

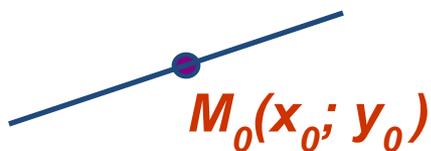
Прямая на плоскости

- Общее уравнение прямой
- Уравнение прямой в отрезках
- Каноническое уравнение прямой
- Уравнение прямой с угловым коэффициентом
- Угол между двумя прямыми
- Расстояние от точки до прямой
- Биссектриса углов между прямыми
- Деление отрезка в заданном отношении

Общее уравнение прямой

Уравнение вида: $Ax + By + C = 0$

с произвольными коэффициентами $A; B; C$ такими, что A и B не равны нулю одновременно, называется **общим уравнением прямой**.



Если точка $M_0(x_0; y_0)$ принадлежит прямой, то общее уравнение прямой превращается в тождество: $Ax_0 + By_0 + C = 0$

Теорема Пусть задана прямая: $Ax + By + C = 0$ (1)

Вектор $\bar{n} = \{A; B\}$ будет **ортогонален** этой прямой.

Доказательство:

Пусть некоторая точка $M_0(x_0; y_0)$ принадлежит прямой:

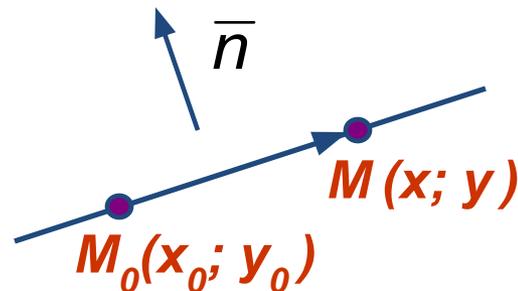
$$Ax_0 + By_0 + C = 0 \quad (2)$$

Общее уравнение прямой

Найдем разность уравнений (1) и (2):

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ Ax_0 + By_0 + C = 0 \end{cases}$$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \quad (3)$$



Пусть точки $M_0(x_0; y_0)$ и $M(x; y)$ лежат на данной прямой.

Рассмотрим векторы: $\bar{n} = \{A; B\}$ и $\overline{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0\}$

Равенство (3) представляет собой скалярное произведение этих векторов, которое равно нулю:

$$\bar{n} \cdot \overline{M_0M} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{n} \perp \overline{M_0M}$$

Таким образом, вектор \bar{n} перпендикулярен прямой и называется **нормальным вектором** прямой.

Равенство (3) также является **общим уравнением** прямой

Общее уравнение прямой

Общее уравнение прямой называется **полным**, если все коэффициенты A , B , и C отличны от нуля.

В противном случае уравнение называется **неполным**.

Виды неполных уравнений:

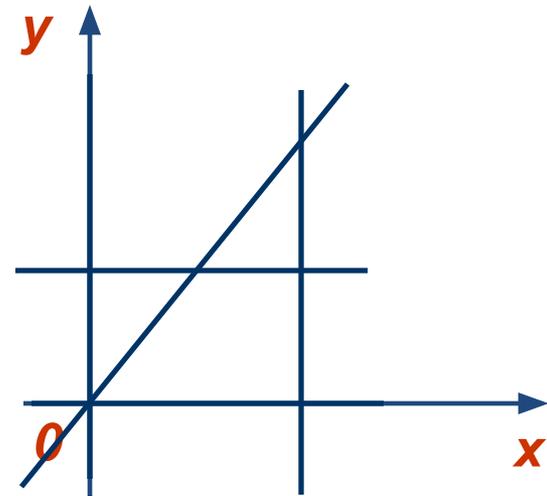
1) $C = 0; \quad Ax + By = 0$

2) $B = 0; \quad Ax + C = 0$

3) $A = 0; \quad By + C = 0$

4) $B = C = 0; \quad Ax = 0 \Rightarrow x = 0$

5) $A = C = 0; \quad By = 0 \Rightarrow y = 0$



Уравнение прямой в отрезках

Рассмотрим полное уравнение прямой:

$$Ax + By + C = 0 \Rightarrow Ax + By = -C \Rightarrow \frac{Ax}{-C} + \frac{By}{-C} = 1$$

