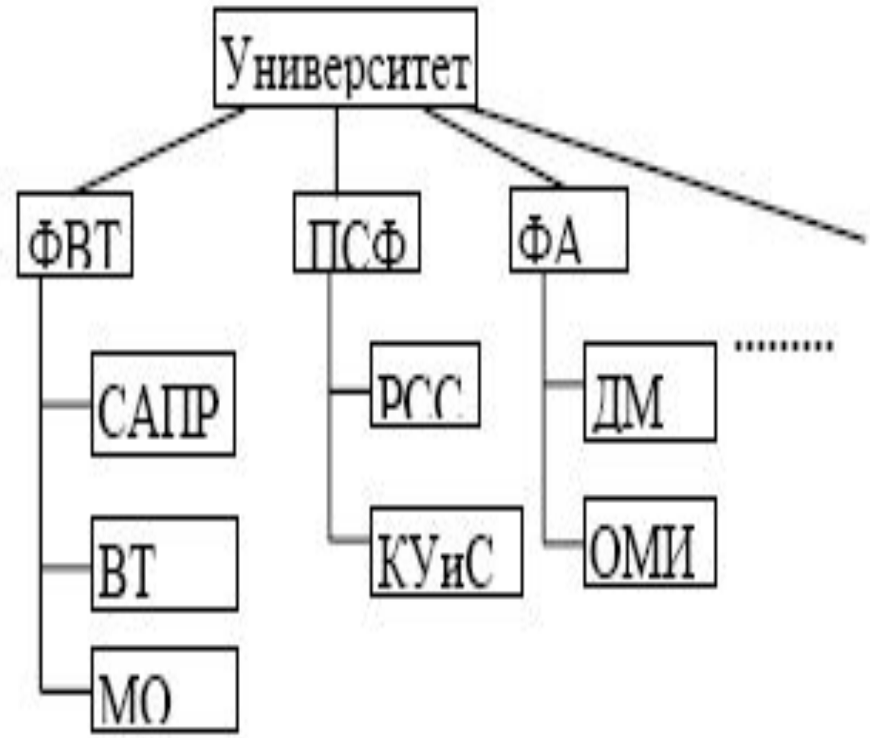
Представление в виде ориентированных графов логической или функционально - логической схемы

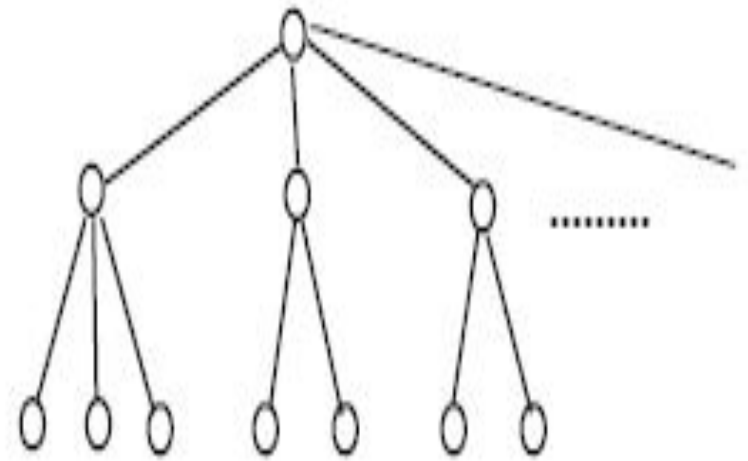


Блок – схема алгоритма может быть представлена вероятностным графом



Графом типа “дерево” можно отобразить практически любую структуру организации или предприятия





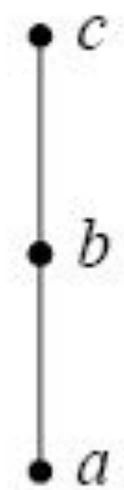
Граф есть конечное множество V, называемое множеством вершин, на котором задано симметричное, антирефлексивное отношение R и выделено множество E двухэлементных подмножеств V, определяемое как $\{a,b\} \in$ R тогда и только тогда, когда $(a,b) \in$ R и $a \neq b$.

Множество E называется **множеством ребер**. Всякий элемент множества E называется **ребром.**

Граф обозначается $G(V, E)$. Элементы a и b графа V соединены или связаны ребром $\{a, b\}$, если $\{a, b\} \in E$.

- **Пример.**

  Граф с множеством вершин $V = \{a, b, c\}$ и множеством ребер $E = \{\{a, b\},\{b,c\}\}$

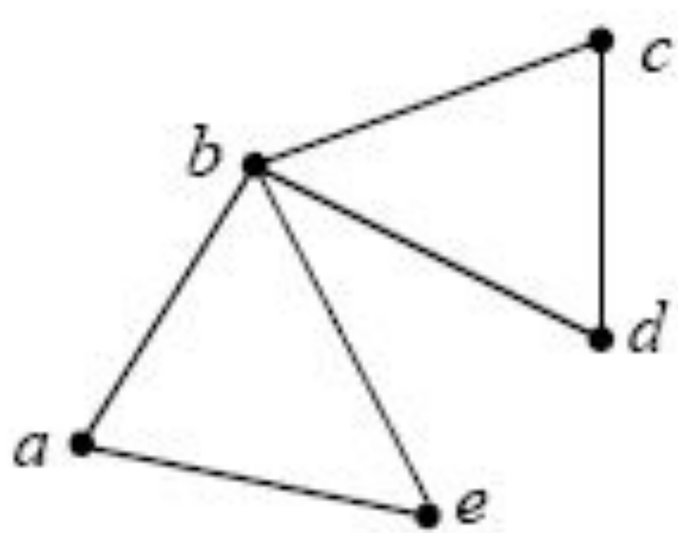


R = {(a,b), (b,a), (b,c), (c,b)}.

- **Пример.**

  Граф, у которого $V = \{a, b, c, d, e\}$ и

  $E = \{\{a, b\}, \{a, e\}, \{b, e\}, \{b, d\}, \{b, c\}, \{c, d\}\}$



R = {(a,b), (b,a), (a,e), (e,a), (e,b), (b,e), (b,d), (d,b), (b,c), (c,b), (d,c), (c,d)}.

Для отношения более общего вида необходимо представление элемента

$(a,b) \in R$,

для которого возможно $(b,a) \notin R$.

Это возможно представить с помощью ориентированного графа.

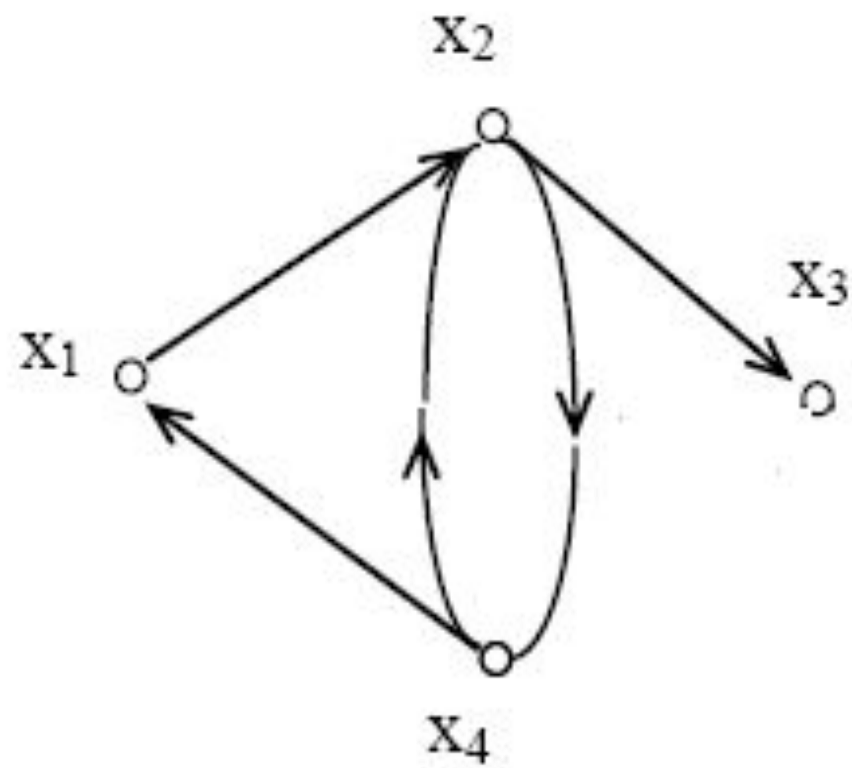
Ориентированный граф, или орграф G, обозначаемый

G (V,E), состоит из множества V вершин и отношения E на V, называемого множеством ориентированных ребер, или просто ребер.

