Тема №8.
Ряды

Совокупность бесконечного числа слагаемых, составленная по некоторому закону, называется рядом.

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

$u_1, u_2, \ldots$ – члены ряда,

u_n – общий член ряда.

$$S_n = u_1 + \ldots + u_n$$

называется n-ой ***частичной суммой*** ряда.

Ряды

Способы задания ряда:

1. Формула *n*-го члена ряда;
2. Задание нескольких последовательных членов ряда;
3. Задание нескольких последовательных частичных сумм ряда.

Числовые ряды

Если членами ряда являются числа, то ряд называется числовым.

Числовой ряд называется ***сходящимся***, если существует конечный предел последовательности его частичных сумм. Этот предел и называется суммой ряда.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

Если этот предел бесконечен или не существует, то ряд называется ***расходящимся***.

Сходящиеся ряды

Свойства сходящихся рядов:

1. Сходимость ряда не нарушится, если все члены ряда умножить на одно и то же число (при это сумма ряда умножится на это число).
2. Сумма и разность двух сходящихся рядов являются сходящимися рядами (при этом сумма нового ряда будет равна сумме или разности сумм этих рядов соответственно).
3. Сходимость не нарушится, если отбросить (или приписать) некоторое конечное число членов (изменится только значение суммы ряда).

Знакопостоянные числовые ряды

Рассмотрим знакопостоянные (для удобства с положительными членами) числовые ряды.

Критерий сходимости. Ряд с положительными членами сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм ограничена сверху.

Необходимый признак сходимости. Если ряд сходится, то предел его общего члена равен нулю.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

Следствие. Если $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд расходится.

Знакопостоянные числовые ряды

Достаточные признаки сходимости:

1. Интегральный признак. Пусть члены искомого ряда являются значениями некоторой непрерывной, монотонно убывающей на $[1;+\infty)$ функции , тогда несобственный интеграл и ряд

$$u_1 = f(1), u_2 = f(2), \ldots, u_n = f(n), \ldots$$

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx, \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ одновременно}$$

или сходятся, или расходятся.

Знакопостоянные числовые ряды

2. Признак Даламбера. Пусть существует предел:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l.$$

Тогда :

если $l<1$, то ряд сходится,

если $l>1$ или бесконечен, то расходится,

если $l=1$, то ?

Знакопостоянные числовые ряды

3. Радикальный (Коши). Пусть существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = l.$$

Тогда :

если $l<1$, то ряд сходится,

если $l>1$ или бесконечен, то расходится,

если $l=1$, то ?

Знакопостоянные числовые ряды

4. Признак сравнения рядов. Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ - ряд, исследуемый на сходимость, а $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ - ряд, информация о сходимости или расходимости которого нам известна. Тогда, если:

1) $u_n \le v_n$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ – сходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ тоже сходится;

2) $u_n \ge v_n$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ – расходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ тоже расходится.

Знакопостоянные числовые ряды

5. Предельный признак сравнения. Пусть

даны два ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$, и существует,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_v}=Const\neq 0$$

Тогда оба ряда одновременно или сходятся, или расходятся.

Задача

Пример. Исследовать сходимость ряда

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$$

Задача

Решение.

$$u_n = \frac{1}{n}; \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \to +\infty} \ln x \Big|_1^b =$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \left(\ln b - \ln 1 \right) = \infty$$

Исходный ряд расходится. Этот ряд называется ***гармоническим***.

Знакопостоянные числовые ряды

Ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ называется обобщённым гармоническим рядом. Из интегрального признака следует:

при $p > 1$ ряд сходится,

при $p \le 1$ ряд расходится.

Задача

Пример. Исследовать сходимость ряда

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots$$

Задача

Решение.

$$u_n = \frac{1}{3^{n-1}}, u_{n+1} = \frac{1}{3^n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3^{n-1}}{3^n} = \frac{1}{3} < 1 - \text{ряд сходится.}$$

Любая бесконечно убывающая геометрическая прогрессия является сходящимся рядом.

Задача

Пример. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{10}{1}+\frac{100}{1\cdot 2}+\frac{1000}{1\cdot 2\cdot 3}+\dots$$

Задача

Решение.

$$u_n = \frac{10^n}{n!}, u_{n+1} = \frac{10^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{10^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\cdot 10^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{10}{n+1} = 0 < 1$$

Ряд сходится.