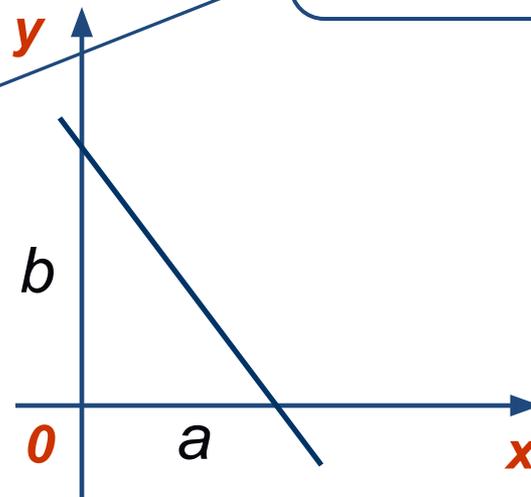
$$\Rightarrow \frac{\frac{x}{-C}}{\frac{A}{-C}} + \frac{\frac{y}{-C}}{\frac{B}{-C}} = 1$$

Обозначим: $\frac{-C}{A} = a$ $\frac{-C}{B} = b$

Получим:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Уравнение в отрезках
Уравнение в отрезках используется для построения прямой, при этом a и b – отрезки, которые отсекает прямая от осей координат.



Каноническое уравнение прямой

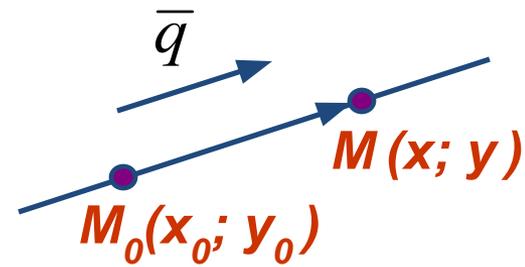
Любой ненулевой вектор, параллельный данной прямой, называется **направляющим вектором** этой прямой.

Требуется найти уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M_0(x_0; y_0)$ и параллельно заданному вектору $\bar{q} = \{l; m\}$

Очевидно, что точка $M(x; y)$ лежит на прямой, только в том случае, если векторы

$$\bar{q} = \{l; m\} \text{ и } \overline{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0\}$$

коллинеарны.



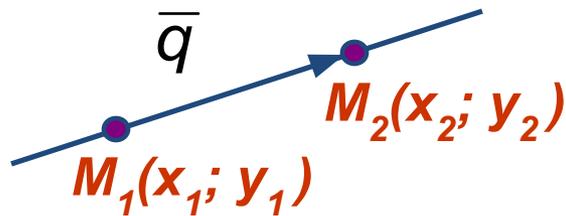
По условию коллинеарности получаем:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}$$

Каноническое уравнение
прямой

Каноническое уравнение прямой

Пусть прямая проходит через две заданные и отличные друг от друга точки: $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$.



Тогда в качестве направляющего вектора в каноническом уравнении можно взять вектор:

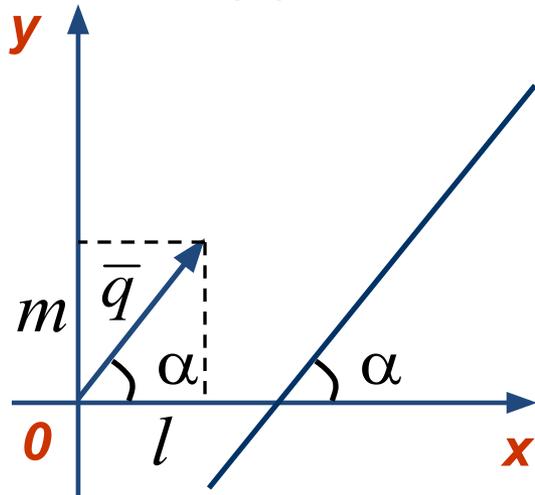
$$\bar{q} = \overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Уравнение прямой,
проходящей через две
заданные точки