- Элемент множества *E* называется **ориентированным ребром.**
- Если (a,b) $\in$ E, то a называется начальной вершиной (a,b), а b – его **конечной вершиной**.

- **Пример.**

  Орграф с вершинами $V = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ и ребрами $E = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_2, x_4), (x_4, x_2), (x_4, x_1)\}$.



Замечания:

- Ребро орграфа обозначается на диаграмме стрелкой от a к b и называется ***дугой***.
- **В простом графе** ребро представляется двухэлементным подмножеством, чтобы подчеркнуть, что ***ребро как отношение*** симметрично.
- В орграфе ребро представлено *упорядоченной парой*, чтобы подчеркнуть то, что порядок имеет значение, и то, что (a,b) может быть ребром диаграммы, а (b,a) нет.

Граф есть <u>конечное множество</u> V, называемое **множеством вершин**, и множество E двухэлементных *всех неупорядоченных различных* подмножеств множества V.

Множество E называется **множеством ребер**.

Элемент множества E называется **ребром.**

Граф обозначается $G(V, E)$. Элементы a и b элементы множества V называются **соединенными** или **связанными** ребром $\{a, b\}$, если $\{a, b\} \in E$.

Граф G (V,E) – комбинаторный объект, состоящий из двух конечных множеств: V – называемого множеством вершин и множества пар элементов из V, т.е. , $E \subseteq V \times V$ называемого множеством ребер, если пары неупорядочены, и множеством дуг, если пары упорядочены.

Конечный граф с n вершинами называется <u>графом n-го порядка.</u>

Если $\{a, b\}$ – ребро, тогда вершины a и b называются **концами** ребра $\{a, b\}$. Ребро $\{a, b\}$ называют также **инцидентным** к вершинам a и b.

Две вершины называются **смежными**, если они являются концами ребра, или, что то же самое, если они инцидентны к одному ребру.

Два ребра называются **смежными**, если они инцидентны к общей вершине.

Граф G (V,E) – совокупность двух множеств: вершин V и ребер E, между которыми определено отношение инцидентности.

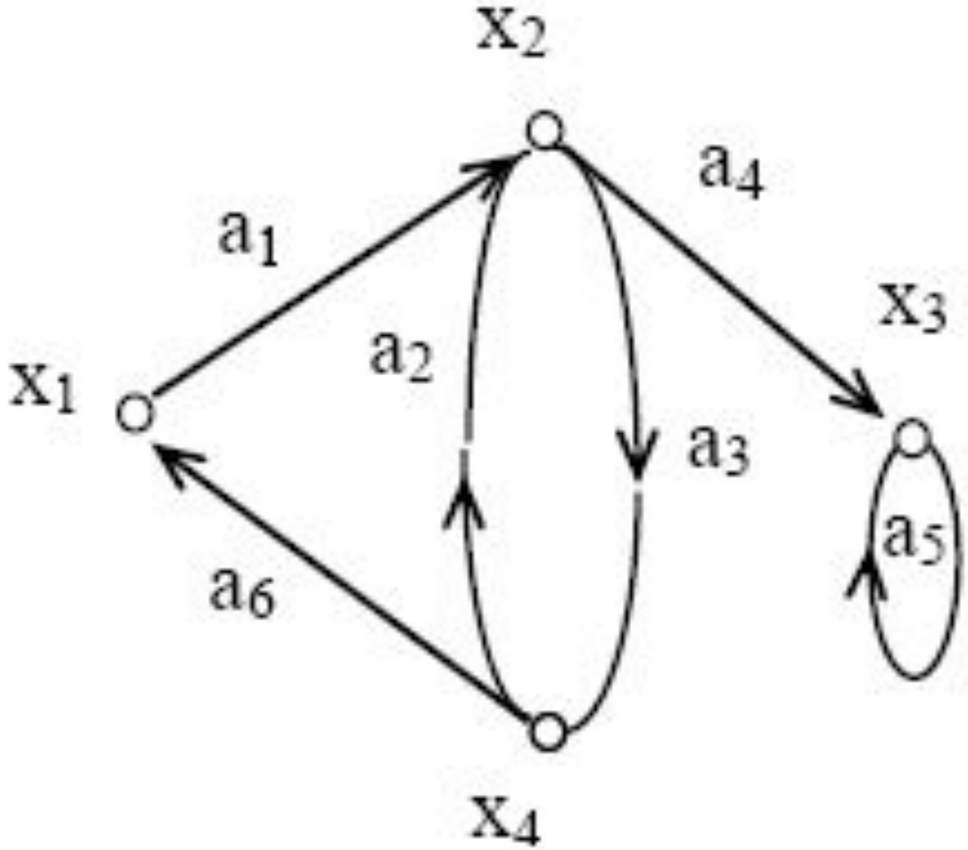
Каждое ребро e из E инцидентно ровно двум вершинам, которые оно соединяет.

Ребро, которое соединяет вершину саму с собой, называется петлей.

Ребро, которому поставлена в соответствие пара вида (a, a), то есть ребро, соединяющее вершину a с нею же самой, называется *петлей*.

Понятие бинарного отношения эквивалентно понятию ориентированного графа с петлями.

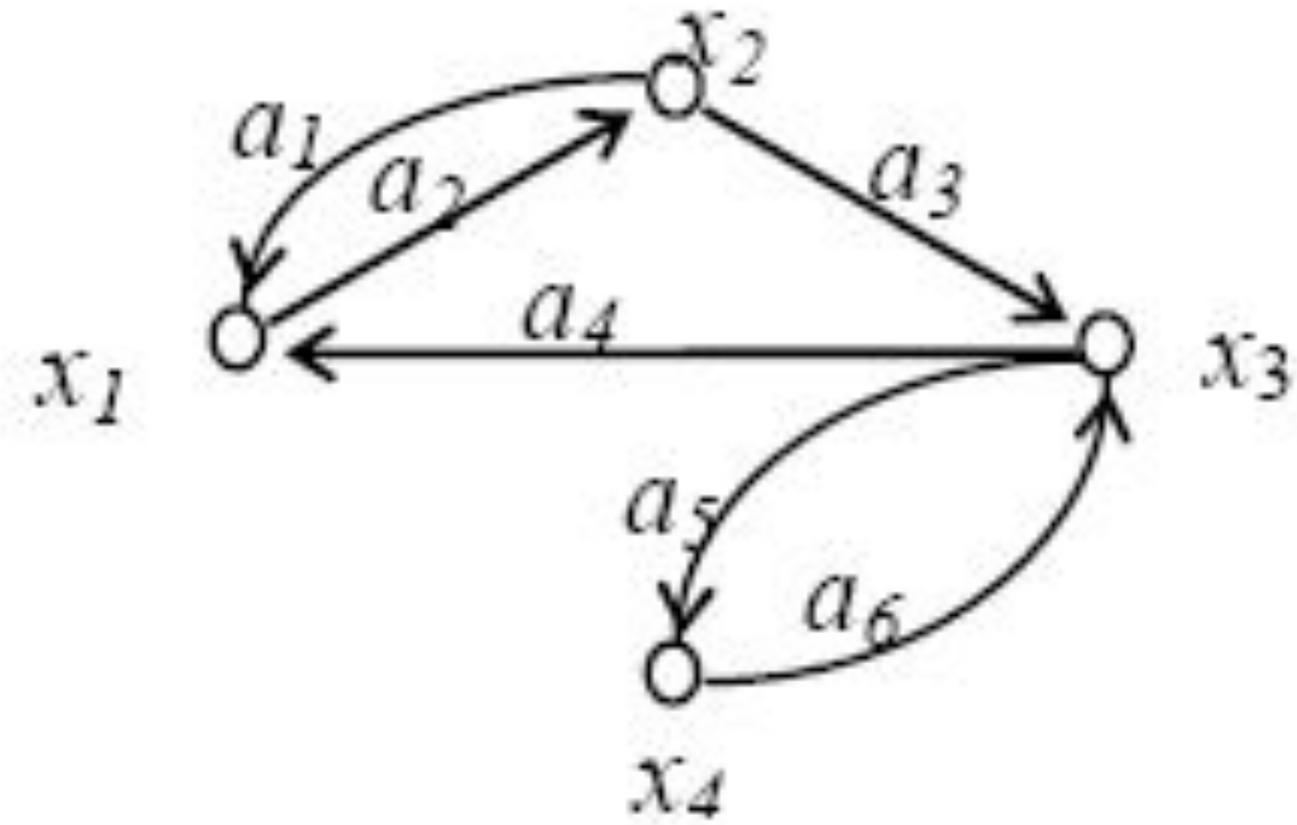
Если в графе допускается наличие петель, то он называется **графом с петлями**



