ДИСКРЕТНЫЕ СТРУКТУРЫ

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ
ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

ЛЕКЦИЯ 1

Математический факультет. Кафедра математического моделирования

Тема: Основные понятия теории множеств

Цель лекции – изучение основных понятий теории множеств, способов задания множеств, законов алгебры множеств

Содержание:

- Курс «Дискретная математика»: цель, структура
- Теория множеств как раздел дискретной математики
- Понятие множества
- Способы задания множеств
- Отношения принадлежности и включения
- Мощность множества. Пустое и универсальное множества
- Булеан и его мощность
- Операции над множествами
- Законы и тождества алгебры множеств Кантора

Литература

- **Горбатов В.А.** Основы дискретной математики. М.: Высш. шк., 1986. 4-8 с.
- **Лавров И.А., Максимова Л.Л.** Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. 4-10 с.
- **Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский Г.М.** Дискретная математика для инженера. М.: Энергия, 1980. 344 с.
- **Богомолов А.М., Сперанский Д.В.** Аналитические методы в задачах контроля и анализа дискретных устройств. Саратов: Изд-во Саратовкого ун-та, 1986. 240с.
- **Новиков Ф.А.** Дискретная математика для программистов. С.-П., 2001. С. 4-24.
- **Хаханов В.I., Хаханова I.В., Кулак Е.М., Чумаченко С.В.** Методичні вказівки до практичних занять з курсу "Дискретна математика". Харків, ХНУРЕ. 2001. 87с.

Курс «Дискретная математика»: цель, структура

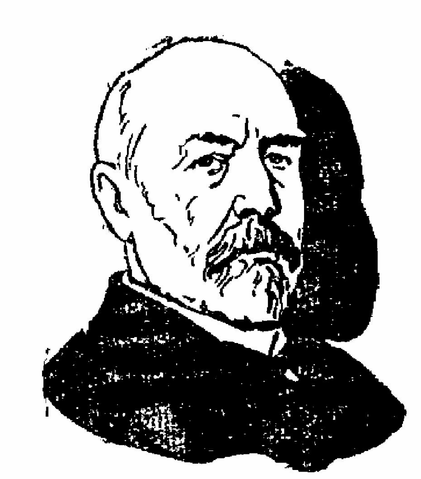
Цель курса – формирование базовых знаний в области ДМ, необходимых для освоения методов анализа и синтеза аппаратных и программных средств цифровых вычислительных систем и сетей различного назначения, изучения теоретической базы информационных технологий, математических способов представления дискретных информационных процессов

Курс «Дискретная математика»: знания, умения, навыки

Знания	**математический аппарат дискретной математики – множества и отношения, операции над ними, графы и операции над ними, формальные правила представления, минимизации и реализации логических функций; комбинаторика в части применения основных формул, методов оптимальных решений и их оценки при рассмотрении типовых задач**
Умения	**формулировать и решать практические задачи разработки программного обеспечения автоматизированных систем, синтеза и анализа цифровых дискретных объектов на основе выбора наиболее рационального математического аппарата дискретной математики с целью ее оптимального решения**
Навыки	**вычисление теоретико-множественных операций, применение операций минимизации и поглощения, составление матриц для графов, правила минимизации булевых функций, определение полноты булевых функций**

Историческая справка

- Немецкий ученый, математик, создатель теории множеств
- Родился в Петербурге в 1845г.
- В 1867 г. окончил Берлинский университет
- В 1872-1913 гг. – профессор университета в Галле
- Сформулировал общее понятие мощности множества (1878)
- Развил принципы сравнения мощностей множеств и
- Систематически изложил принципы своего учения
- Созданная Кантором теория множеств, некоторые идеи которой имелись у его предшественников, послужила причиной общего пересмотра логических основ математики и оказала влияние на всю современную ее структуру.



Георг Кантор (XIX-XXвв.)

