

Полезные функции Matlab'a

Функции работы с изображениями

- `imshow`
- `imwrite`
- `imread`

Функции конвертации

- Im2bw
- Im2double
- Rgb2gray
- Uint8
- uint16

Функции работы с матрицами

- Max
- Min
- Sum
- Zeros
- Ones
- .* и *
- ./ и /

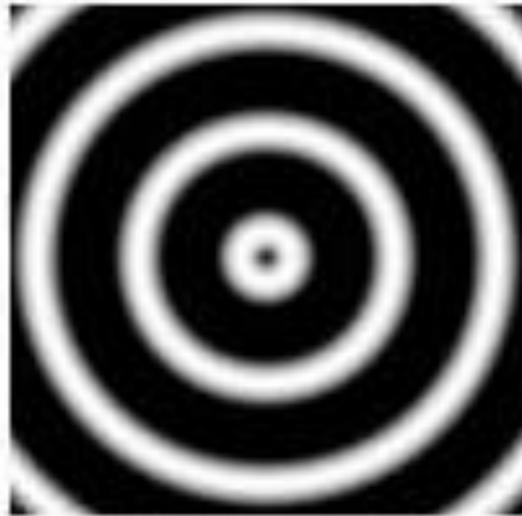
Векторизация

- meshgrid

Общие задания

Вывод сферического волнового фронта

- Задача: вывести на экран картинку сферического (кругового в 2D случае) волнового фронта



Дискретное преобразование Фурье

- Дискретное преобразование Фурье

$$\underline{X_k} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{\frac{-j2\pi kn}{N}}$$

- N – число элементов последовательности (размер массива)
- k – k-ый элемент нового массива
- j – мнимая единица (в матлабе переменная i)

Дискретное преобразование Фурье

- Обратное дискретное преобразование
Фурье

$$\underline{X}_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{\frac{j2\pi kn}{N}}$$

- Поворачивающий множитель

$$W_N^k = e^{\frac{-j2\pi k}{N}}$$

Свойства поворачивающего множителя

- k – степень, а не индекс. Если равен 1, то не записываем

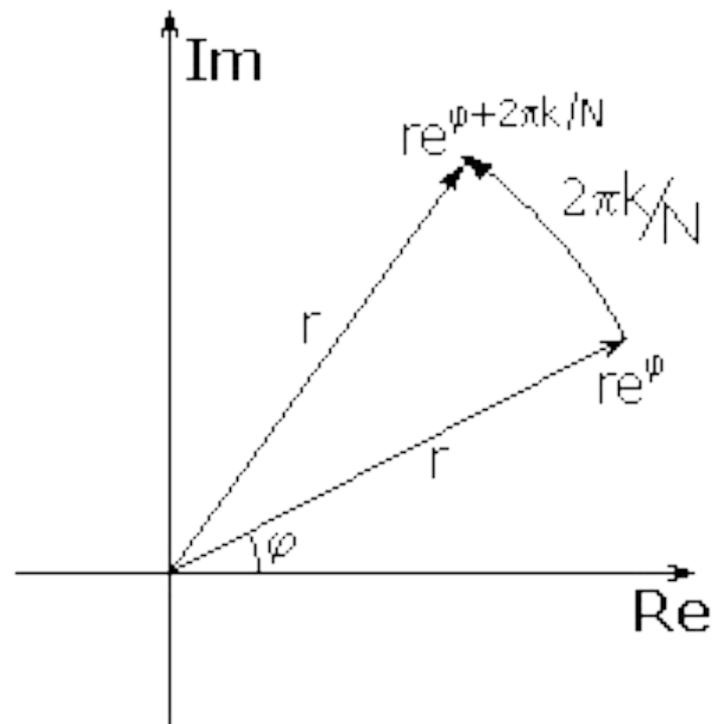
$$W_N = e^{\frac{-j2\pi}{N}}$$

- ДПФ через поворачивающий множитель

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n W_N^{kn}$$

Свойства поворачивающего множителя

- Некоторое комплексное число в показательной форме $re^{i\phi}$
- r – модуль к.ч. (длина вектора)
- ϕ – аргумент (угол поворота)



Свойства поворачивающего множителя

- w_N^k , модуль равен 1, а фаза – $2\pi/N$
- При умножении к.ч. В показательной форме модули перемножаются, а аргументы складываются.
- Тогда, перемножение исходного числа на поворачивающий множитель изменит только угол поворота
- Т.о. геометрический смысл преобразования Фурье состоит в том, чтобы представить N комплексных чисел-векторов из набора $\{x\}$, каждое в виде суммы векторов из набора $\{X\}$, повернутых на углы, кратные $2\pi/N$