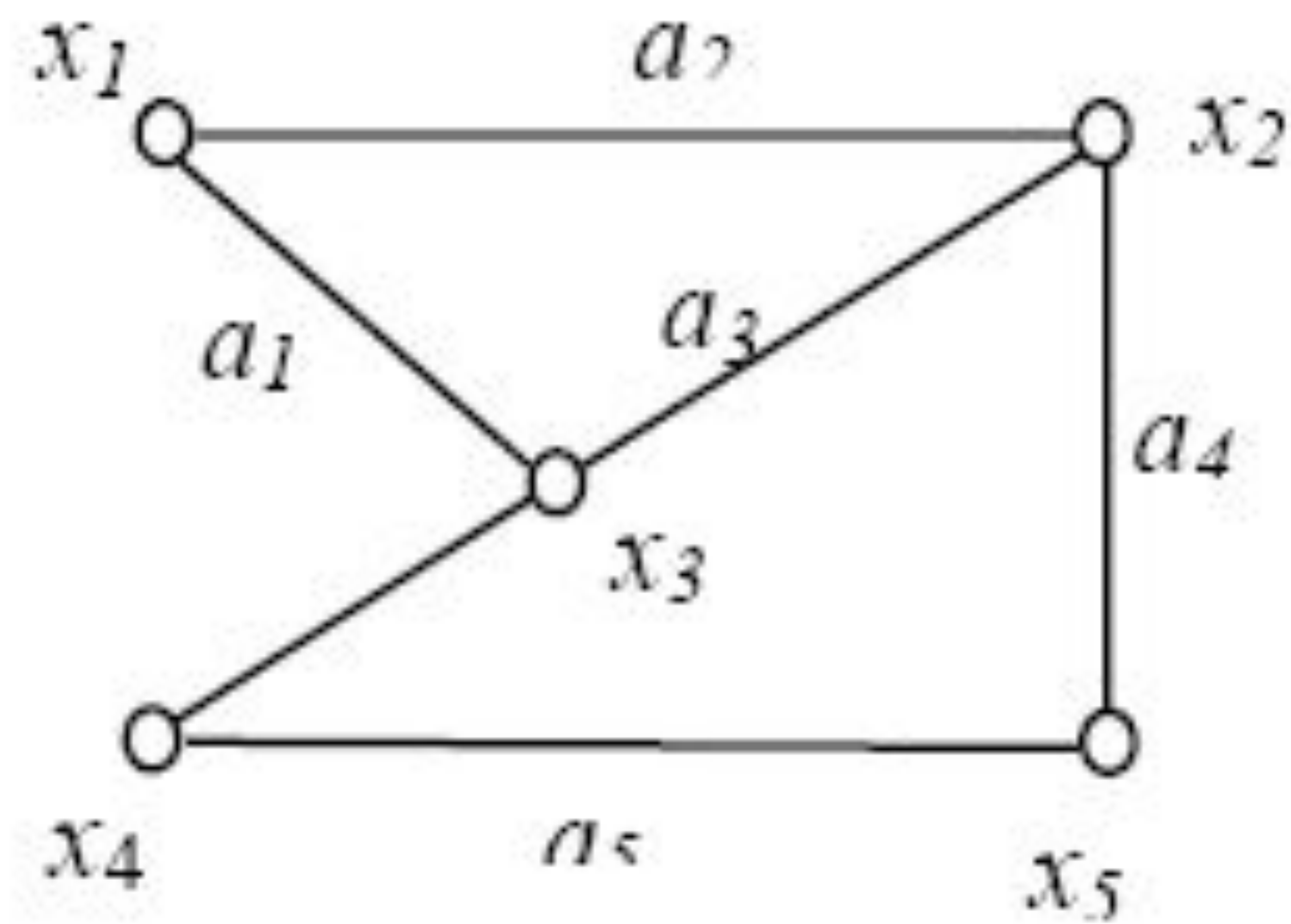
В графе антирефлексивного и симметричного отношения нет петель и для каждой пары вершин либо нет ни одного, либо есть два ребра, соединяющих эти вершины.

Если в таком графе каждую пару ориентированных ребер, соединяющих одни и те же две вершины, заменить одним неориентированным ребром, то получится обыкновенный граф.

