

НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ (РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ГАУССА)

***НЕПРЕРЫВНАЯ СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА
РАСПРЕДЕЛЕНА ПО НОРМАЛЬНОМУ
ЗАКОНУ,***

***ЕСЛИ ЕЕ ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТИ
ИМЕЕТ
СЛЕДУЮЩИЙ ВИД:***

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Здесь

- $\mu = M(X)$ - математическое ожидание,
- $\sigma^2 = D(X)$ - дисперсия,
- $\sigma = \sigma(X)$ – среднеквадратическое отклонение X .

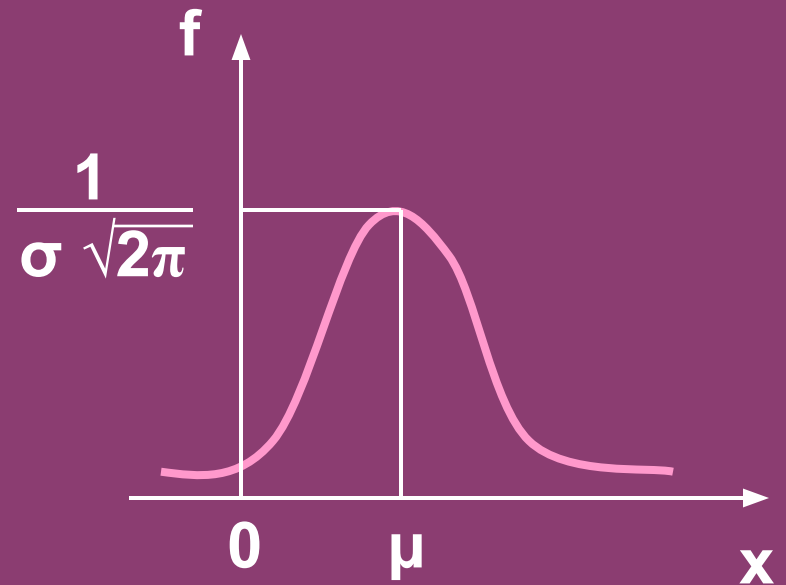
НОРМАЛЬНО
РАСПРЕДЕЛЕННАЯ
ВЕЛИЧИНА

ПОЛНОСТЬЮ
ОПРЕДЕЛЯЕТСЯ
СВОИМИ

μ и σ^2 .

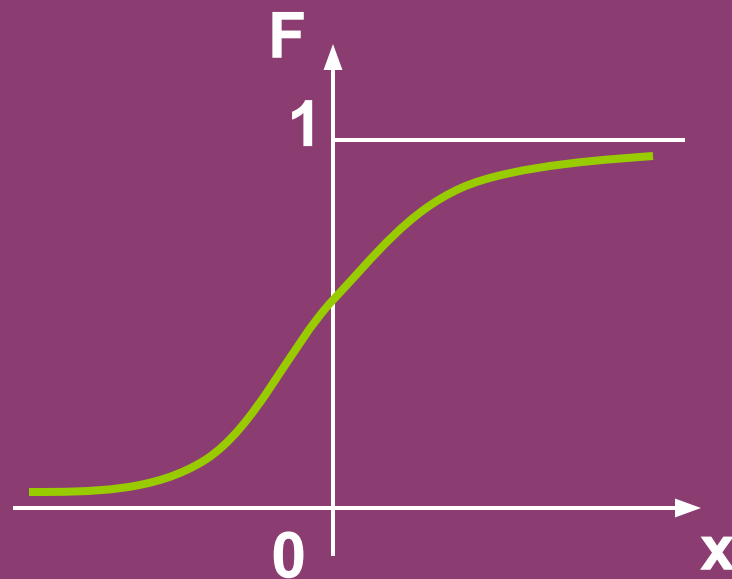
Кривая Гаусса

График плотности
вероятности
нормально
распределенной
величины
носит название
кривой Гаусса:



Интегральная кривая Гаусса

График ее функции
распределения –
интегральная кривая
Гаусса:



Введение нормированной нормальной величины

Для определения вероятности попадания нормальной СВ в некоторый интервал требуется вычисление интеграла от $f(x)$, а этот интеграл не вычисляется в элементарных функциях.

Поэтому из бесконечного множества нормальных величин с разными μ и σ выделяют одну, у которой

$$\mu = 0, \sigma = 1.$$

НОРМИРОВАННАЯ НОРМАЛЬНАЯ ВЕЛИЧИНА

Такая нормальная
величина
называется
нормированной
и обозначается
Т.

Свойства $\Phi(t)$

$$\Phi(-\infty) = 0, \Phi(\infty) = 1$$

$$\Phi(0) = 0,5$$

$$*) \Phi(-t) = 1 - \Phi(t)$$

Плотность вероятности нормированной нормальной величины

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Функция распределения нормированной нормальной величины

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ $\Phi(t)$

- Приближенные значения $\Phi(t)$ для значений аргумента $t \geq 0$ вычислены и указаны в специальной таблице ("*табулированы*").

- Для $t < 0$ значения Φ определяются, исходя из указанного выше свойства *).

Так, $\Phi(-1) = 1 - \Phi(1)$;
 $\Phi(1)$ находим по таблице и подставляем в формулу.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ $F(x)$

Значения функции
распределения $F(x)$
произвольной
нормальной величины
можно определить через
нормированную
путем
СПЕЦИАЛЬНОЙ
ЗАМЕНЫ
ПЕРЕМЕННОЙ:

$$t = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Вероятность попадания значений нормальной величины в произвольный интервал

Для любой нормальной величины
формула имеет следующий вид:

$$P(a < X < b) = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right)$$

Значения Φ находятся по таблице
нормального распределения.

ПРАВИЛО ТРЕХ СИГМ

Вероятность того,
что значения нормальной величины
распределятся в окрестности ϵ
(« эпсилон »)
ее математического ожидания,
вычисляется по формуле:

$$P(\mu - \varepsilon < X < \mu + \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - 1$$

$$\varepsilon = \sigma$$

Чем больше окрестность
 ε ,
тем выше вероятность
попадания в нее
значений
величины X .

Найдем эту вероятность
при значениях ε ,
кратных σ .

1) Пусть $\varepsilon = \sigma$.

Тогда в правой части
формулы получим:

$$\begin{aligned} 2 \Phi(1) - 1 &= \\ &= 2 \cdot 0,8413 - 1 = \\ &= 0,6826 \\ &\text{(или } 68,26\%). \end{aligned}$$

$$\varepsilon = 2\sigma, \quad \varepsilon = 3\sigma$$

2) $\varepsilon = 2\sigma$.

Аналогичный расчет
дает вероятность

0,9544
(или 95,44%).

3) $\varepsilon = 3\sigma$.

Искомая вероятность

-

0,9972
(или 99,72%) –
близка к 100%).

ПРАВИЛО ТРЕХ СИГМ

*ПРАКТИЧЕСКИ ДОСТОВЕРНО,
ЧТО ВСЕ ЗНАЧЕНИЯ
НОРМАЛЬНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ
ВЕЛИЧИНЫ*

*ОКАЖУТСЯ В ОКРЕСТНОСТИ « 3σ »
ЕЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ.*