Задача

Пример. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}+\ldots$$

Задача

Решение. Сравним исходный ряд с гармоническим. Чтобы сравнить общие члены воспользуемся признаком сравнения бесконечно малых величин:

$$u_n = \frac{1}{\ln(n+1)}; v_n = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln(n+1)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty$$

Получили, что общий член искомого ряда больше общего члена гармонического расходящегося ряда, следовательно, исходный ряд расходится.

Знакопеременные числовые ряды

Числовой ряд, содержащий положительные и отрицательные члены, называется знакопеременным. Для таких рядов существуют два вида сходимости: абсолютная и условная.

Если ряд, составленный из абсолютных величин (модулей) исходного знакопеременного числового ряда сходится, то исходный ряд ***сходится абсолютно***.

Если ряд из модулей расходится, а сам исходный ряд сходится, то он ***сходится условно***.

Знакопеременные числовые ряды

Теорема Римана. Если ряд сходится условно, то различные перестановки членов ряда могут приводить к изменению значения суммы и даже к расходимости ряда.

Знакочередующиеся числовые ряды

Рассмотрим частный случай знакопеременного ряда – знакочередующийся ряд. Ряд вида

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n+1} u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$$

Достаточный признак сходимости *Лейбница*. Если члены знакочередующегося ряда убывают по абсолютной величине и предел общего члена ряда равен нулю, то ряд сходится. При это сумма ряда не превысит по абсолютной величине первого члена ряда.

Задача

Пример. Исследовать сходимость ряда, в случае сходимости установить её вид

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2-3n+4}{2\sqrt{n^5-3n}-7}$$

Задача

Решение.

$$\lim_{n\to\infty}|u_n| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2-3n+4}{2\sqrt{n^5-3n}-7} =$$

Задача

Решение.

$$\lim_{n\to\infty}|u_n| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2-3n+4}{2\sqrt{n^5-3n}-7} = 0.$$

Следовательно, ряд сходится. Рассмотрим ряд из абсолютных величин.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-3n+4}{2\sqrt{n^5-3n}-7}$$

Задача

Исходя из признака Лейбница, общий член ряда из абсолютных величин является бесконечно малой величиной. Найдём более простую эквивалентную ей бесконечно малую

$$\frac{n^2 - 3n + 4}{2\sqrt{n^5 - 3n} - 7} \approx \frac{n^2}{2\sqrt{n^5}} = \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Сравним при помощи предельного признака сравнения ряд из абсолютных величин с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Задача

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\cdot\left(n^2-3n+4\right)}{2\sqrt{n^5-3n}-7}=$$

Задача

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\cdot\left(n^2-3n+4\right)}{2\sqrt{n^5-3n-7}}=\frac{1}{2}\Rightarrow$$

ряды $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{n^2-3n+4}{2\sqrt{n^5-3n-7}}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

или оба сходятся, или оба расходятся.

Задача

Рассмотрим обобщённый гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p}}, \text{ где } p=\frac{1}{2}\leq 1.$$

Получили, что обобщённый гармонический ряд расходится, значит по предельному признаку сравнения ряд из абсолютных величин тоже расходится. Т.о. исходный знакочередующийся ряд сходится условно.

Степенные ряды

Если члены ряда не постоянные числа, а функции, то такой ряд называется функциональным.

Будем рассматривать частный случай функциональных рядов – степенные ряды. Ряд вида

$$c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots + c_n(z-a)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

называется степенным. Для удобства сделаем замену z-a=x и будем рассматривать в дальнейшем ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_0 x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots$$

Степенные ряды

Постановка задачи: найти ***все*** значения *x*, при которых степенной ряд сходится или найти ***область сходимости*** степенного ряда.

Теорема Абеля. Если степенной ряд сходится при $x = x_0$, то он сходится абсолютно при всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| < |x_0|$. Если степенной ряд расходится при $x = x_1$, то он расходится при всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > |x_1|$.

Степенные ряды

Из теоремы Абеля следует, что обязательно найдётся такое неотрицательное число *R*, для которого при всех *x*, удовлетворяющих неравенству $|x| < R$, ряд сходится абсолютно, а при всех *x*, удовлетворяющих неравенству $|x| > R$, ряд расходится. Такое число называется ***радиусом сходимости*** степенного ряда.