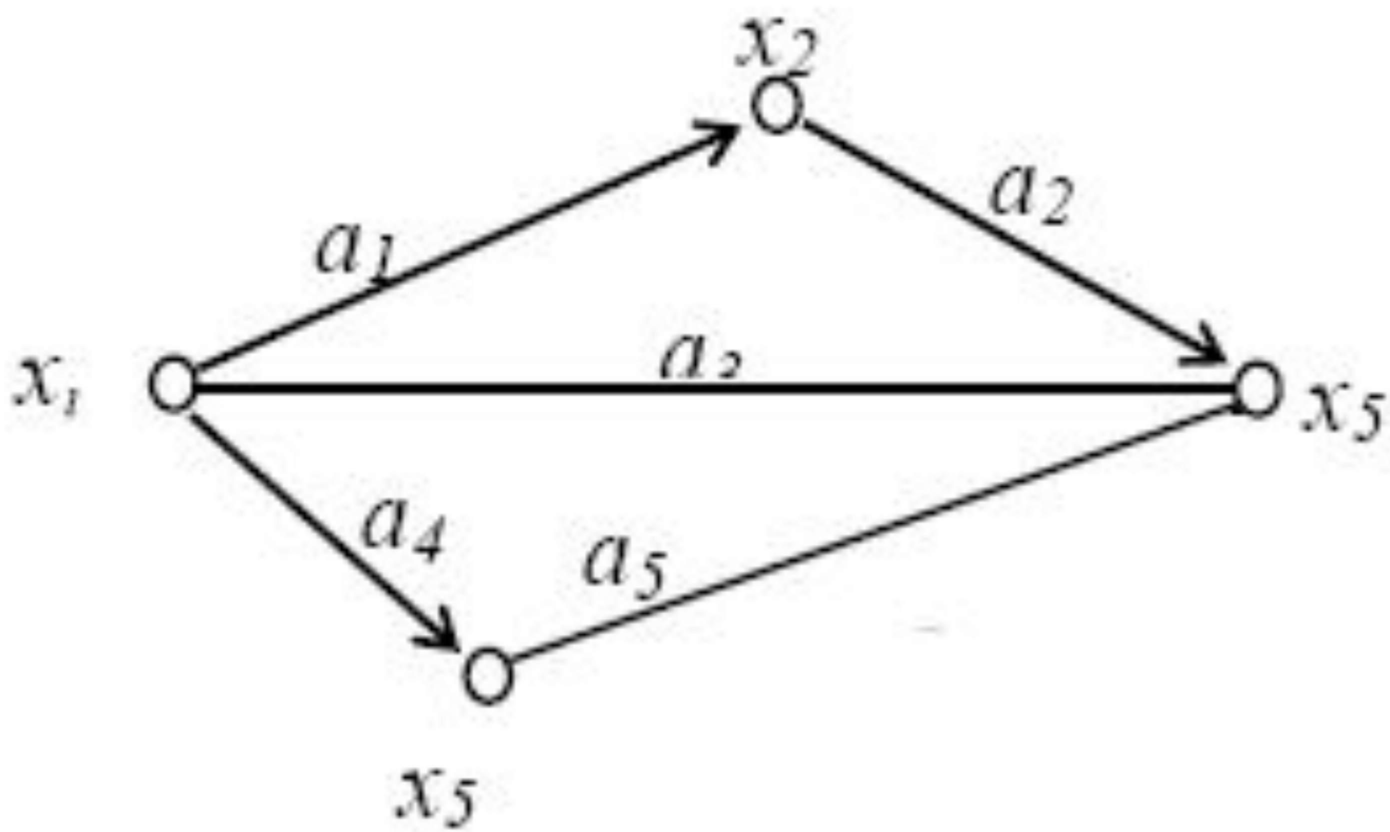
Пример ориентированного графа



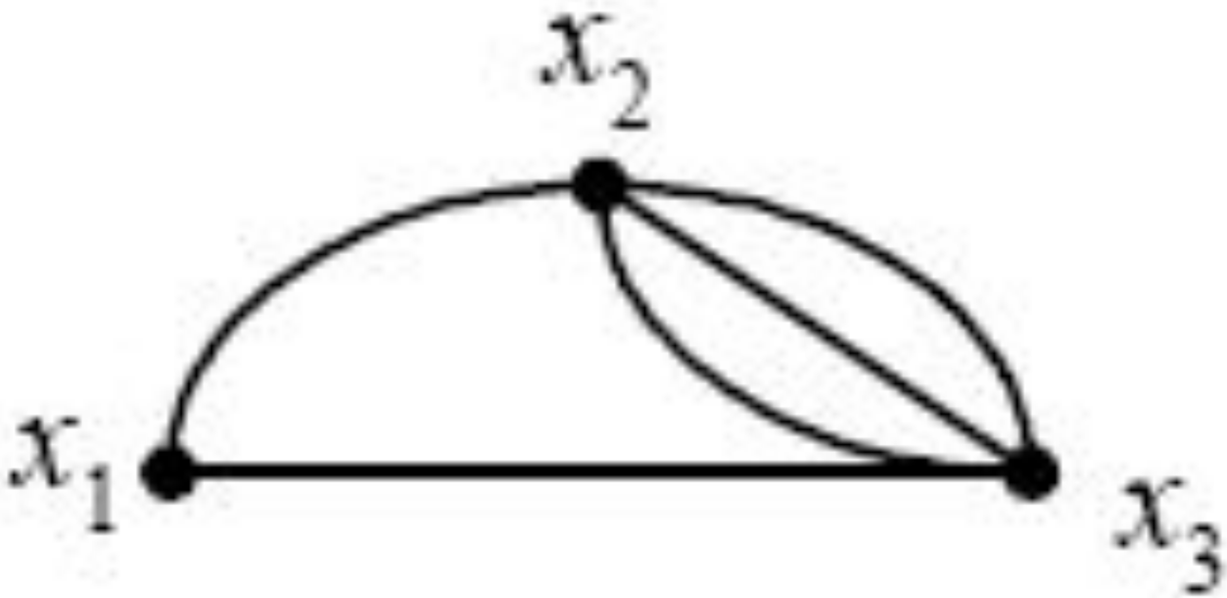
Пример неориентированного графа



Пример смешанного графа



Если в графе допускается наличие более одного ребра между двумя вершинами, то он называется **мультиграфом.**



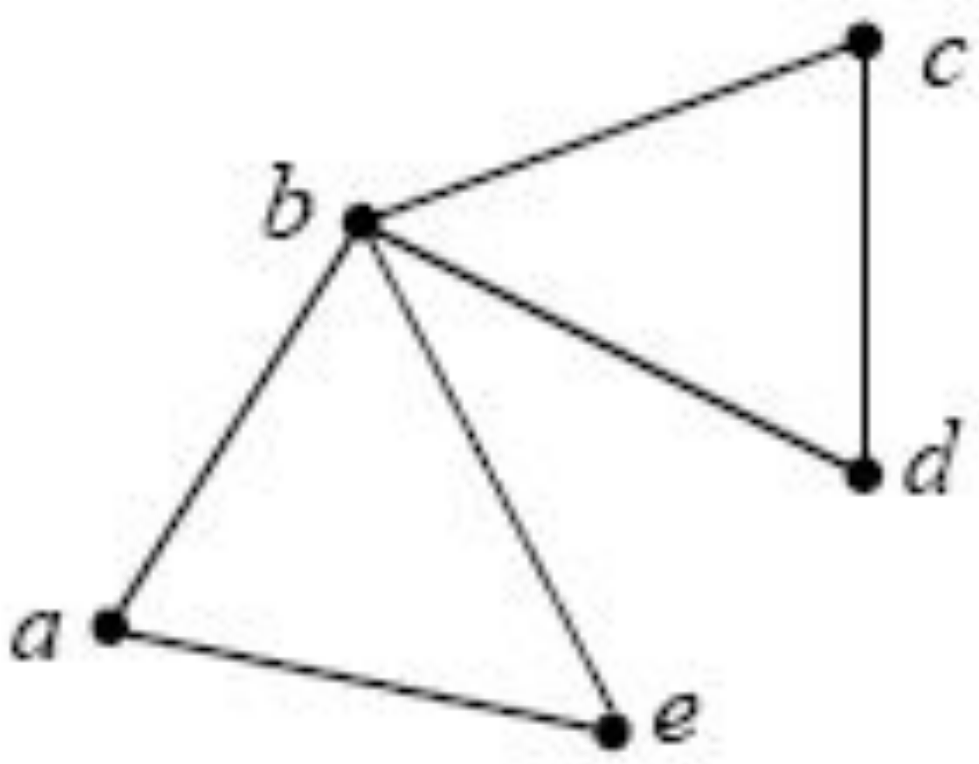
Если $G(V, E)$ – мультиграф, то E может иметь несколько ребер (a,b).

Такие ребра называются кратными ребрами.