Теория множеств как раздел дискретной математики

- *Сегодня мы знаем, что, логически говоря, возможно вывести почти всю современную математику из единого источника – теории множеств*

Н. Бурбаки

Термины

Базовые понятия:

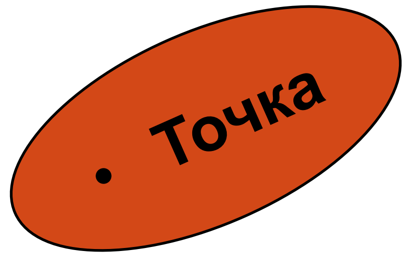
- множество
- элемент
- операции над множествами

Ключевые слова:

- множество
- элемент (объект) множества
- принадлежность
- подмножество
- включение
- мощность
- пустое множество
- универсум
- булеан
- объединение
- пересечение
- дополнение

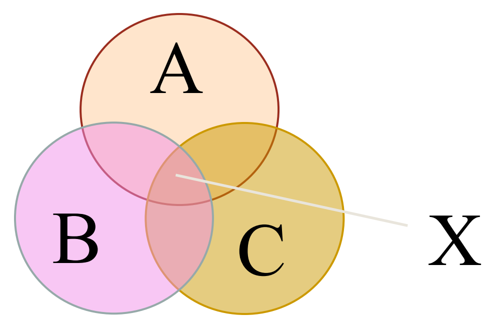
Понятие множества

Множество есть многое,
мыслимое как единое
Г. Кантор



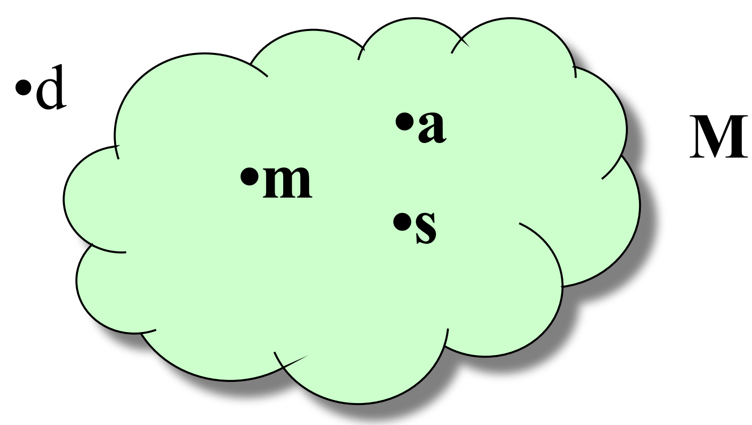
- Множество является **первичным** понятием
- Множество рассматривается как совокупность объектов той или иной природы
- Объекты, которые образуют множество, называются его **элементами**

Некоторые способы задания множеств

Способ	Пример
Перечисление элементов	$\{a,b,c\}$, $A=\{1,3,5,7\}$
Характеристическое свойство $A=\{$а | а, обладающие свойством $Q\}$, $M=\{\ x \mid P(x)\ \}$	$A=\{x \mid x=2k,\ k\in N\}$; $M=\{x \mid \sin x=1\}$
Порождающая процедура (операции над множествами)	$X=(A\cup B)\cap C$
Графически при помощи диаграмм Эйлера	

Отношение принадлежности

- Отношение **принадлежности** устанавливает связь между множеством и его элементами
- Объект принадлежит множеству, если он является его элементом
- Принадлежность элемента x множеству X обозначается при помощи символа ∈: $\mathbf{x \in X}$
- **Пример**



$\mathbf{m \in M}$

$\mathbf{s \in M}$

$\mathbf{a \in M}$

$\mathbf{d \notin M}$

Отношение включения

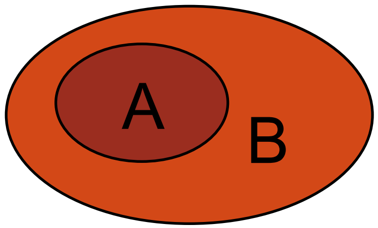
- Устанавливает связь между двумя множествами:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall m \in A \Rightarrow m \in B$$

- Обозначение:

  $\subset$ – строгое включение;

  $\subseteq$ – нестрогое включение
- A – подмножество множества B
- B – надмножество множества A
- Множества равны, если они состоят из одних и тех же элементов



$A \subset B$

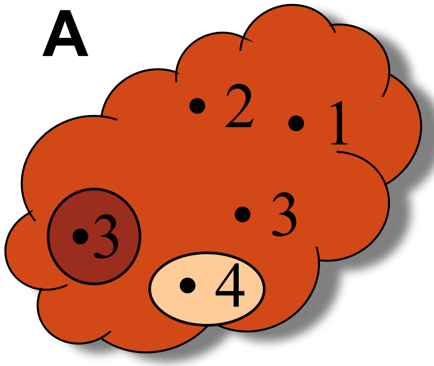
Отношения принадлежности и включения: пример

Дано множество A= {1, 2, 3, {3}, {4} }.

