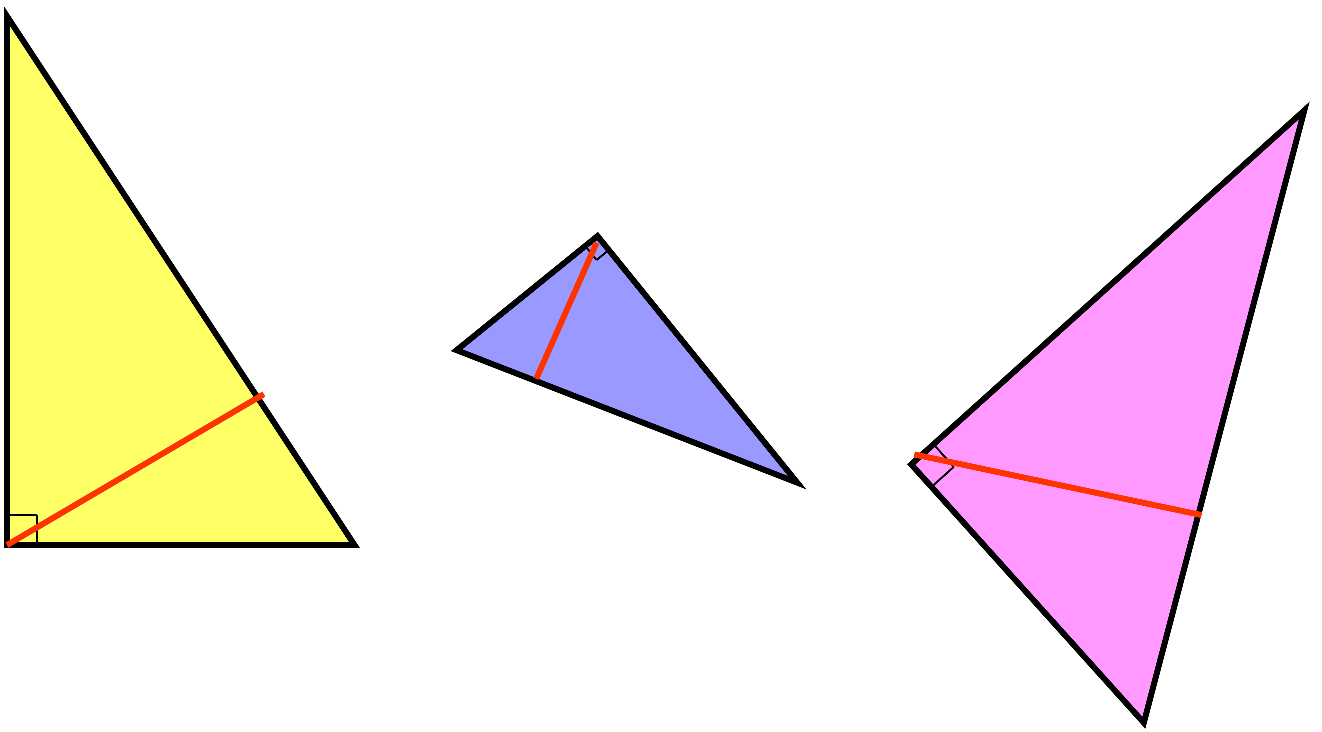
Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике



Определение: отрезок **x** называется средним пропорциональным или средним геометрическим между двумя отрезками **а** и **в**, если **а** : **х** = **х** : **в.**

Например, отрезок длиной 6 см является средним пропорциональным между отрезками с длинами 9 см и 4 см, т.к. 9 : 6 = 6 : 4.

Равенство $а : х = х : в$ **можно записать в виде** $x^2 = ав$

или в виде $x = \sqrt{ав}$

х – среднее геометрическое между **а** и **в**

Реши задачи:

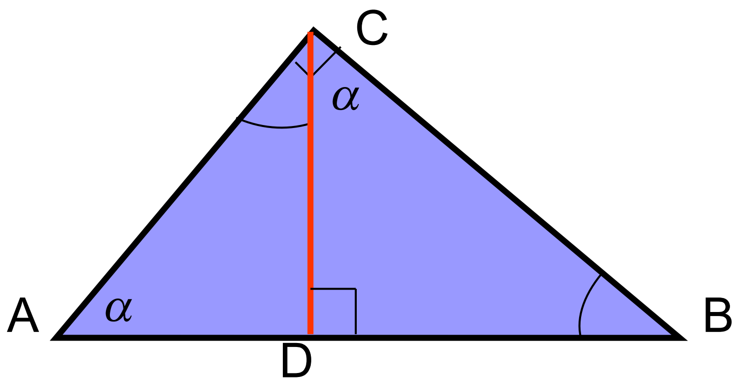
1. Является ли отрезок длиной 8 см средним пропорциональным между отрезками с длинами 16 см и 4 см ? **да**

2. Является ли отрезок длиной 9 см средним пропорциональным между отрезками с длинами 15 см и 6 см ? **нет**

3. Является ли отрезок длиной $2\sqrt{5}$ см средним пропорциональным между отрезками с длинами 5 см и 4 см ? **да**

Важное свойство.

Высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, разделяет треугольник на два подобных прямоугольных треугольника, каждый из которых подобен данному треугольнику.



Дано: $\triangle ABC$, $\angle ACB = 90^0$,
$CD \perp AB$.

Доказать: $\triangle$ ACD и $\triangle$ CBD подобны,
$\triangle$ ACD и $\triangle$ ABC подобны,
$\triangle$ CBD и $\triangle$ ABC подобны.

Доказательство:

Пусть $\angle A = \alpha$, тогда $\angle B = 90^0 - \alpha$,

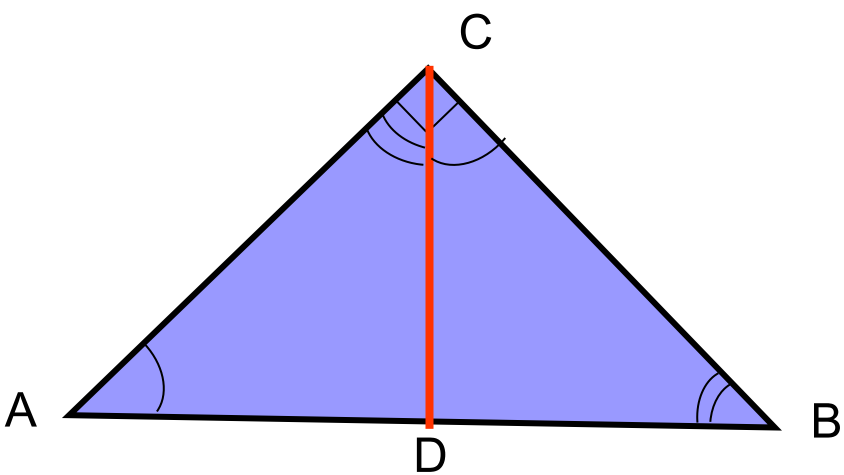
$\angle ACD = 90^0 - \alpha$, $\angle BCD = 90^0 - (90^0 - \alpha) = \alpha$.

Итак, прямоугольные треугольники ΔACD и ΔCBD подобны, т.к. $\angle A = \angle BCD$,

прямоугольные треугольники ACD и ABC подобны, т.к. $\angle A$ - общий,

прямоугольные треугольники CBD и ABC подобны, т.к. $\angle B$ – общий.

Свойство 1. Высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное между отрезками, на которые делится гипотенуза этой высотой.



Дано: $\triangle ABC$, $\angle ACB = 90^0$,
$CD \perp AB$.

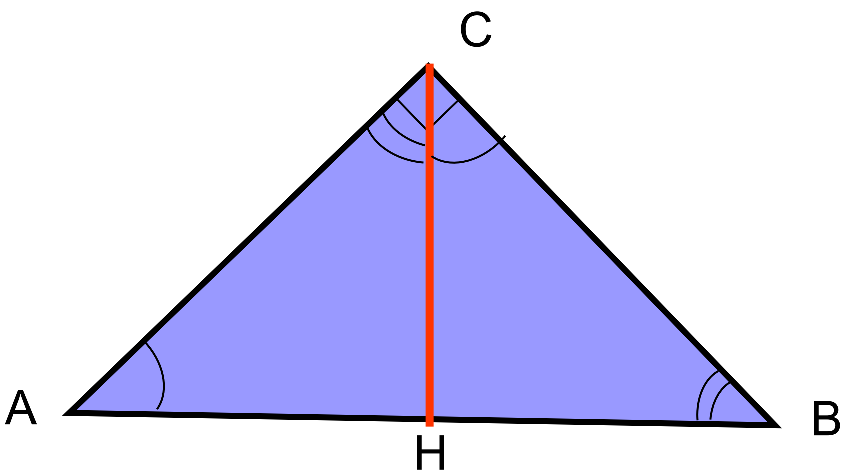
Доказать: $CD = \sqrt{AD \cdot DB}$

Доказательство:

По доказанному $\triangle ACH$ и $\triangle CBH$ подобны, значит, сходственные стороны пропорциональны:

$$\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{DB}$$, следовательно, $CD^2 = AD \cdot DB$, т. е. $CD = \sqrt{AD \cdot DB}$

Свойство 2. Катет прямоугольного треугольника есть среднее пропорциональное между гипотенузой и отрезком гипотенузы, заключённым между катетом и высотой, проведённой из вершины прямого угла.