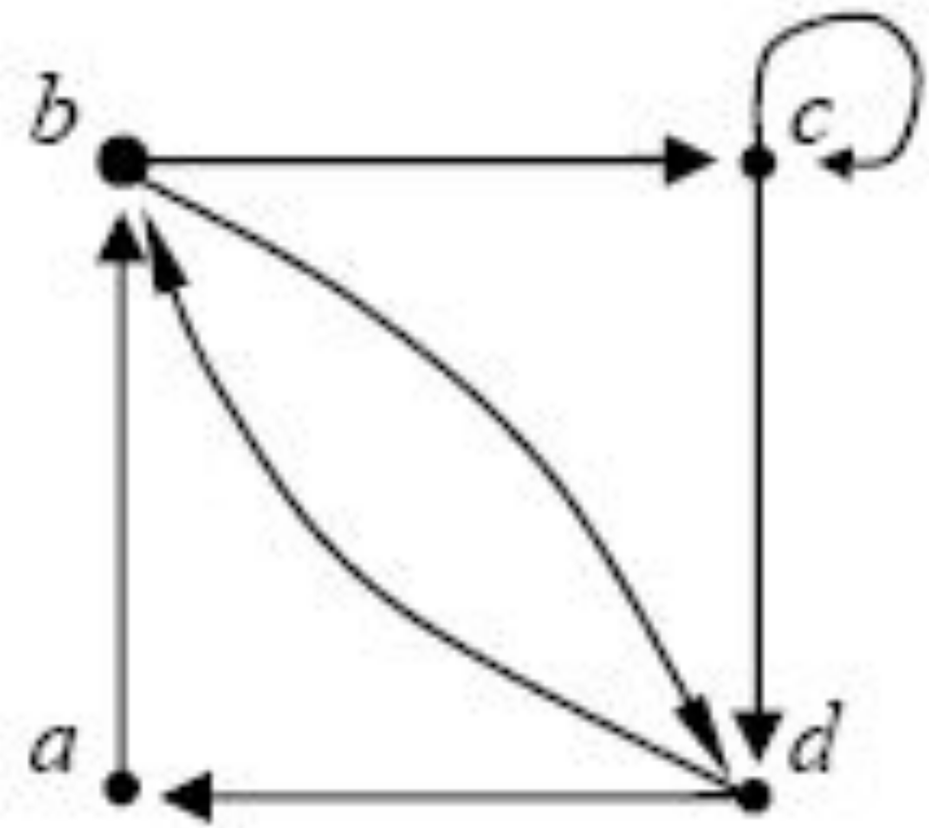
Замечания:

- Граф – это мультиграф, у которого кратность каждого ребра равна единице.
- В графе две вершины могут быть соединены не более чем одним ребром.
- В мультиграфе две вершины могут быть соединены более чем одним ребром.

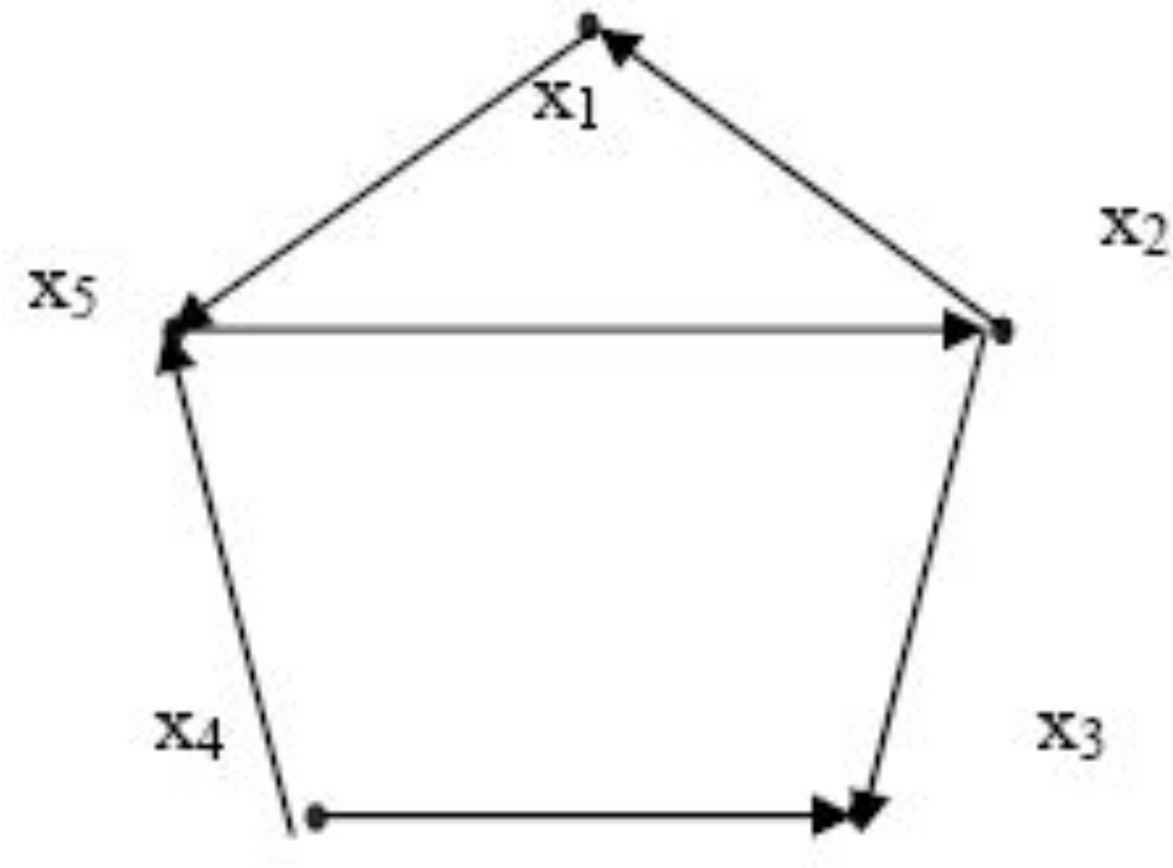
Если каждая вершина графа отмечена, то граф называется **размеченным.**



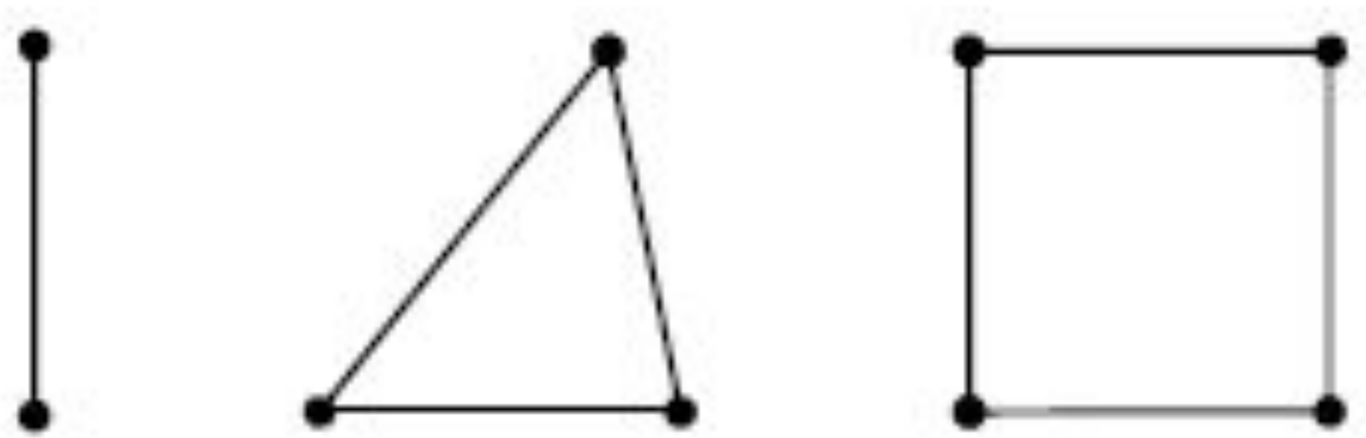
Псевдограф **–** граф в котором допускается как наличие петель, так и существование более одного ребра между двумя вершинами.



