Лектор Буганова С.Н.

Плоскость

Дисциплина Математика 1
Лекция 5
2016-17 учебный год

План Лекции

1. Основные уравнения плоскости

2. Построение плоскости

3. Взаимное расположение плоскостей

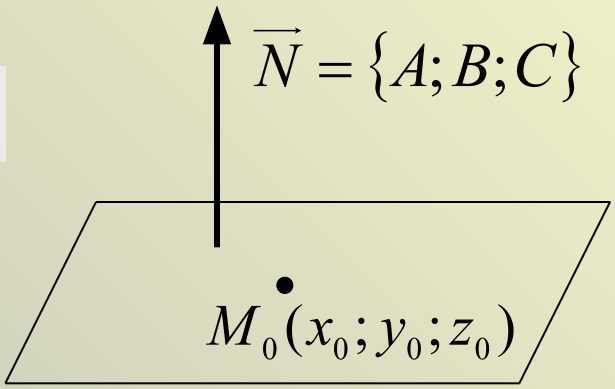
4. Расстояние от точки до плоскости

1. Плоскость

Основные уравнения плоскости

1. Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ перпендикулярно заданному вектору $\overrightarrow{N}=\{A;B;C\}$

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$



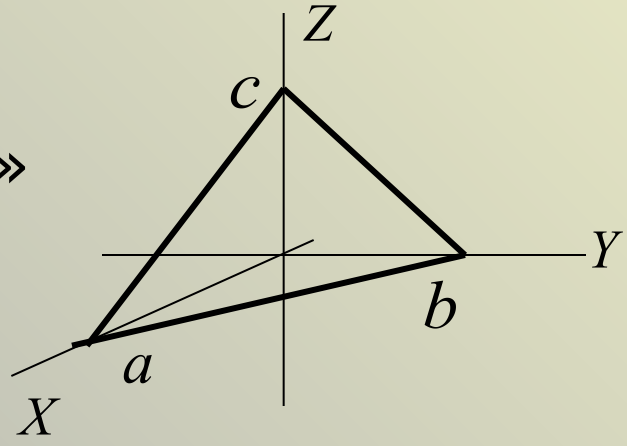
2. Общее уравнение плоскости

$$Ax+By+Cz+D=0$$

$\overrightarrow{N}=\{A;B;C\}$ - вектор нормали

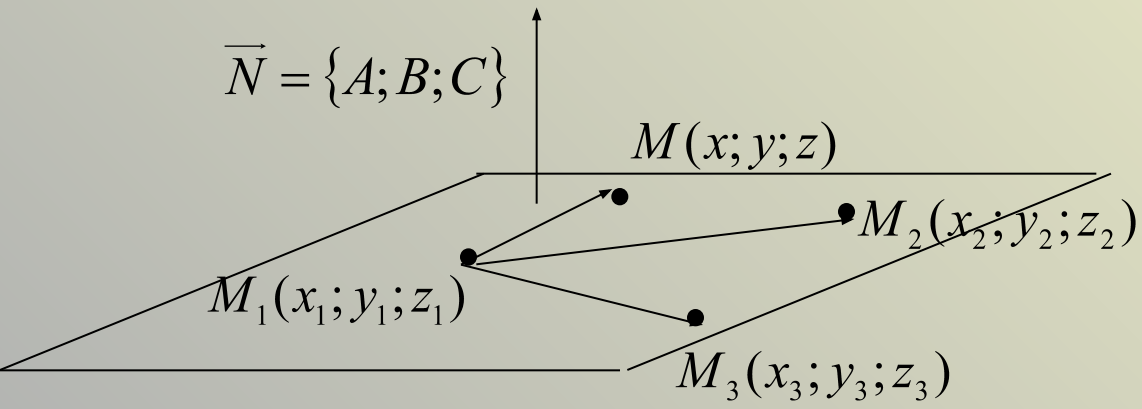
3. Уравнение плоскости « в отрезках»

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$



Уравнения плоскости

4. Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$ и $M_3(x_3;y_3;z_3)$



$$\overrightarrow{M_1M}=\{x-x_1;y-y_1;z-z_1\}$$
$$\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1\}$$
$$\overrightarrow{M_1M_3}=\{x_3-x_1;y_3-y_1;z_3-z_1\}$$

Условие компланарности векторов $(\overrightarrow{M_1M}\cdot\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\overrightarrow{M_1M_3})=0$

