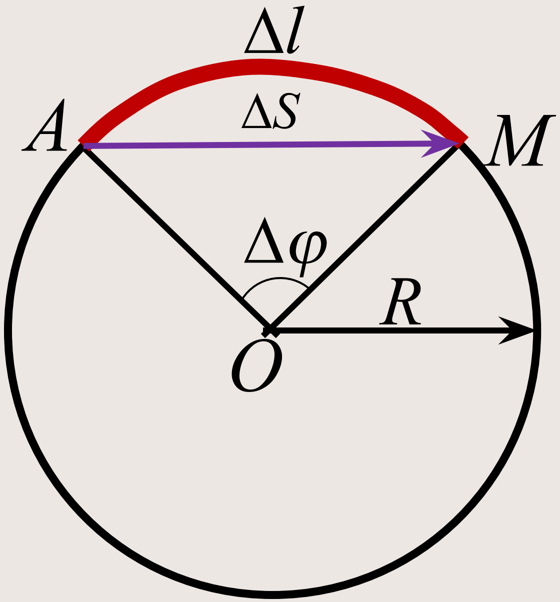
Применение производной в физике

Содержание:

1. Кинематика. *Движение по окружности*
2. Колебание. *Гармонические колебания*
3. Термодинамика. *Теплоемкость тела*
4. Электростатика. *Ток в электрической цепи*
5. ТМФ. *Линейная плотность тела*
6. *Работа и мощность*
7. Закрепление. *Математический кроссворд*

Кинематика. *Движение по окружности*



Точка М движется по окружности.

Уравнение движения точки М по окружности: $\varphi = \varphi(t)$.

Угловая скорость:

$$\omega(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \varphi'(t)$$

Угловое ускорение: $$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \omega'(t) = \varphi''(t)$$

Пример: *Маховик за время t поворачивается на угол* $\varphi(t) = 8t - 0,5t^2$

(t *- в секундах,* φ *-в радианах). Определите угловую скорость в конце 3 секунды. Найти момент, когда прекратиться вращение.*

Решение:

1. Закон изменение угловой скорости:

$$\omega(t) = \varphi'(t) = (8t - 0,5t^2)' = 8 - t; (рад / с)$$

2. Значение угловой скорости в момент времени 3 с:

$$\omega(3) = 8 - 3 = 5(рад / с)$$

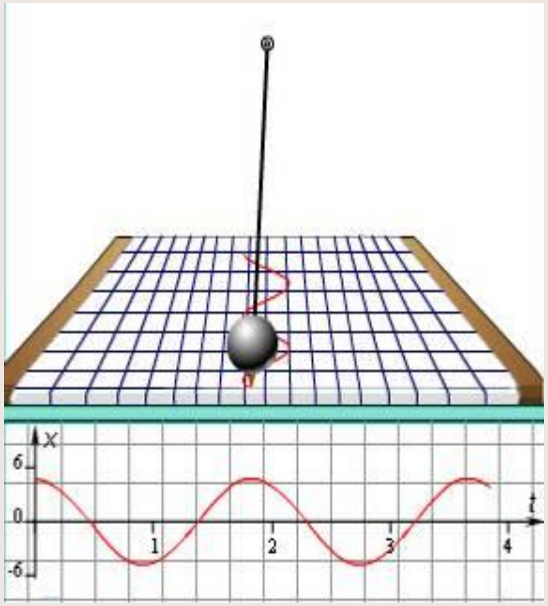
3. Маховик прекращает движение, т.е. $\omega(t) = 0$

$$8 - t = 0$$

$$t = 8(с)$$

Ответ. $5(рад / с); 8(с)$

Колебания. *Гармонические колебания*



Уравнение гармонических колебаний

$$x = x_m \sin(\omega t + \varphi_0)$$

Уравнение скорости колебания

$$v = x'(t) = \left(x_m \sin(\omega t + \varphi_0)\right)' =$$

$$= x_m \cdot \omega \cos(\omega t + \varphi_0) = x_m \cdot \omega \sin(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2})$$