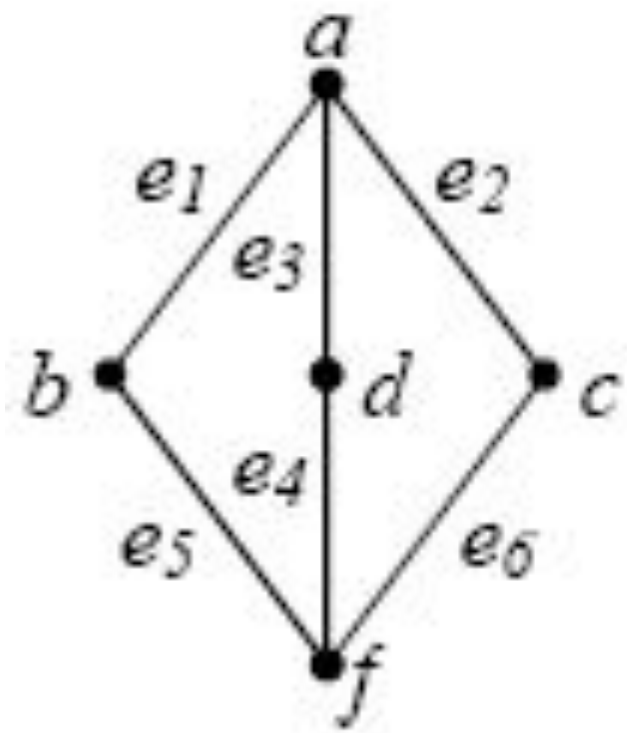
Обыкновенный (простой) граф – граф без петель и кратных ребер



Граф называется **полным,** если любые его две вершины соединены ребром.



- ***Степенью*** вершины v, обозначается $\deg(v)$, называется количество ребер, инцидентных этой вершине.
- Вершина степени 0 называется ***изолированной*.**
- Вершина степени 1 называется ***висячей или концевой.***
- Ребро, инцидентное концевой вершине, также называется ***концевым***.



- Смежные вершины: a и c; c и f; f и b; b и a; a и d; d и f.
- Смежные ребра: *e*1, *e*2 и *e*3; e2 и e6; *e*6, *e*4 и *e*5; e5 и e1; e3 и e4.
- Вершины *a* и *f* смежными не являются.
- *e*2 и *e*5 не являются смежными ребрами.
- Вершины *b*, *c*, *d* имеют степень 2, вершины *a* и *f* имеют степень 3.

<u>Лемма о рукопожатии.</u>

Сумма степеней всех вершин графа

есть четное число.

- ***Доказательство.***

  Каждое ребро графа имеет два конца, следовательно, степень каждого конца увеличивается на 1 за счет одного ребра.

Таким образом, в сумму степеней всех вершин каждое ребро вносит 2 единицы, поэтому сумма должна в два раза превышать число ребер.

Следовательно, сумма является четным числом.

Следствие.

В любом графе количество вершин нечетной степени четно.

Граф $G'(V', E')$ называется *подграфом* графа $G(V, E)$,

обозначается $G'(V', E') \prec G(V, E)$, если $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$.

Таким образом, каждая вершина в G' является вершиной в G, и каждое ребро в G' является ребром в G.

Всякий подграф может быть получен из графа удалением некоторых вершин и ребер.

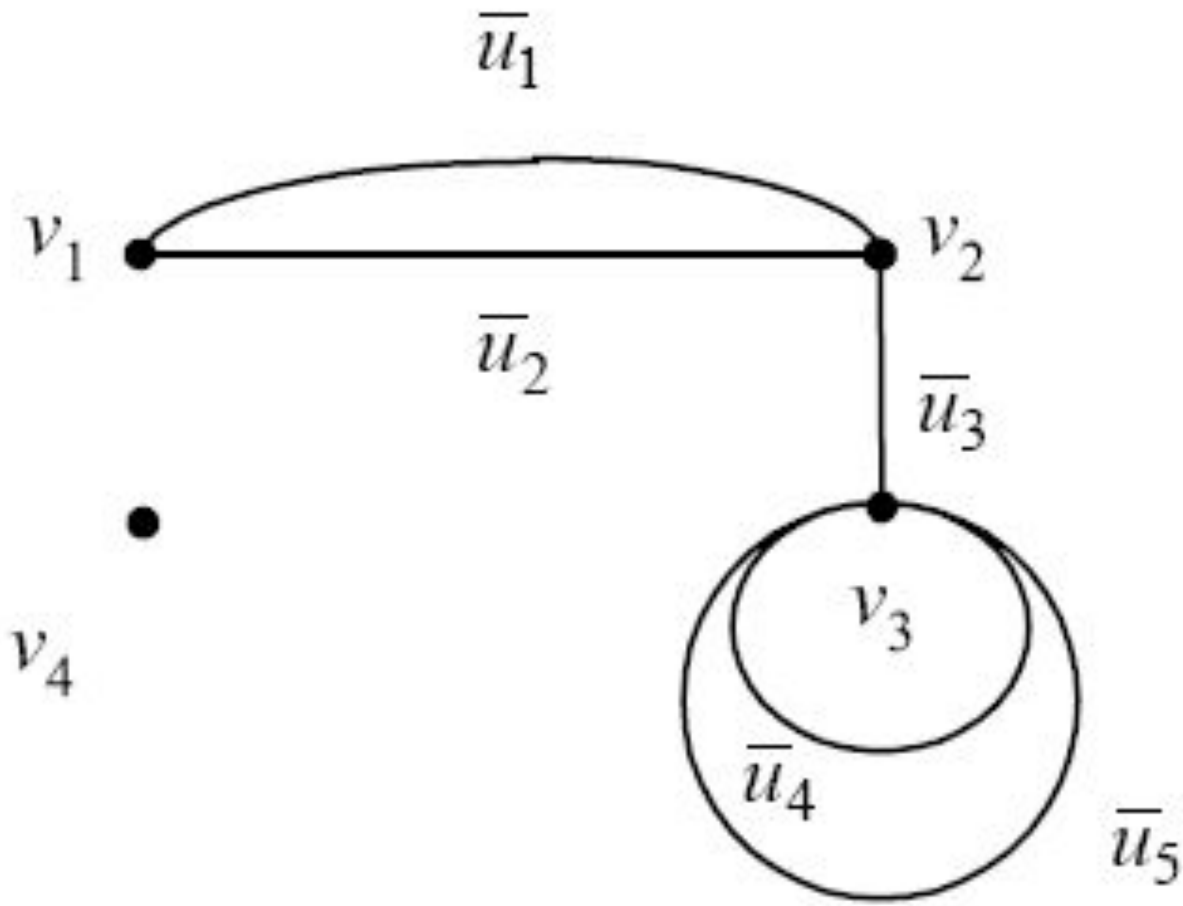
Суграфом графа G называется граф ,

$$G` = (V, \overline{U`})$$

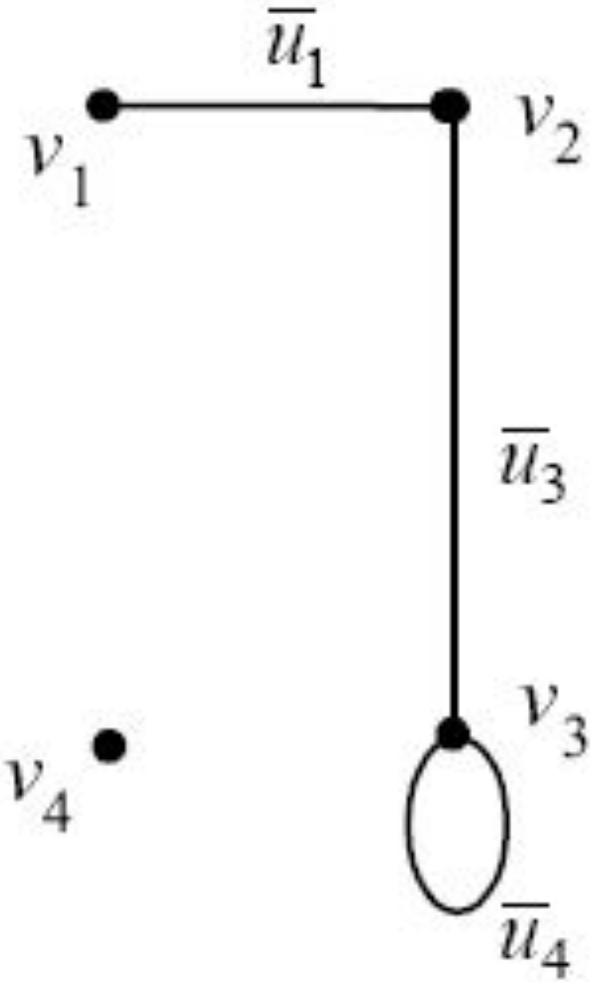
где ,

$$\overline{U`} \subset \overline{U}$$

т.е. суграф получается из исходного графа путем удаления некоторого числа ребер (с сохранением вершин).