Какие из следующих утверждений верны?

- $2 \in A$ верно, так как в множестве A есть элемент 2;
- $\{1,2\} \subset A$ верно, так как в множестве A есть элементы 1,2, т.е. $1 \in A$, $2 \in A$;
- $3 \in A$ верно, так как в множестве A имеется элемент 3;
- $\{3\} \in A$ верно, поскольку в множестве A есть элемент {3};
- $4 \in A$ – неверно, так как в множестве A нет элемента 4;
- $\{4\} \in A$ – верно, так как в множестве A имеется элемент {4};
- $\{4\} \subset A$ – неверно, поскольку в множестве A нет элемента 4.

A



$2 \in A$

$\{1,2\} \subset A$

$3 \in A$

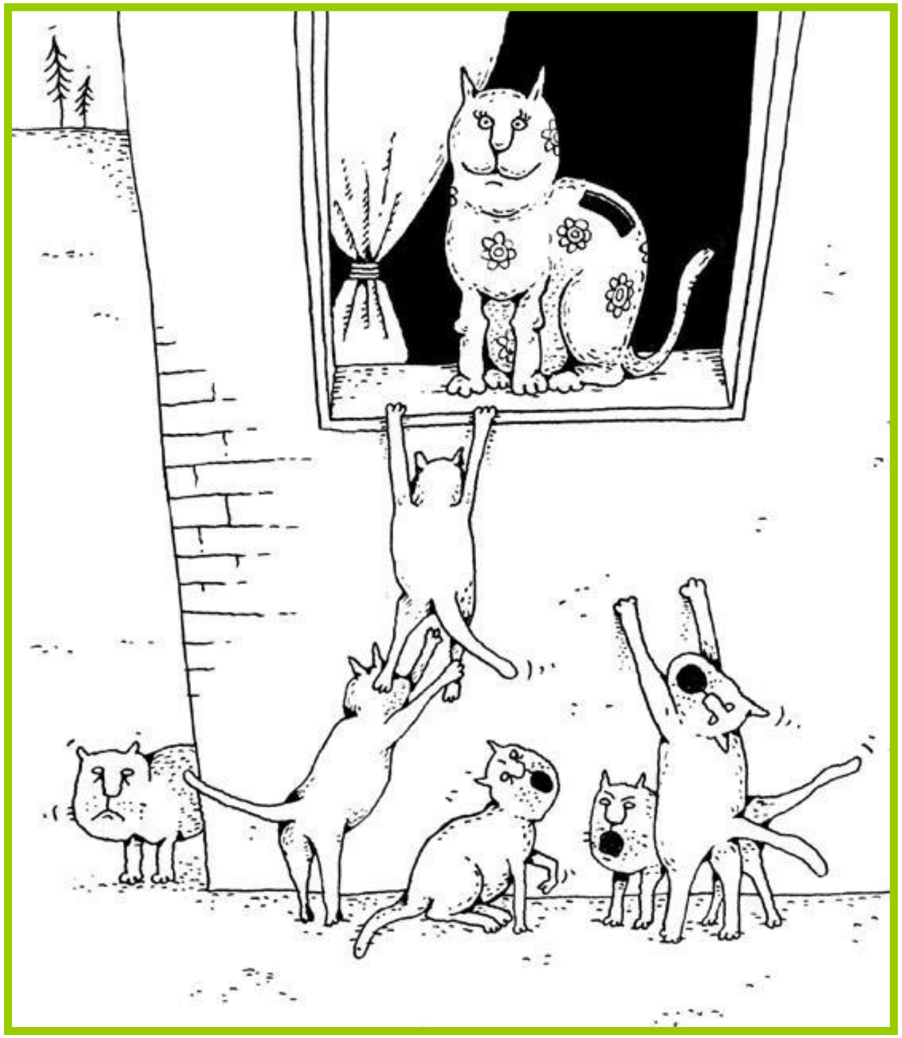
$\{3\} \in A$

$4 \notin A$

$\{4\} \in A$

$\{4\} \not\subset A$

Time Out



Мощность множества.
Пустое и универсальное множества

- **Мощность множества** или **кардинальное число** определяет количество элементов данного множества
- Обозначения: **|M|, card M**
- **Пустое множество** $\varnothing$ не содержит ни одного элемента:

$$|\varnothing|=0$$

- **Универсальное множество U** – надмножество всех множеств:

$$\varnothing \subseteq M \subseteq U$$