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Если прямая не параллельна оси OY и имеет направляющий вектор $\vec{q} = \{l; m\}$, то **угловым коэффициентом** k этой прямой равен тангенсу угла наклона прямой к оси OX .



$$k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{m}{l}$$

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} \Rightarrow y - y_0 = k(x - x_0) \Rightarrow$$

$$y = y_0 + kx - kx_0 \Rightarrow$$

$$y = kx + b$$

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Пример

Прямая проходит через точку $M(1; 2)$ и имеет направляющий вектор: $\bar{q} = \{-1; 3\}$

Написать: каноническое, общее уравнение прямой, уравнение прямой в отрезках, уравнение с угловым коэффициентом.

Найти нормальный вектор прямой, отрезки, которые отсекает прямая от осей координат и угол, который составляет прямая с осью Ox .

1. Каноническое уравнение:

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{3}$$

2. Общее уравнение: $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{3} \Rightarrow 3(x-1) = -(y-2) \Rightarrow$

$$3x + y - 5 = 0$$

$$\bar{N} = \{3; 1\}$$

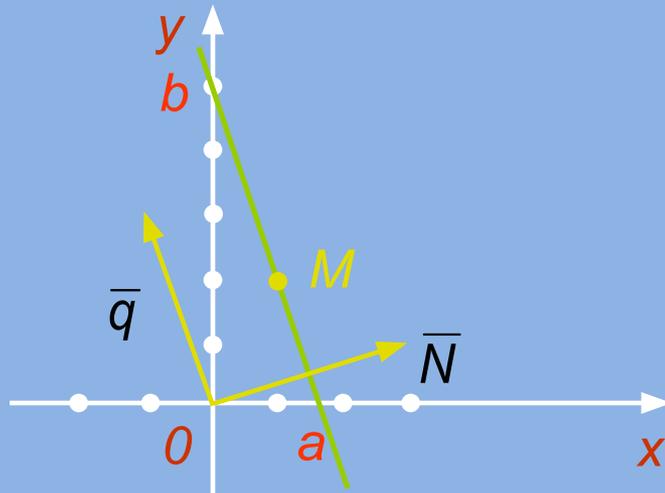
Пример

3. Уравнение в отрезках: $3x + y - 5 = 0 \Rightarrow 3x + y = 5 \Rightarrow$

$$\frac{3x}{5} + \frac{y}{5} = 1 \Rightarrow \frac{x}{\frac{5}{3}} + \frac{y}{5} = 1 \quad a = \frac{5}{3} \quad b = 5$$

4. Уравнение с угловым коэффициентом: $3x + y - 5 = 0 \Rightarrow$

$$y = -3x + 5 \quad k = \operatorname{tg} \alpha = -3$$



Угол между двумя прямыми

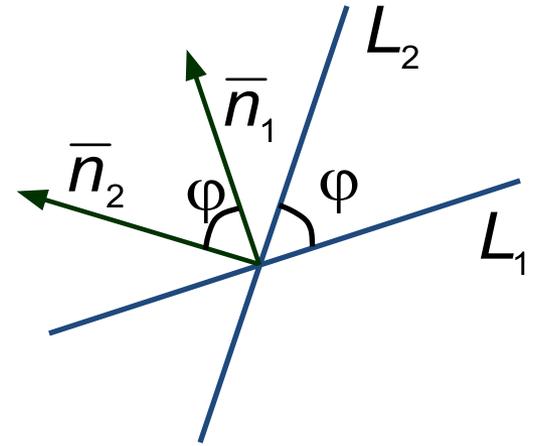
Пусть две прямые L_1 и L_2 заданы общими уравнениями:

$$L_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

$$L_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

Угол между этими прямыми определяется как угол между нормальными векторами к этим прямым:

$$\bar{n}_1 = \{A_1; B_1\} \quad \bar{n}_2 = \{A_2; B_2\}$$



$$\cos \varphi = \cos(\bar{n}_1; \bar{n}_2) = \frac{\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2}{|\bar{n}_1| \cdot |\bar{n}_2|} = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

$$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad L_1 \perp L_2$$

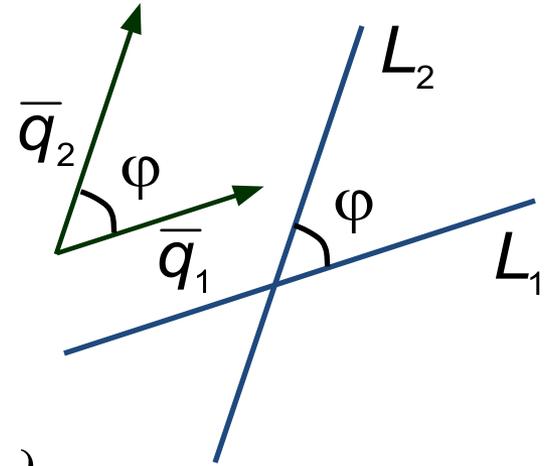
$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \quad \Rightarrow \quad L_1 \parallel L_2$$

Угол между двумя прямыми

Пусть две прямые L_1 и L_2 заданы каноническими уравнениями:

$$L_1: \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1}$$

$$L_2: \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2}$$



Угол между этими прямыми определяется как угол между направляющими векторами к этим прямым:

$$\bar{q}_1 = \{l_1; m_1\} \quad \bar{q}_2 = \{l_2; m_2\}$$

$$\cos \varphi = \cos(\bar{q}_1; \bar{q}_2) = \frac{\bar{q}_1 \cdot \bar{q}_2}{|\bar{q}_1| \cdot |\bar{q}_2|} = \frac{l_1 \cdot l_2 + m_1 \cdot m_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2}}$$

$$l_1 \cdot l_2 + m_1 \cdot m_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad L_1 \perp L_2$$

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} \quad \Rightarrow \quad L_1 \parallel L_2$$

Угол между двумя прямыми

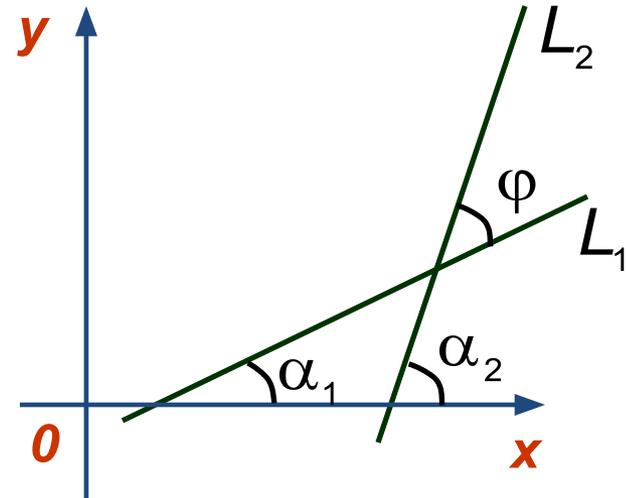
Пусть две прямые L_1 и L_2 заданы уравнениями с угловыми коэффициентами:

$$L_1: y = k_1x + b_1$$

$$L_2: y = k_2x + b_2$$

$$\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$$

$$k_1 = \operatorname{tg}\alpha_1 \quad k_2 = \operatorname{tg}\alpha_2$$



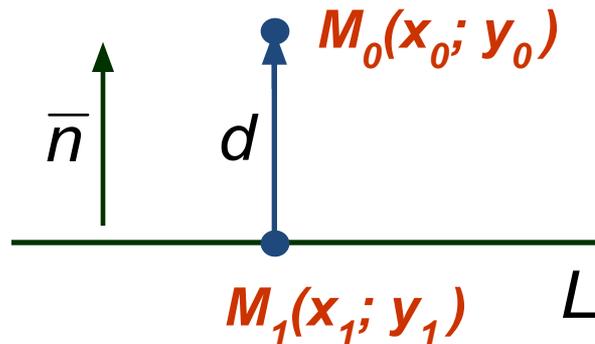
$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_2 \cdot \operatorname{tg}\alpha_1} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 \cdot k_1}$$