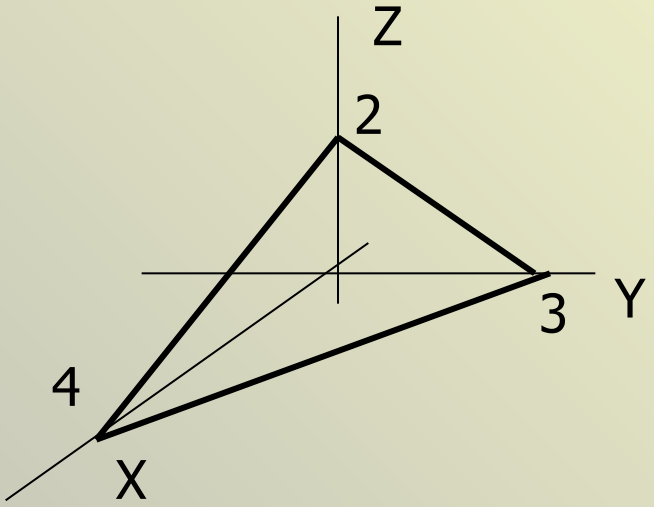
$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

Построение плоскостей

1. Построить плоскость $3x+4y+6z-12=0$

Находим координаты точек пересечения плоскости с осями координат.

x	0	0	4
y	0	3	0
z	2	0	0



Можно привести уравнение плоскости к уравнению «в отрезках»

1) Переносим вправо свободный член уравнения $3x+4y+6z=12$

2) Делим на 12, чтобы получить единицу в правой части $\frac{3x}{12}+\frac{4y}{12}+\frac{6z}{12}=1$

3) Убираем коэффициенты из числителей $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}+\frac{z}{2}=1$

Числа, стоящие в знаменателях, являются длинами отрезков, которые плоскость отсекает на осях координат

Построение плоскостей

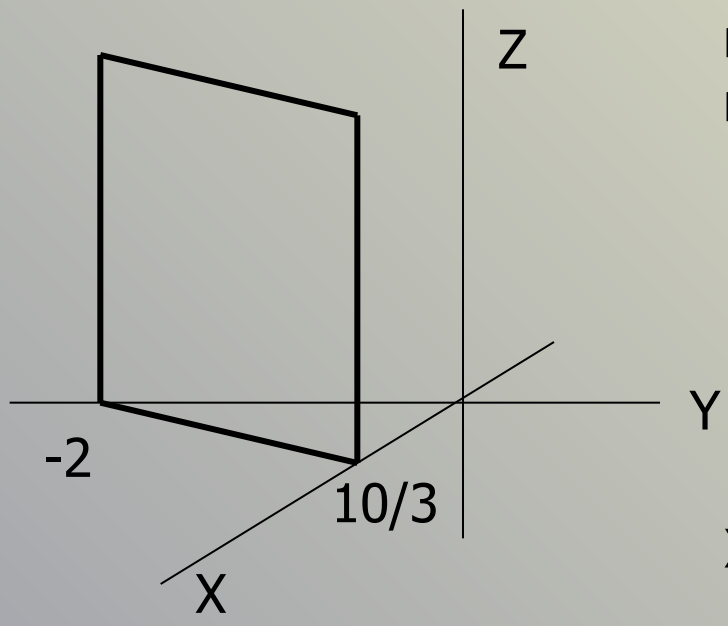
2. Построить плоскость $3x - 5y - 10 = 0$

В уравнении отсутствует переменная z.

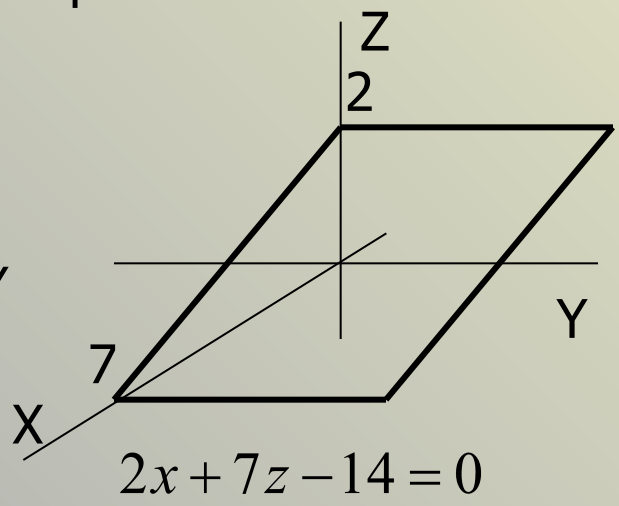
Находим точки пересечения плоскости с осями OX и OY.

X	0	10/3
y	-2	0

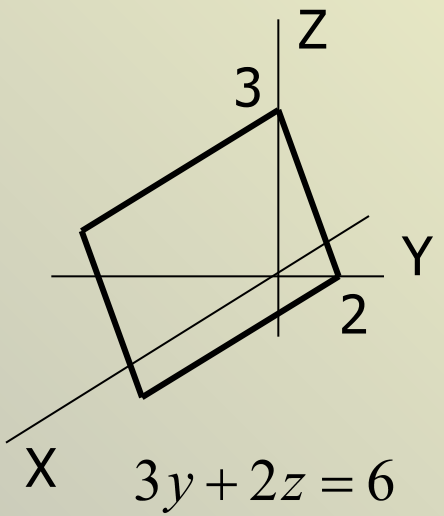
Соединяем точки прямой линией и получаем след плоскости на плоскости XOY.
Теперь из точек пересечения проводим прямые, параллельные оси OZ.