Уравнение ускорения колебания

$$a(t) = v'(t) = \left(v_m \cos(\omega t + \varphi_0)\right)' = \left(x_m \cdot \omega \cos(\omega t + \varphi_0)\right)' =$$

$$= -x_m \cdot \omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) = x_m \cdot \omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0 + \pi)$$

График $x = x(t)$

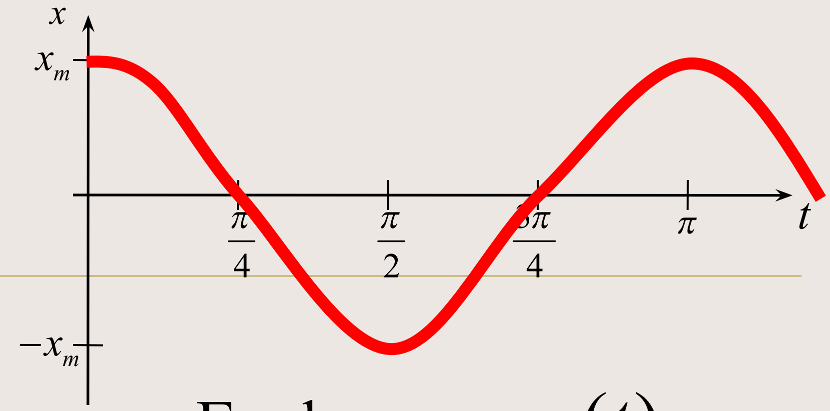
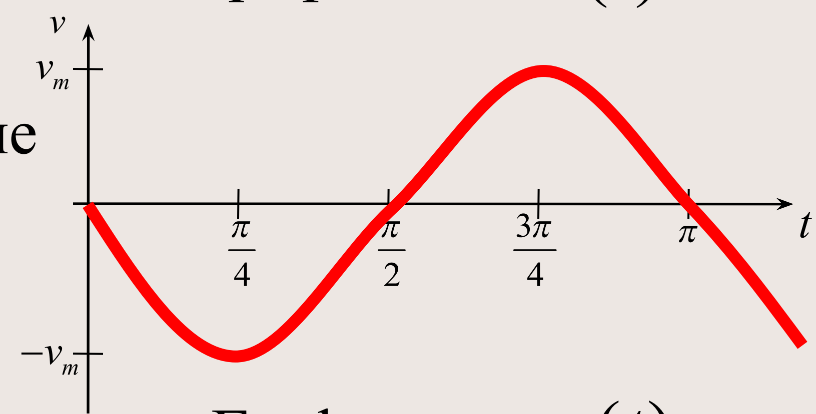


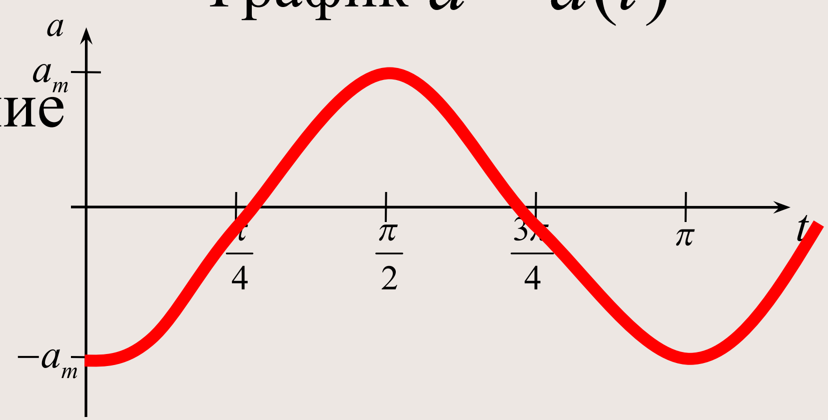
График $v = v(t)$



$$v_{\max} = x_m \cdot \omega$$

Скорость опережает колебание смещения на $\frac{\pi}{2}$

График $a = a(t)$



$$a_{\max} = -x_m \cdot \omega^2$$

Ускорение опережает колебание скорости на $\frac{\pi}{2}$ и колебание смещения на π