$$k_1 \cdot k_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad L_1 \perp L_2$$

$$k_1 = k_2 \quad \Rightarrow \quad L_1 \parallel L_2$$

Расстояние от точки до прямой

Пусть необходимо найти расстояние от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой, заданной общим уравнением: $Ax + By + C = 0$



Пусть $M_1(x_1; y_1)$ – основание перпендикуляра, опущенного из точки M_0 на прямую L .

$$d = \overline{M_1M_0} = |\{x_0 - x_1; y_0 - y_1\}|$$

Найдем скалярное произведение векторов $\bar{n} = \{A; B\}$ и $\overline{M_1M_0}$

$$\bar{n} \cdot \overline{M_1M_0} = |\bar{n}| \cdot |\overline{M_1M_0}| \cdot \cos \varphi$$

$$\varphi = 0 \quad \text{или} \quad \varphi = \pi \quad \Rightarrow \quad \cos \varphi = \pm 1$$

$$\bar{n} \cdot \overline{M_1M_0} = \pm |\bar{n}| \cdot |\overline{M_1M_0}| = \pm |\bar{n}| \cdot d$$

Найдем скалярное произведение в координатной форме:

$$\bar{n} \cdot \overline{M_1M_0} = A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) = Ax_0 - Ax_1 + By_0 - By_1$$

Расстояние от точки до прямой

$$= Ax_0 + By_0 - (Ax_1 + By_1)$$

Точка $M_1(x_1; y_1)$ принадлежит прямой L , следовательно:

$$Ax_1 + By_1 + C = 0 \Rightarrow Ax_1 + By_1 = -C$$

$$\begin{cases} \overline{\vec{n}} \cdot \overline{M_1M_0} = Ax_0 + By_0 + C \\ \overline{\vec{n}} \cdot \overline{M_1M_0} = \pm |\overline{\vec{n}}| \cdot d \end{cases} \Rightarrow \pm |\overline{\vec{n}}| \cdot d = Ax_0 + By_0 + C$$

$$d = \pm \frac{Ax_0 + By_0 + C}{|\overline{\vec{n}}|}$$

$$d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$

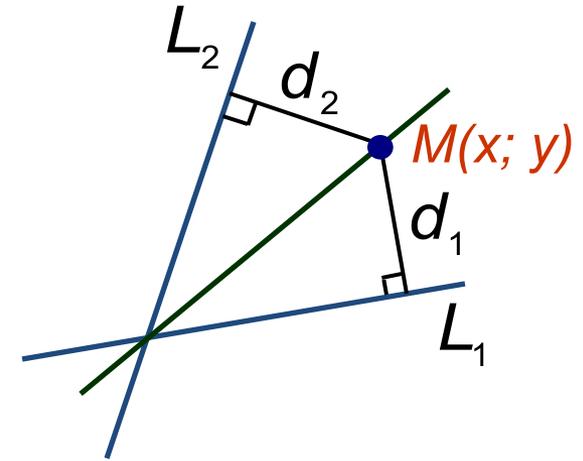
Биссектриса углов между прямыми

Пусть две прямые L_1 и L_2 заданы общими уравнениями:

$$L_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

$$L_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

Если точка $M(x; y)$ лежит на биссектрисе угла между прямыми, то расстояние от точки M до прямой L_1 равно расстоянию до прямой L_2 : $d_1 = d_2$