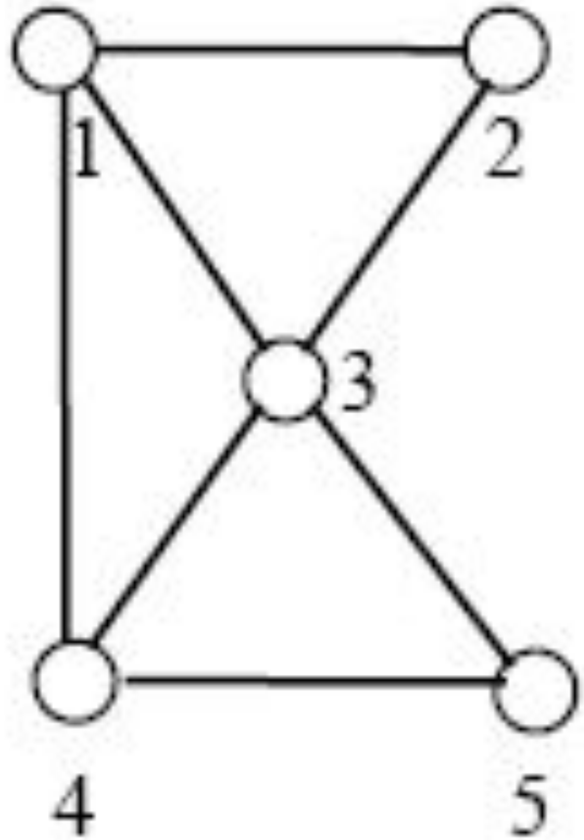


$\overline{u}_1$
v_1
v_2
$\overline{u}_2$
$\overline{u}_3$
v_3
v_4
$\overline{u}_4$
$\overline{u}_5$