Термодинамика. *Теплоемкость тела*

Температура повысилась

$$t_0 \to t$$

Количество теплоты

$$Q(t_0) \to Q(t)$$

Теплоемкость тела

$$c(t) = \lim_{t \to t_0} c_{cp} = \lim_{t \to t_0} \frac{Q(t) - Q(t_0)}{t - t_0} = Q'(t_0)$$

<u>Пример:</u> *Количество теплоты, получаемое некоторым веществом при нагревании его от 0 до Т, определяется по формуле* $Q(t)=0{,}1054t+0{,}000002t^2$ *(Q-в джоулях, t-в кельвинах). Найти теплоемкость этого вещества при 100К.*

<u>Решение:</u>

1. Закон изменение теплоемкости вещества:

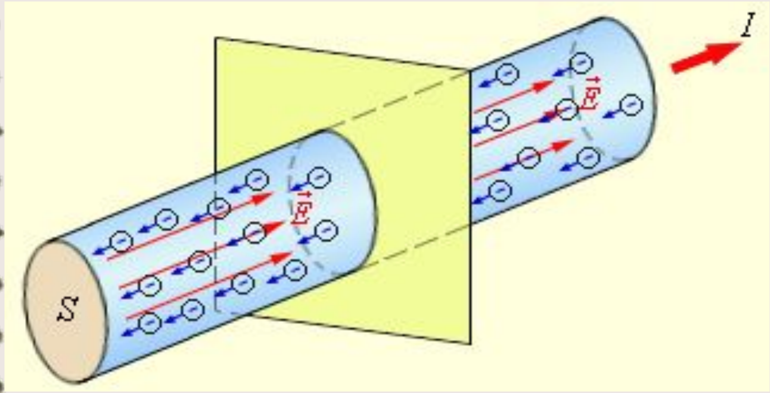
$$c(t)=Q'(t)=(0{,}1054t+0{,}000002t^2)'=0{,}1054+0{,}000004t$$

2. Значение теплоемкости вещества при температуре 100К:

$$c(100K)=0{,}1054+0{,}000004\cdot 100=0{,}1058(Дж/К)$$

Ответ. $0{,}1058\,Дж/К$

Электростатика. Ток в электрической цепи



Количество электричества

$$q = q(t)$$

Характеристика цепи переменного тока – мгновенное значение силы тока в момент времени t:

$$I_{мг} = \lim_{t \to t_0} I_{ср} = \lim_{t \to t_0} \frac{q(t) - q(t_0)}{t - t_0} = q'(t_0)$$

Пример: *В какой момент времени ток в цепи равен нулю, если количество электричества, протекающего через проводник, задается формулой* $q = t - \sqrt{t} + 1$?

Решение:

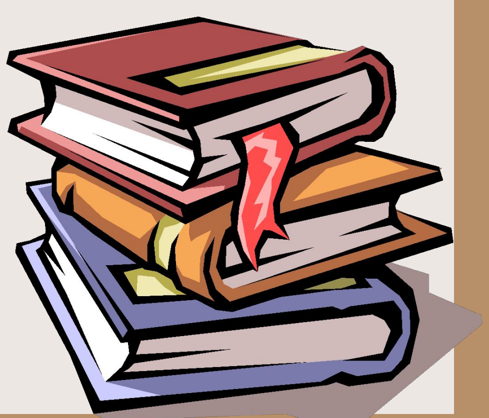
1. Закон изменение силы тока:

$$I(t) = q'(t) = (t - \sqrt{t} + 1)' = 1 - \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