Дано: $\triangle ABC$, $\angle ACB = 90^0$,
$CH \perp AB$

Доказать: $AC = \sqrt{AB \cdot AH}$

$BC = \sqrt{AB \cdot BH}$

Доказательство:

По доказанному $\triangle ACH$ и $\triangle ABC$ подобны, значит, сходственные стороны пропорциональны:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AH}$$

Значит, $AC^2 = AB \cdot AH$, т. е. $AC = \sqrt{AB \cdot AH}$

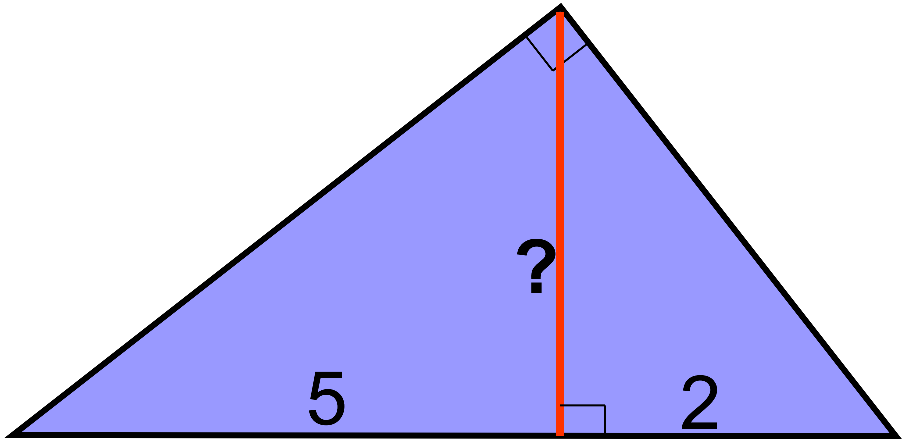
По доказанному $\triangle BCH$ и $\triangle ABC$ подобны, значит, сходственные стороны пропорциональны:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{BH}$$

Значит, $BC^2 = AB \cdot BH$, т. е. $BC = \sqrt{AB \cdot BH}$

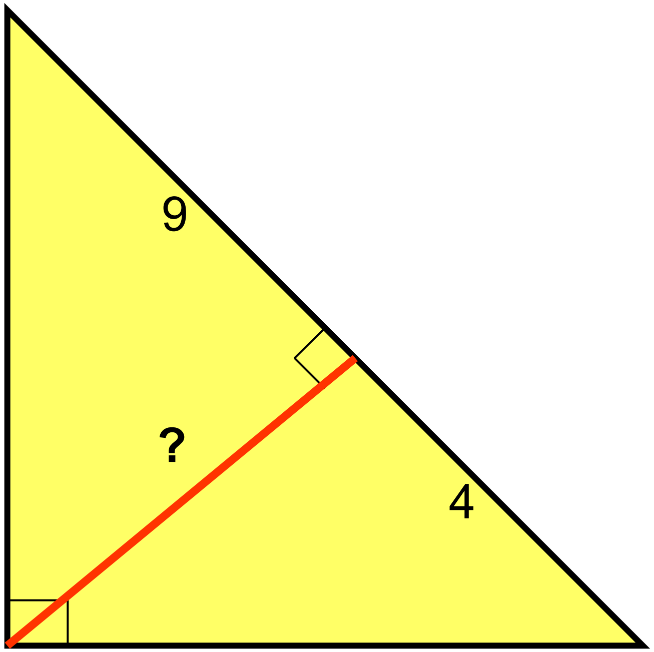
1.

Реши задачу



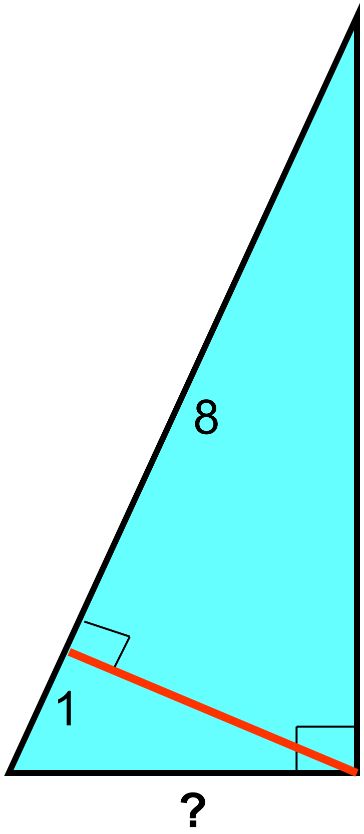
2.

Реши задачу



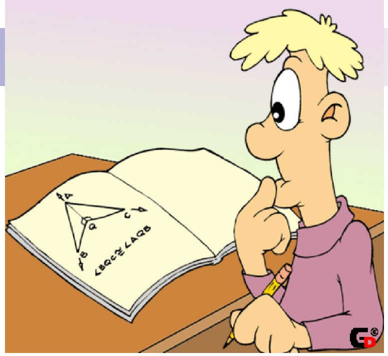
3.