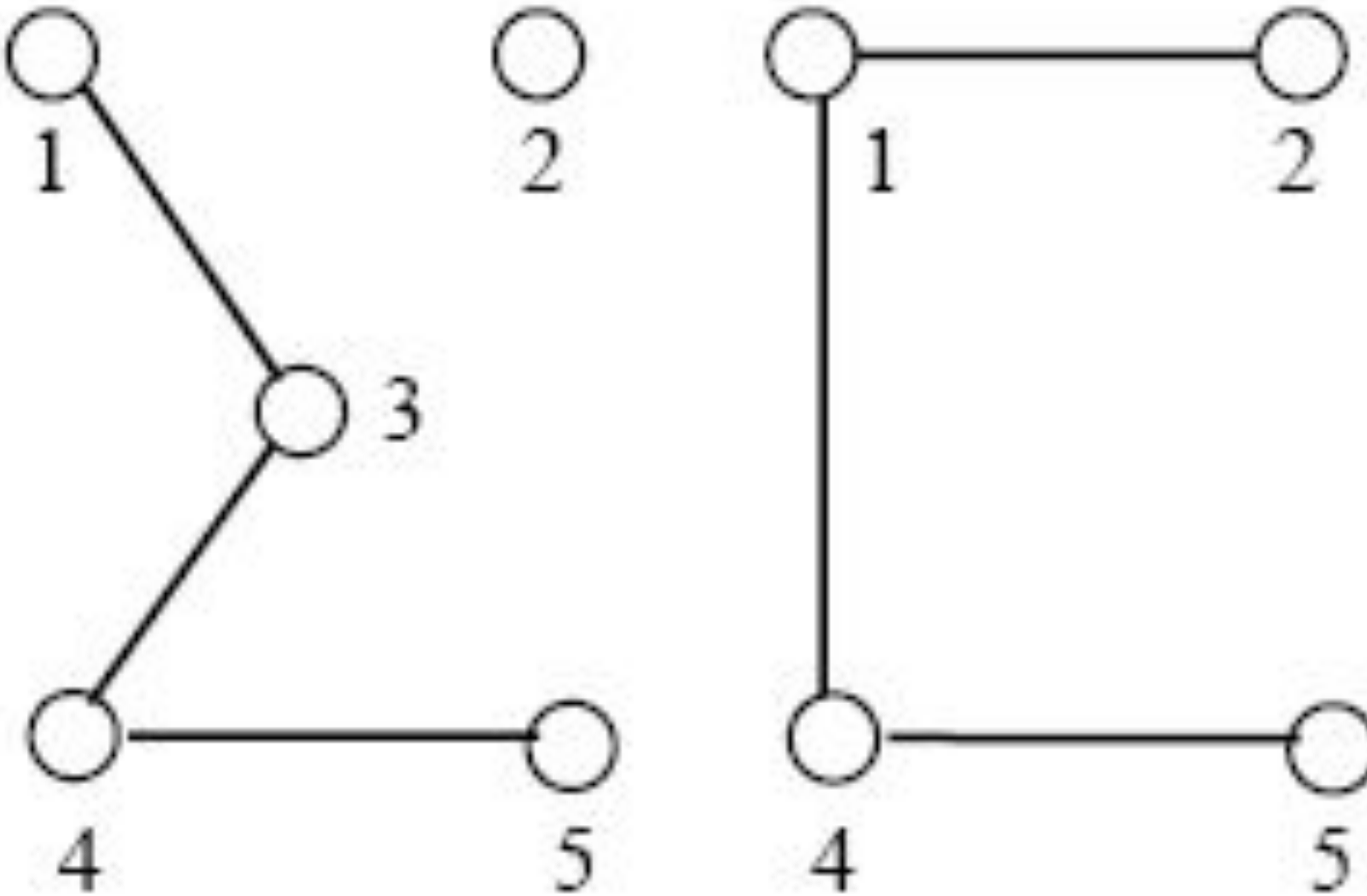


$\overline{u}_1$
v_1
v_2
$\overline{u}_3$
v_3
v_4
$\overline{u}_4$

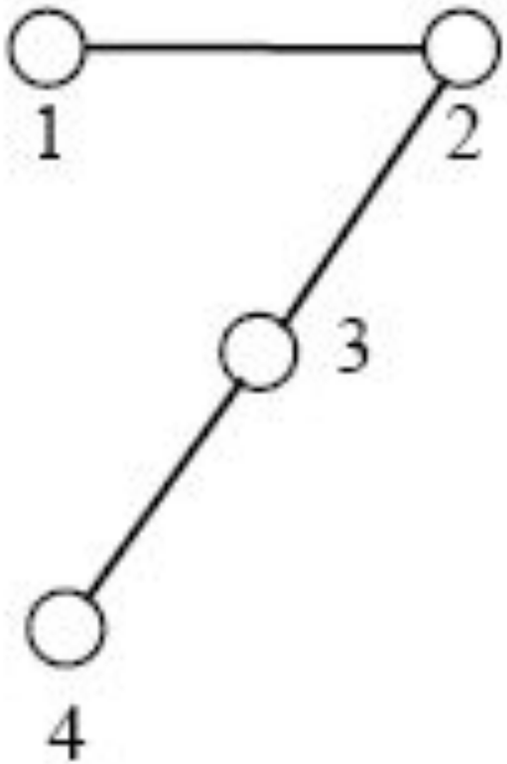
Пример



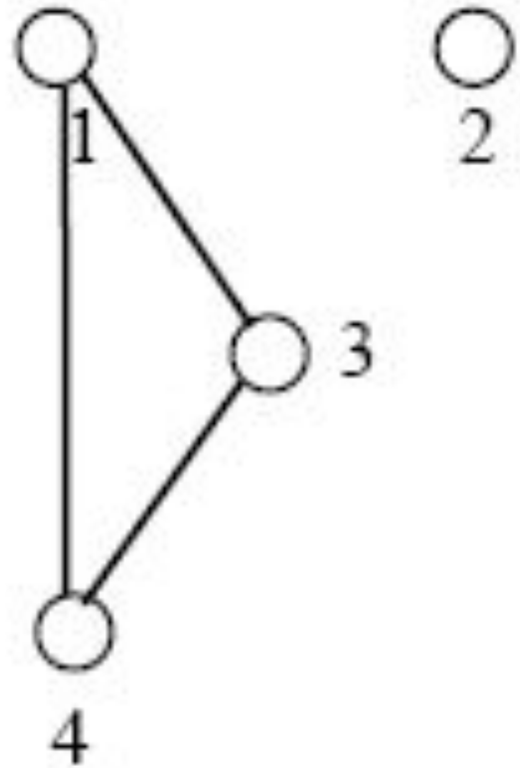
G



G_1 G_2

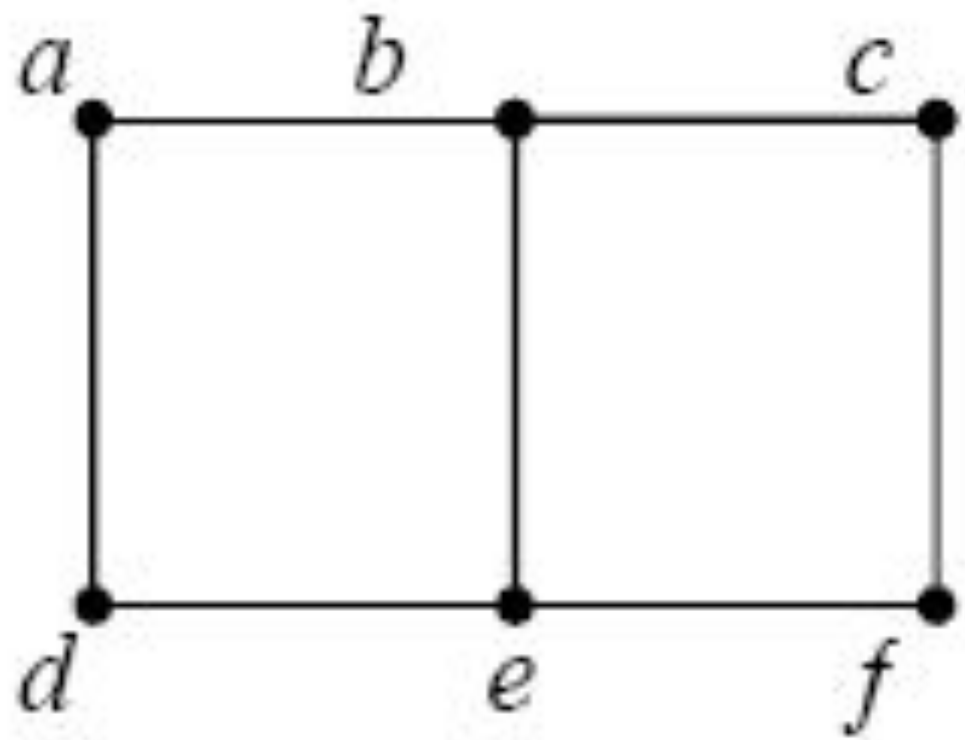


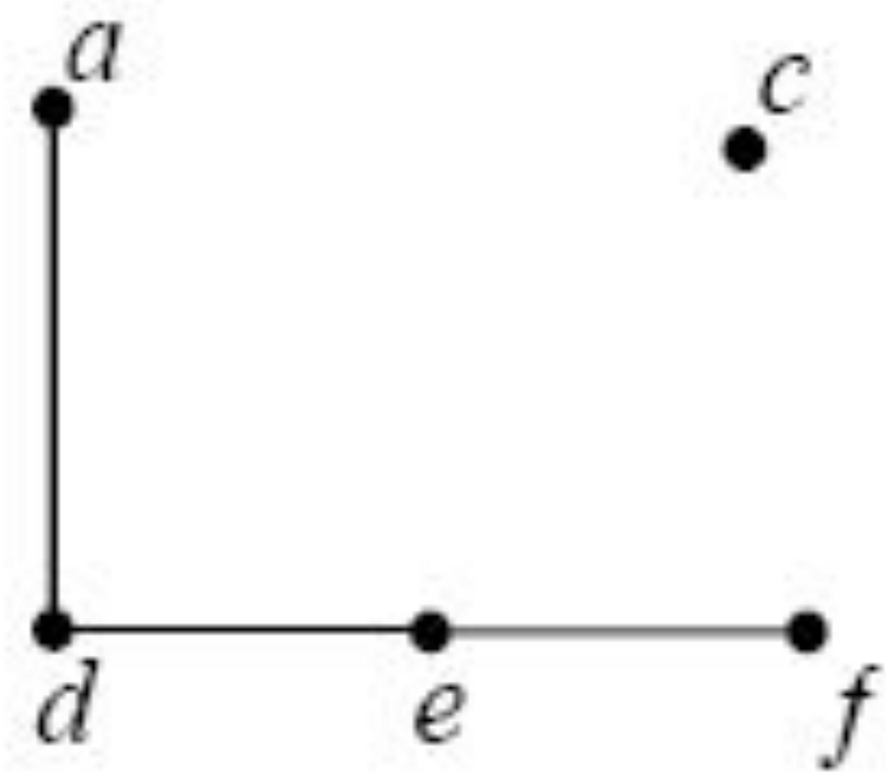
G_3



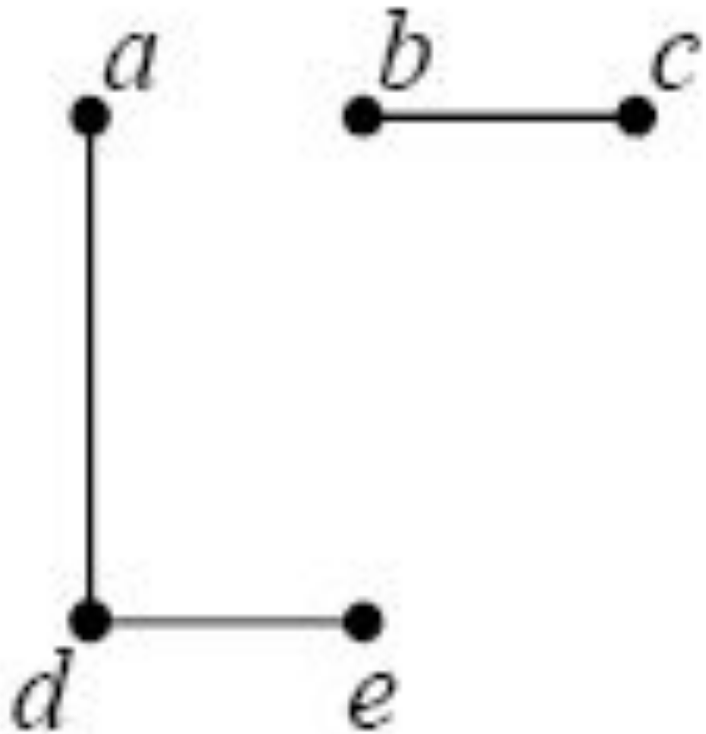
G_4

Пример





a
c
d
e
f



a
b
c
d
e