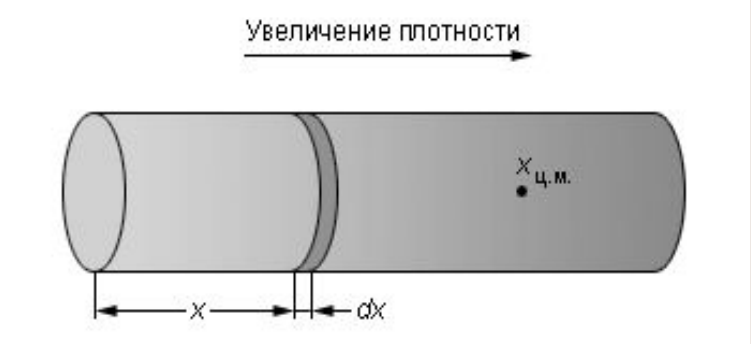
2. По условию I=0, получаем уравнение: $1 - \frac{1}{2\sqrt{t}} = 0$

$$\frac{1}{2\sqrt{t}} = 1; 2\sqrt{t} = 1; \sqrt{t} = \frac{1}{2}; t = \frac{1}{4}$$

Ответ. $0,25c$



ТМФ. *Линейная плотность тела*



Масса стержня есть функция его длины

$$m = m(x), x \in [0; l]$$

Линейная плотность неоднородного стержня

$$\rho(x_0) = \lim_{x \to x_0} \rho_{cp} = \lim_{x \to x_0} \frac{m(x) - m(x_0)}{x - x_0} = m'(x_0)$$

<u>Пример:</u> *Известно, что для любой точки С стержня АВ длиной 20см, отстоящей от точки А на расстоянии l, масса куска стержня АС в граммах определяется по формуле* $m(l)=3l^2+5l$ *. Найдите линейную плотность стержня в середине отрезка АВ.*

<u>Решение:</u>

1. Закон изменение линейной плотности:

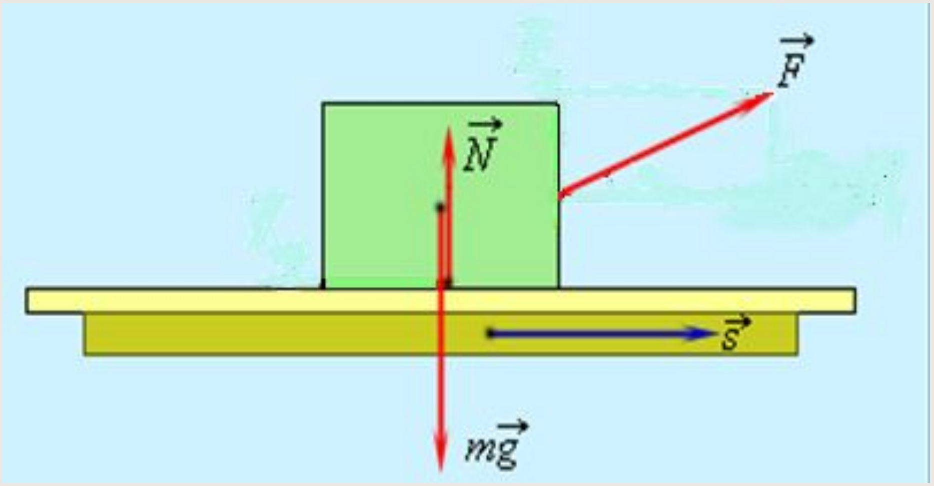
$$\rho(l)=m'(l)=(3l^2+5l)'=6l+5$$

2. Линейная плотность в середине отрезка АВ равна:

$$\rho(10)=6\cdot 10+5=65(г/см)$$

Ответ. $65(г/см)$

Работа и мощность



Если $F = const$

$$\vec{A} = \vec{F} \cdot \vec{s} = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cos\varphi$$

Если $F = F(x)$

$$A_{мгн.} = \lim_{\Delta x \to 0} A_{ср.} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = F'(x)$$

Характеристика работы - мощность

$$N_{мгн.} = \lim_{\Delta t \to 0} N_{ср.} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = A'(t)$$