Соответствующий интервал (*-R; R*) называется ***интервалом сходимости*** степенного ряда.

Степенные ряды

Формула для нахождения радиуса сходимости степенного ряда имеет вид:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|,$$

при условии что все коэффициенты ряда отличны от нуля.

Задача

Пример. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n \cdot \sqrt[3]{n}}$$

Задача

Решение. Найдём, сначала интервал сходимости степенного ряда, используя признак Даламбера, т.к. внутри этого интервала содержатся все точки, при которых степенной ряд сходится абсолютно.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}\cdot 3^n\cdot\sqrt[3]{n}}{3^{n+1}\cdot\sqrt[3]{n+1}\cdot x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{3}\right| = \left|\frac{x}{3}\right| < 1 \Rightarrow$$

$$-1 < \frac{x}{3} < 1 \Rightarrow -3 < x < 3.$$

Задача

При $\left|\frac{x}{3}\right| > 1$ ряд расходится. Остаётся

Выяснить сходимость ряда на концах интервала сходимости (когда этот модуль равен 1). Рассмотрим числовые ряды при данных значениях x, исследуем их на сходимость.

Задача

$$x = 3 \Rightarrow u_n = \frac{3^n}{3^n \cdot \sqrt[3]{n}} = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$$

Получили обобщённый гармонический ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, где $p = \frac{1}{3}$ - расходящийся ряд.

Задача

$$x=-3 \Rightarrow u_n=\frac{(-3)^n}{3^n\cdot\sqrt[3]{n}}=\frac{(-1\cdot 3)^n}{3^n\cdot\sqrt[3]{n}}=\frac{(-1)^n\cdot 3^n}{3^n\cdot\sqrt[3]{n}}=\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$$

Получили знакочередующийся ряд. Воспользуемся признаком Лейбница:

$$\lim_{n\to\infty}|u_n|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}=0$$ - ряд сходится.

Т.о. областью сходимости исходного степенного ряда является полуинтервал

$$x\in[-3;3).$$

Задача

Пример. Найти область сходимости степенного ряда

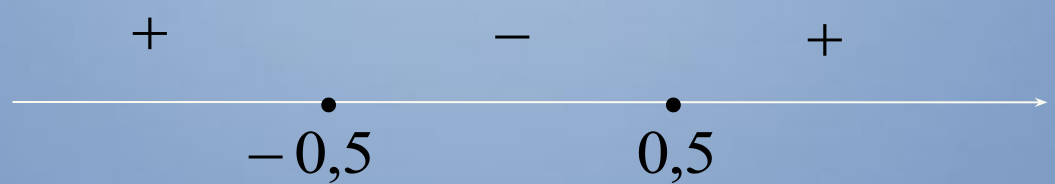
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n \cdot x^{2n}}{n^2}$$

Задача

Решение.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{4^{n+1}\cdot x^{2(n+1)}\cdot n^2}{(n+1)^2\cdot 4^n\cdot x^{2n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|4x^2\right| = 4x^2$$

$$4x^2<1 \Rightarrow (2x-1)(2x+1)<0$$



$$-0{,}5<x<0{,}5$$

Задача

$$x = \pm 0{,}5 \Rightarrow u_n = \frac{4^n \cdot (\pm 0{,}5)^{2n}}{n^2} = \frac{1}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p},\ p = 2 > 1 \Rightarrow \text{ряд сходится.}$$

$$\text{ОТВЕТ}: x \in [-0{,}5;\ 0{,}5].$$

Задача

Пример. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Задача

Решение.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\cdot x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{n+1}\right| = 0 < 1$$

Ответ: $x \in (-\infty; +\infty)$.

Степенные ряды

Свойства степенных рядов:

1. Сумма степенного ряда представляет собой функцию, определённую и непрерывную в интервале сходимости $(-R; R)$.
2. Степенные ряды можно почленно складывать, вычитать, перемножать. При этом радиус сходимости полученного таким образом ряда будет не меньше наименьшего из тех, с которыми производится действие.

Степенные ряды

3. Степенной ряд можно почленно дифференцировать и интегрировать внутри его интервала сходимости. При этом радиус сходимости не изменится.

Степенные ряды

Если функция *f(x)* определена в некоторой окрестности точки *a* и бесконечно дифференцируема в окрестности этой точки, то она в этой точке может быть представлена в виде суммы степенного ряда, причём это представление единственно.