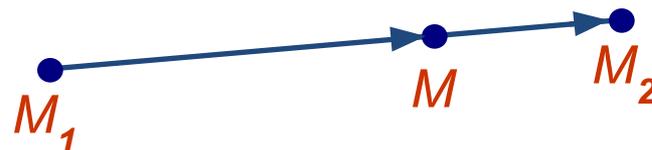
$$d_1 = \left| \frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} \right| \quad d_2 = \left| \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \right|$$

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

Деление отрезка в заданном отношении

Разделить отрезок M_1M_2 в заданном отношении $\lambda > 0$ значит найти на отрезке такую точку $M(x; y)$, что имеет место равенство:

$$\frac{|M_1M|}{|MM_2|} = \lambda \quad \text{или} \quad |M_1M| = \lambda |MM_2|$$



Пусть $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$. Найдем координаты точки M .

$$\overline{M_1M} = \lambda \cdot \overline{MM_2} \quad \text{В координатной форме:}$$

$$\overline{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1\} \quad \overline{MM_2} = \{x_2 - x; y_2 - y\}$$

$$\left. \begin{array}{l} x - x_1 = \lambda \cdot (x_2 - x) \\ y - y_1 = \lambda \cdot (y_2 - y) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = \lambda x_2 - \lambda x + x_1 \\ y = \lambda y_2 - \lambda y + y_1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} x \cdot (1 + \lambda) = \lambda x_2 + x_1 \\ y \cdot (1 + \lambda) = \lambda y_2 + y_1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

Пример

Даны вершины треугольника: $A(1; 1)$; $B(10; 13)$; $C(13; 6)$

Найти: Уравнения высоты, медианы и биссектрисы, проведенных из вершины A .

1. Уравнение высоты:

(BC):



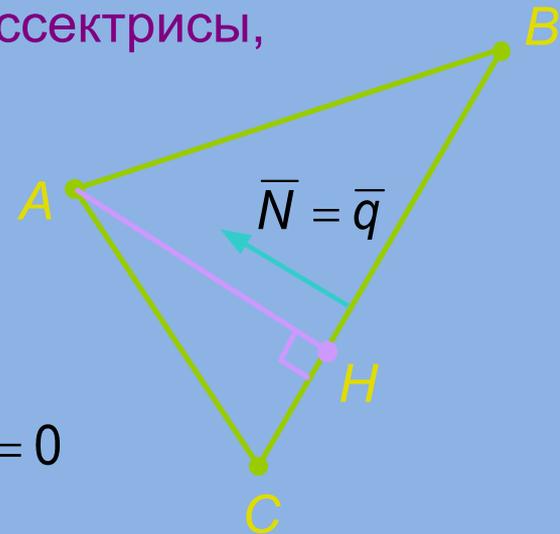
$$\Rightarrow \frac{x-10}{3} = \frac{y-13}{-7}$$

$$\Rightarrow -7x + 70 = 3y - 39 \Rightarrow 7x + 3y - 109 = 0$$

$$\bar{N} = \{7; 3\}$$

$$(AH): \bar{q} = \{7; 3\} \quad \frac{x-1}{7} = \frac{y-1}{3} \Rightarrow 3x - 3 = 7y - 7 \Rightarrow$$

$$3x - 7y + 4 = 0$$



Пример

2. Уравнение медианы:

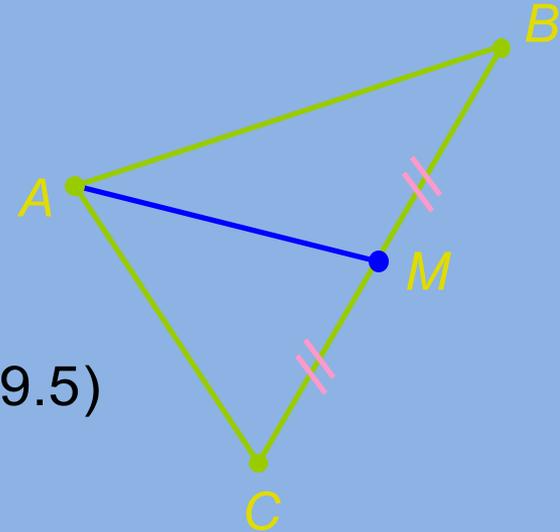
$$\text{т. М: } \lambda = \frac{|BM|}{|MC|} = 1 \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} x_M &= \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{10 + 13}{2} = 11.5 \\ y_M &= \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{13 + 6}{2} = 9.5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow M(11.5; 9.5)$$