<u>Пример:</u> *На тело, которое движется прямолинейно, действует сила* $F(x) = x^3 - 3x^2 + 2;(H)$. *Найдите закон, по которому изменяется работа, совершаемое данным телом, и мощность в момент времени 4с.*

<u>*Решение:*</u>

1. *Закон изменение работы:*

$$A(x) = F'(x) = (x^3 - 3x^2 + 2)' = 3x^2 - 6x;(\quad)$$

2. *Закон изменение мощности:*

$$N(t) = A'(t) = (3x^2 - 6x)' = 6x - 6;(\quad)$$

3. *Мощность в момент времени 4с:*

$$N(4) = 6 \cdot 4 - 6 = 18$$

Ответ. $A(x) = 3x^2 - 6x;(\quad)$ $N(4) = 18$

Три задачи:

Точка движется по закону $x(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 + 5t.$

а) выведите формулу для вычисления скорости движения точки в любой момент времени t (t > 0);

б) найдите скорость в момент t = 2c;

в) через сколько секунд после начала движения точка остановится?

Решение задач

а) $V(t) = -t^2 + 4t + 5.$

б) $V(2) = -2^2 + 4 \cdot 2 + 5 = -4 + 8 + 5 =$ **9(м/с).**

в) $V(t) = 0, \quad -t^2 + 4t + 5 = 0, \quad t_1 = -1, \; t_2 = 5,$

$-1 < 0$, *не удовлетворяет условию задачи.*

Точка остановится ***через 5 секунд*** *после начала движения.*

И ещё две задачи:

Материальная точка движется прямолинейно по законy $x(t) = t^3 - 4t^2$.

Перемещение измеряется в метрах.

Найдите:

скорость в момент $t = 5$с;

ускорение в момент $t = 5$с.

Решение задач

Решение.

$V(t) = x'(t) = 3t^2 - 8t$ $\qquad$ $V(5) = 3 \cdot 5^2 - 8 \cdot 5 =$ **35 (м/с).**

$a(t) = x''(t) = 6t - 8;$ $\qquad$ $a(5) = 6 \cdot 5 - 8 =$ **22 (м/с ^{2}).**

Самостоятельно:

Задача 1. Материальная точка движется по прямой по закону $S(t) = 8t - t^3$ Найдите её скорость и ускорение в момент времени $t = 3$.

Задача 2. Точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 4t^3 + 11t^2 + 8$ (x измеряется в метрах, t в секундах).

Напишите формулу для вычисления скорости в любой момент времени и вычислите её при $t = 2$.

Задача 3. Материальная точка движется прямолинейно по закону $S(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 3t^2 + 4t$

где S – путь в метрах, t – время в секундах. Найдите:

а) момент времени t, когда ускорение точки равно 0;

б) скорость, с которой движется точка в этот момент времени.

Закрепление (математический кроссворд)

1. *Расстояние между двумя точками, измеренное вдоль траектории движущегося тела.*

2. *Физическая величина, характеризующая быстроту изменения скорости.*

3. *Одна из основных характеристик движения.*

4. *Немецкий философ, математик, физик, один из создателей математического анализа.*

5. *Наука, изучающая наиболее общие закономерности явлений природы, состав и строение материи, законы ее движения.*

6. *Изменение положения тела в пространстве относительно некоторой системы отсчета с течением времени.*

Закрепление (математический кроссворд)