Булеан. Мощность булеана

- **Булеан** – множество всех подмножеств данного множества M
- Обозначение: **B(M)**
- **Пример**: дано множество A={a,b,c}. Найти B(A).

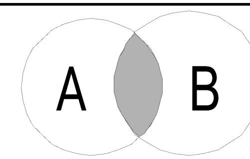
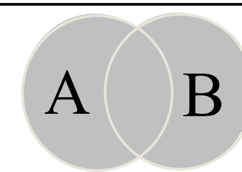
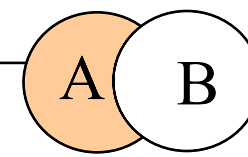
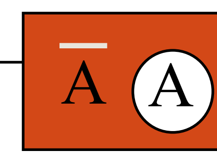
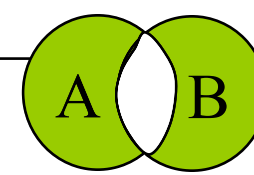
$$B(A)=\{\ \varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\ \}$$

- **Мощность булеана** определяется по формуле:

$$|B(M)|=2^{|M|}$$

- Пустое множество и само множество являются **несобственными** подмножествами множества M
- Остальные подмножества – **собственные**

Операции над множествами

Название операции	Определение	Диаграммы Эйлера
Пересечение	$A\cap B=\{\, x \mid x\in A$ и $x\in B \,\}$	
Объединение	$A\cup B=\{\, x \mid x\in A$ или $x\in B \,\}$	
Разность	$A\setminus B=\{\, x \mid x\in A$ и $x\notin B \,\}$	
Дополнение	$\overline{A}=U\setminus A=\{\, x \mid x\in U$ и $x\notin A \,\}$	
Симметрическая разность	$A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$	