$$\frac{x-1}{11.5-1} = \frac{y-1}{9.5-1} \Rightarrow \frac{x-1}{10.5} = \frac{y-1}{8.5} \Rightarrow 8.5x - 8.5 = 10.5y - 10.5 \Rightarrow$$

$$8.5x + 10.5y + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$17x + 21y + 4 = 0$$



Пример

4. Уравнение биссектрисы:

$$(AB): \frac{x-1}{10-1} = \frac{y-1}{13-1} \Rightarrow \frac{x-1}{9} = \frac{y-1}{12} \Rightarrow$$

$$12x - 12 = 9y - 9 \Rightarrow 12x - 9y - 3 = 0 \Rightarrow$$

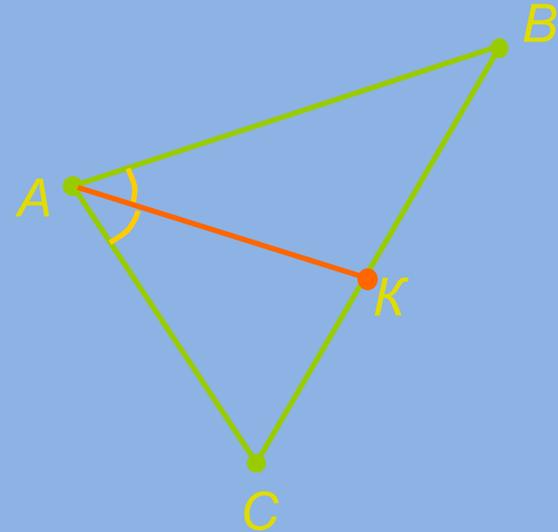
$$\underline{4x - 3y - 1 = 0}$$

$$(AC): \frac{x-1}{13-1} = \frac{y-1}{6-1} \Rightarrow \frac{x-1}{12} = \frac{y-1}{5} \Rightarrow$$

$$5x - 5 = 12y - 12 \Rightarrow \underline{5x - 12y + 7 = 0}$$

$$\frac{4x - 3y - 1}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \pm \frac{5x - 12y + 7}{\sqrt{5^2 + (-12)^2}} \Rightarrow \frac{4x - 3y - 1}{5} = \pm \frac{5x - 12y + 7}{13} \Rightarrow$$

$$52x - 39y - 13 = \pm(25x - 60y + 35)$$



Пример

Для биссектрисы внутреннего угла треугольника должно выполняться условие:

$$k_{AB} \leq k_{AK} \leq k_{AC} \quad \text{или} \quad k_{AC} \leq k_{AK} \leq k_{AB}$$

$$4x - 3y - 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{4}{3}x - \frac{1}{4} \Rightarrow k_{AB} = \frac{4}{3}$$

$$5x - 12y + 7 = 0 \Rightarrow y = \frac{5}{12}x + \frac{7}{12} \Rightarrow k_{AC} = \frac{5}{12}$$

$$1) \quad 52x - 39y - 13 = 25x - 60y + 35 \Rightarrow 27x + 21y - 48 = 0 \Rightarrow$$

$$9x + 7y - 16 = 0 \Rightarrow y = -\frac{9}{7}x + \frac{16}{9} \quad k_{AK} = -\frac{9}{7}$$

$$2) \quad 52x - 39y - 13 = -(25x - 60y + 35) \Rightarrow 77x - 99y - 22 = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{7x - 9y - 2 = 0} \quad y = \frac{7}{9}x - \frac{2}{9} \quad k_{AK} = \frac{7}{9} \quad \frac{5}{12} \leq \frac{7}{9} \leq \frac{4}{3}$$