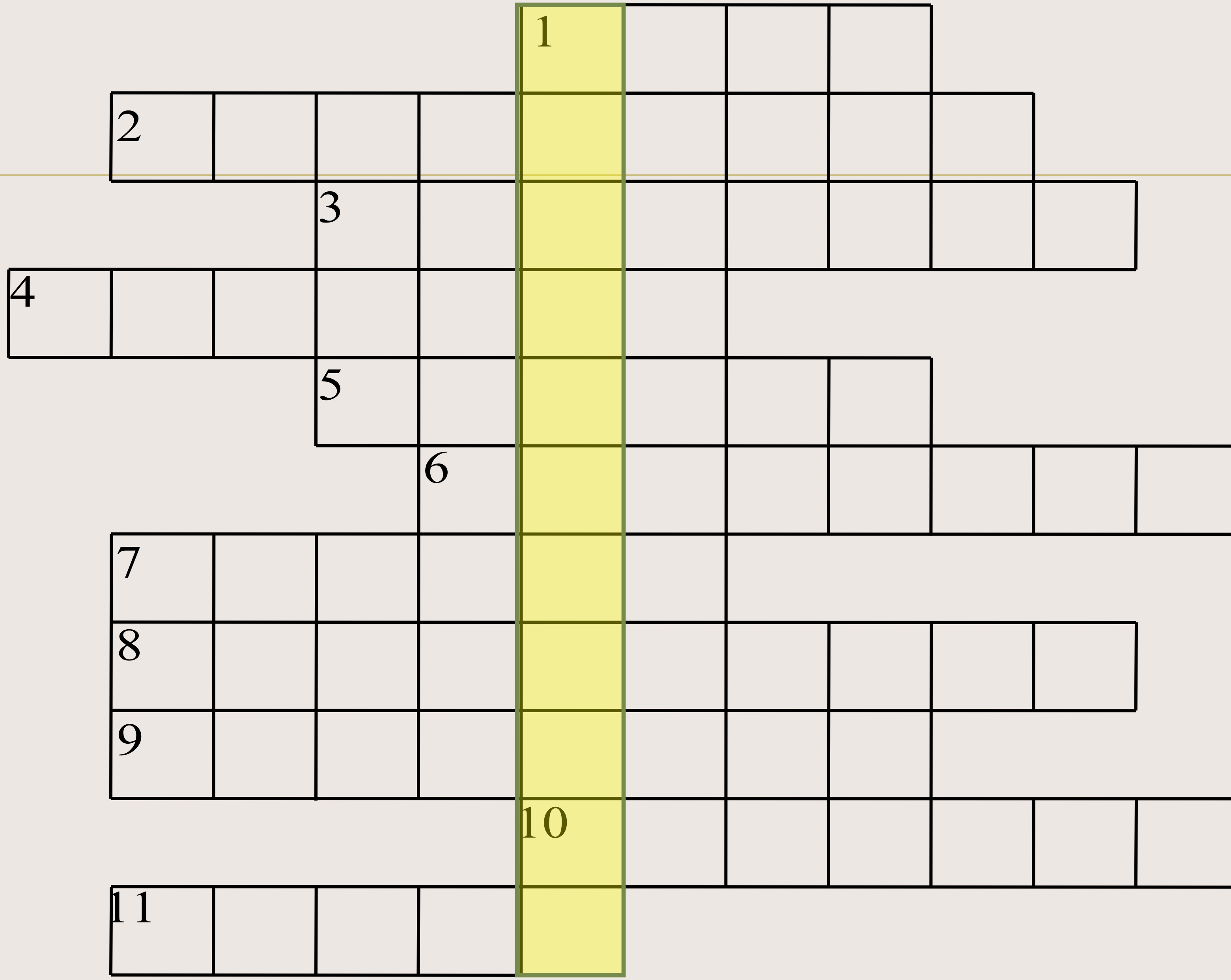
7. *Выдающийся английский физик, именем которого названы основные законы механики.*

8. *Какие величины определяют положение тела в выбранной системе отсчета.*

9. *Физическая теория, устанавливающая закономерности взаимных перемещений тел в пространстве и происходящих при этом взаимодействий.*

10. *Наука, изучающая применение производной в физике.*

11. *То, чего не достает в определении: производная от координаты по _____ есть скорость.*


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11

Заключение

В данной работе показано применение производной в таких разделах физики, как кинематика, термодинамика, электростатика, колебания, теории молекулярной физики не только с теоретической точки зрения, но и с практической, т.е. при решении задач.