Теорема 0

- **Теорема:**
- Если комплексное число представлено в виде $e^{j2\pi N}$, где N - целое, то это число $e^{j2\pi N} = 1$.
- **Доказательство:**
- По формуле Эйлера, и ввиду периодичности синуса и косинуса: $e^{j2\pi N} = \cos(2\pi N) + j \sin(2\pi N) = \cos 0 + j \sin 0 = 1 + j0 = 1$

Теорема 1

- Теорема:
- Величина W_N^{kn} периодична по k и по n с периодом N . То есть, для любых целых l и m выполняется равенство:

$$W_N^{(k+lN)(n+mN)} = W_N^{kn}$$

Теорема 1

- Доказательство:

$$\begin{aligned}
 W_N^{(k+lN)(n+mN)} &= \\
 &= e^{\frac{-j2\pi(k+lN)(n+mN)}{N}} = \\
 &= e^{\frac{-j2\pi(nk+nlN+mkN+mlN^2)}{N}} = \\
 &= e^{\frac{-j2\pi kn}{N}} e^{\frac{-j2\pi(nlN+mkN+mlN^2)}{N}} = \\
 &= e^{\frac{-j2\pi kn}{N}} e^{-j2\pi(nl+mk+mlN)} = \\
 &= e^{\frac{-j2\pi kn}{N}} e^{-j2\pi h}
 \end{aligned}$$

- Величина $-h = -(nl+mk+mlN)$ - целая, так как все множители целые, и все слагаемые целые. Значит, мы можем применить Теорему 0

$$W_N^{(k+lN)(n+mN)} = \dots = e^{\frac{j2\pi kn}{N}} e^{-j2\pi h} = e^{\frac{-j2\pi kn}{N}} = W_N^{kn}$$

Теорема 2

- **Теорема:**
- Для величины справедлива формула:

$$W_N^k = -W_N^{k-N/2}$$

- **Доказательство:**

$$\begin{aligned} -W_N^{k-N/2} &= -e^{\frac{-j2\pi(k-N/2)}{N}} = (-1) e^{\frac{-j2\pi k}{N}} e^{\frac{-j2\pi(-N/2)}{N}} = \\ &= (-1) e^{\frac{-j2\pi k}{N}} e^{j\pi} = (-1) e^{\frac{-j2\pi k}{N}} (-1) = e^{\frac{-j2\pi k}{N}} = W_N^k \end{aligned}$$

Быстрое преобразование Фурье

- **Идея:**

1. Необходимо разделить сумму в формуле ДПФ из N слагаемых на две суммы по $N/2$ слагаемых, и вычислить их по отдельности. Для вычисления каждой из подсумм, надо их тоже разделить на две и т.д.
2. Необходимо повторно использовать уже вычисленные слагаемые.

Быстрое преобразование Фурье

- Применяют:
 1. «Прореживание по времени», когда в первую сумму попадают слагаемые с четными номерами, а во вторую - с нечетными
- ИЛИ**
2. «Прореживание по частоте», когда в первую сумму попадают первые $N/2$ слагаемых, а во вторую - остальные.
- В силу специфики алгоритма приходится применять только N , являющиеся степенями 2.

Теорема 3

- Определим еще две последовательности: $\{x_{[even]}\}$ и $\{x_{[odd]}\}$ через последовательность $\{x\}$ следующим образом:
- $$\begin{aligned} X_{[even]n} &= X_{2n}, \\ X_{[odd]n} &= X_{2n+1}, \end{aligned} \quad (*)$$

 $n = 0, 1, \dots, N/2-1,$
- Пусть к этим последовательностям применены ДПФ и получены результаты в виде двух новых последовательностей $\{X_{[even]}\}$ и $\{X_{[odd]}\}$ по $N/2$ элементов в каждой.
- Утверждается, что элементы последовательности $\{X\}$ можно выразить через элементы последовательностей $\{X_{[even]}\}$ и $\{X_{[odd]}\}$ по формуле:

$$X_k = X_{[even]k} + W_N^k X_{[odd]k}, \quad k = 0, 1, \dots, N/2 - 1$$

$$X_k = X_{[even]k-N/2} - W_N^{k-N/2} X_{[odd]k-N/2}, \quad k = N/2, \dots, N-1 \quad (**)$$

ДПФ для чётных/нечётных

$$X_{[even]k} = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{[even]n} W_{N/2}^{kn}$$

$$k = 0 \dots N/2-1$$

$$X_{[odd]k} = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{[odd]n} W_{N/2}^{kn}$$

$$X_{[even]k-N/2} = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{[even]n} W_{N/2}^{(k-N/2)n}$$

$$k = N/2 \dots N-1$$

$$X_{[odd]k-N/2} = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{[odd]n} W_{N/2}^{(k-N/2)n}$$