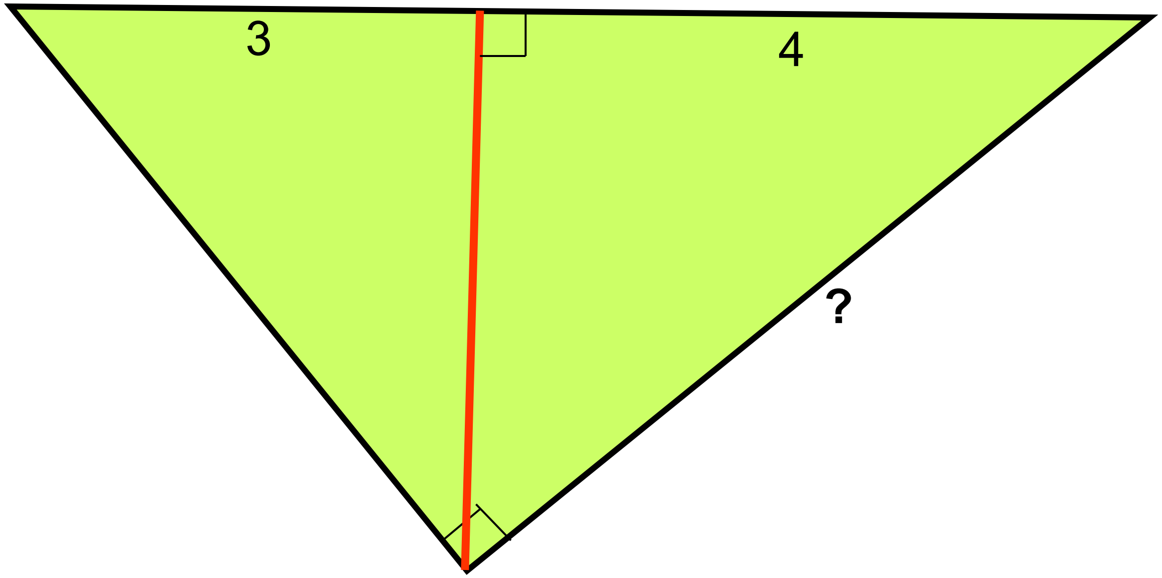
Реши задачу



Реши задачу

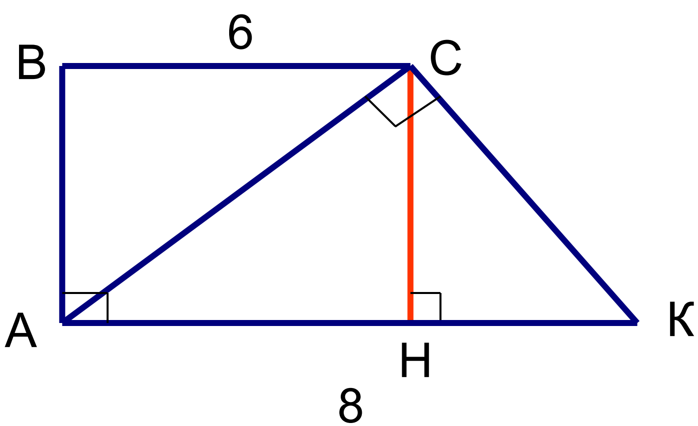
4.





Решение задачи

В трапеции АВСК АВ $\perp$ АК, АС $\perp$ СК, ВС = 6, АК = 8.
Найдите углы трапеции.



Решение:
Проведём СН $\perp$ АК,
т. к. АВСК – трапеция и АВ $\perp$ АК, то АВСН – прямоугольник, АН = ВС = 6,
НК = АК – АН = 8 – 6 = 2.

Т. к. АС $\perp$ СК, то $\triangle$АСК – прямоугольный,
СН – высота, проведённая из вершины прямого угла, значит,

СН = $\sqrt{AH \cdot HK} = \sqrt{6 \cdot 2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

По теореме Пифагора ($\triangle$СНК) СК^2 = СН^2 + НК^2, СК^2 = 12 + 4 = 16, СК = 4.
(2 способ нахождения СК из $\triangle$АСК: СК = $\sqrt{AK \cdot HK} = \sqrt{8 \cdot 2} = \sqrt{16} = 4$)

В прямоугольном треугольнике СНК НК = ½ СК, значит, $\angle$КСН = 30^0,
$\angle$ К = 90^0 – 30^0 = 60^0.

В трапеции АВСК $\angle$ А = $\angle$В = 90^0, $\angle$К = 60^0, $\angle$ ВСК = 180^0 – 60^0 = 120^0.

Ответ: 90^0; 90^0; 120^0; 60^0.