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Это равенство называется формулой Тэйлора (**разложением в ряд Тэйлора**).

Степенные ряды

Если в формуле Тэйлора положить $a = 0$, то в результате получится разложение в ряд **Маклорена**.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Степенные ряды

Рассмотрим разложения в ряд Маклорена некоторых функций.

$$1.\ y = e^x :$$

$$y = e^x \qquad y(0) = e^0 = 1$$

$$y' = e^x \qquad y'(0) = 1$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \qquad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$y^{(n)} = e^x \quad y^{(n)}(0) = 1$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad x \in R$$

Степенные ряды

$$2.\ (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots +$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots$$

Этот ряд называется ***биномиальным***. Его область сходимости зависит от m

$$x \in [-1;1], \text{ при } m \geq 0,$$

$$x \in (-1;1], \text{ при } -1 < m < 0,$$

$$x \in (-1;1), \text{ при } m \leq -1.$$

Степенные ряды

$$3.\ \ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n},\ \textit{при}\ x\in(-1;1]$$

$$4.\ \sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!},\ x\in R$$

$$5.\ \cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n)!},\ x\in R$$

$$6.\ \operatorname{arctg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1},\ x\in[-1;1].$$

Степенные ряды

Рассмотрим приближённые вычисления с помощью рядов Маклорена.

Задача

Пример. Вычислить с точностью до 0,001

$$\sqrt[4]{90}.$$

Задача

Решение.

$$\sqrt[4]{90} = \sqrt[4]{81+9} = \sqrt[4]{81\left(1+\frac{1}{9}\right)} = 3\left(1+\frac{1}{9}\right)^{0,25} =$$

$$m = \frac{1}{4}, \quad x = \frac{1}{9}$$

$$= 3\left(1 + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{9} + \frac{0,25\cdot(0,25-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{81} + \frac{0,25\cdot(0,25-1)\cdot(0,25-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{81\cdot 9} + \ldots\right) =$$

$$= 3 + \frac{1}{12} - \frac{1}{288} + \frac{7}{64\cdot 6\cdot 81} - \ldots \approx$$

$$\frac{7}{63\cdot 6\cdot 81} < 0,001 \Rightarrow$$

Задача

По теореме *Лейбница* (т.к. получили знакочередующийся ряд) сумма членов ряда, начиная с 4-го не превысит по абсолютной величине значения 4-го члена, т.е. не превысит заданной в условии точности, а значит всеми членами, начиная с 4-го можно пренебречь.

$$\approx 3+\frac{1}{12}-\frac{1}{288}=\frac{288\cdot 3+24-1}{288}=\frac{887}{288}\approx 3{,}080.$$

Задача

Пример. Вычислить $\int\limits_{0}^{0,25} e^{-x^2}\,dx,$ взяв три члена разложения, оценить погрешность.

Задача

$$\int_0^{0,25} e^{-x^2}\,dx = \int_0^{0,25}\left(1+\frac{-x^2}{1!}+\frac{\left(-x^2\right)^2}{2!}+\frac{\left(-x^2\right)^3}{3!}+\ldots\right)\cdot dx \approx$$

$$\approx \int_0^{0,25}\left(1-x^2+\frac{x^4}{2}-\frac{x^6}{6}\right)\cdot dx = x\Big|_0^{0,25}-\frac{x^3}{3}\Big|_0^{0,25}+\frac{x^5}{10}\Big|_0^{0,25}-$$

$$-\frac{x^7}{42}\Big|_0^{0,25} = \frac{1}{4}-\frac{1}{64\cdot 3}+\frac{1}{64\cdot 16\cdot 10}-\frac{1}{64\cdot 64\cdot 16\cdot 42}\approx$$

Задача

$$64\cdot 16\cdot 10 = 10240$$

$$64\cdot 16\cdot 16\cdot 42 = 688128$$

Погрешность выбираем между значениями последнего, взятого в расчёт члена и первого отброшенного (округленно). В нашем случае берём 0,00001.

$$\approx \frac{1}{4}-\frac{1}{64\cdot 3}+\frac{1}{64\cdot 16\cdot 10}=\frac{64\cdot 120-160+3}{64\cdot 16\cdot 10\cdot 3}=$$

$$=\frac{7523}{30720}\approx 0{,}24489.$$

Конец всему

Конец всему курсу лекций