Законы и тождества алгебры множеств Кантора. 1

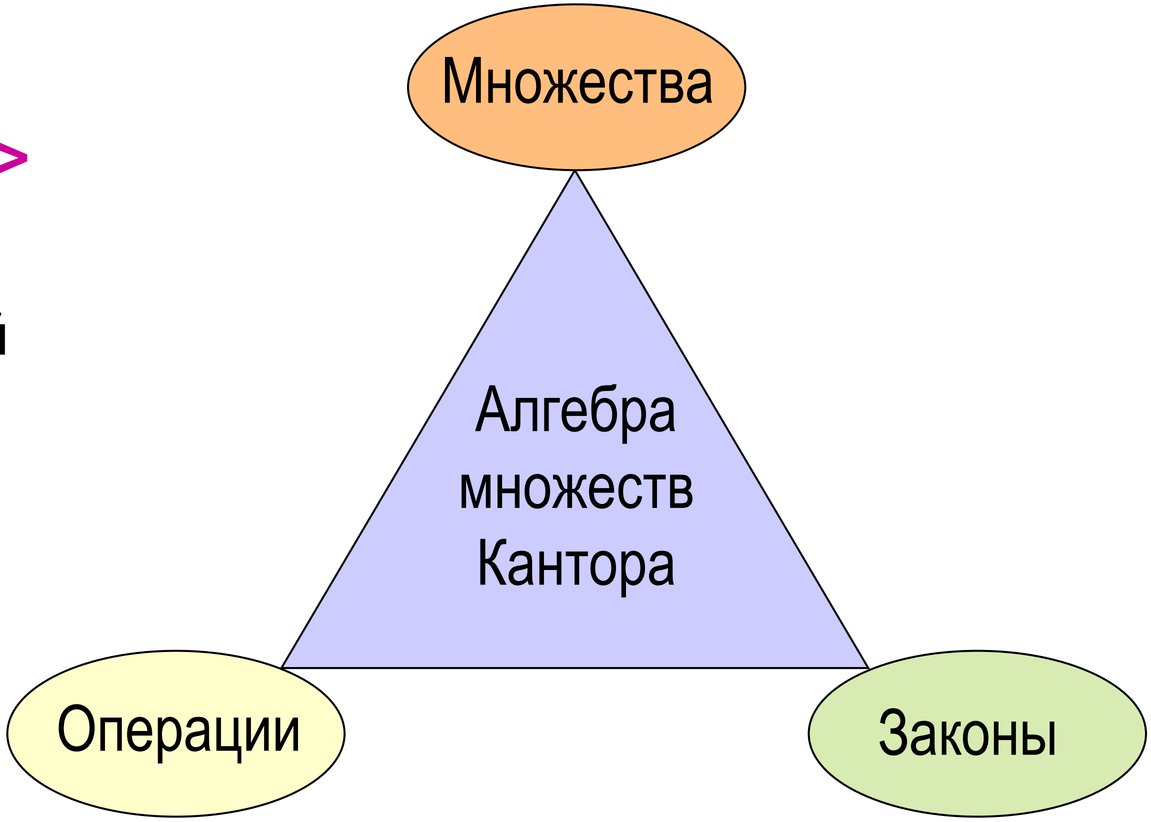
Название	Формула
Коммутативность	$A \cup B = B \cup A,\ A \cap B = B \cap A$
Ассоциативность	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Дистрибутивность	$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
Идемпотентность	$A \cap A = A,\ A \cup A = A$
Действия с константами	$A \cup \varnothing = A,\ A \cap \varnothing = \varnothing,\ A \cup U = U,\ A \cap U = A$
Закон противоречия	$A \cap \overline{A} = \varnothing$
Закон исключенного третьего	$A \cup \overline{A} = U$
Инволюция	$\overline{\overline{A}} = A$

Законы и тождества алгебры множеств Кантора. 2

Название	Формула
Закон де Моргана	$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$, $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$
Элиминация	$(A\cup B)\cap A=A$, $(A\cap B)\cup A=A$
Склеивание	$(A\cup B)\cap(A\cup \overline{B})=A$, $(A\cap B)\cup(A\cap \overline{B})=A$
Законы Блэйка-Порецкого	$A\cap(\overline{A}\cup B)=A\cap B$, $A\cup(\overline{A}\cap B)=A\cup B$ $\overline{A}\cap(A\cup B)=\overline{A}\cap B$, $\overline{A}\cup(A\cap B)=\overline{A}\cup B$
Формулы для определения мощности	$\mid A\cup B\mid = \mid A\mid+\mid B\mid-\mid A\cap B\mid$, $\mid A\cap B\mid = \mid A\mid+\mid B\mid-\mid A\cup B\mid$

Алгебра множеств Кантора. Выводы

- **Алгебра** – совокупность носителя и сигнатуры
- Обозначение: **A=<N, S>**
- Замкнутость относительно операций
- Алгебра множеств Кантора:
  носитель – множества,
  сигнатура – набор операций
  Обозначение: A_k=<N_k, S_k>



Тест-вопросы

1. Могут ли повторяться элементы множества?
а) да; б) нет

2. Является ли множество несобственным подмножеством самого себя?
а) да; б) нет

3. Множества равны, если они содержат
а) одни и те же элементы;
б) одинаковое количество элементов.

4. Являются ли понятия мощность и кардинальное число идентичными?
а) да; б) нет.

5. Определить мощность булеана множества F={a, {d, c} }:
а) |B(F)|= 2;
б) |B(F)|= 4;
в) |B(F)|= 0;
г) |B(F)|= 3.