Аналогично строятся все плоскости, в уравнении которых отсутствует одна переменная



$2x + 7z - 14 = 0$

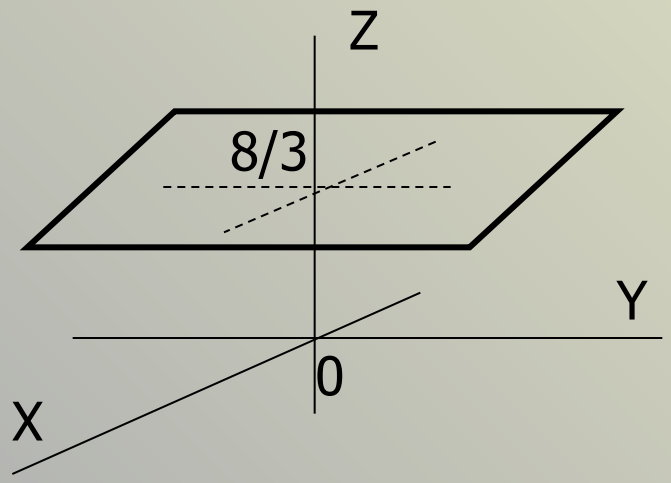


$3y + 2z = 6$

Построение плоскостей

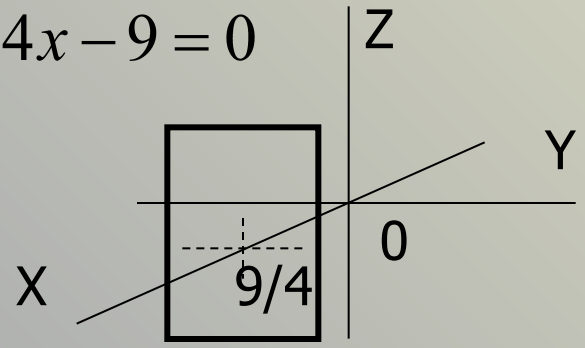
3. Построить плоскость $3z - 8 = 0$

В уравнении отсутствуют две переменные x и y. Такая плоскость проходит параллельно и оси OX , и оси OY, т.е. она проходит параллельно координатной плоскости XOY через точку z=8/3 на оси OZ.

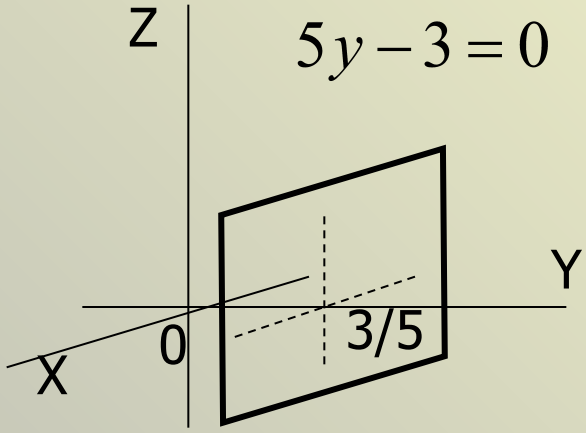


Аналогично строятся плоскости, в уравнениях которых отсутствуют две переменные

$4x - 9 = 0$



$5y - 3 = 0$



Таким образом, *если в уравнении плоскости отсутствует одна переменная, то плоскость проходит параллельно той оси координат, переменной которой нет в уравнении.*

Если в уравнении плоскости отсутствует свободный член, то плоскость проходит через начало координат.

Если в уравнении плоскости отсутствуют две переменные, то плоскость проходит параллельно координатной плоскости, переменных которой нет в уравнении.

Уравнения координатных плоскостей

$x = 0$ - уравнение плоскости YOZ

$y = 0$ - уравнение плоскости XOZ

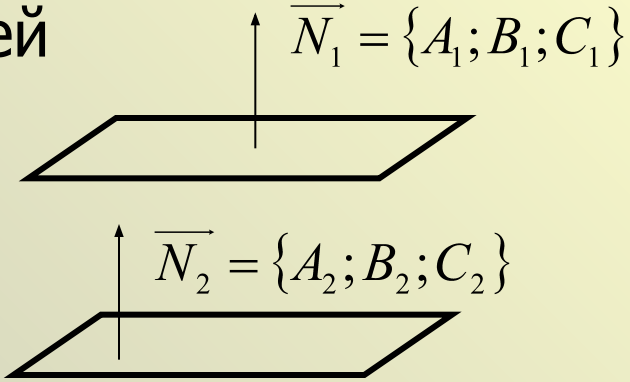
$z = 0$ - уравнение плоскости XOY

Взаимное расположение плоскостей

1. Условие параллельности плоскостей

$\overrightarrow{N_1} \parallel \overrightarrow{N_2}$

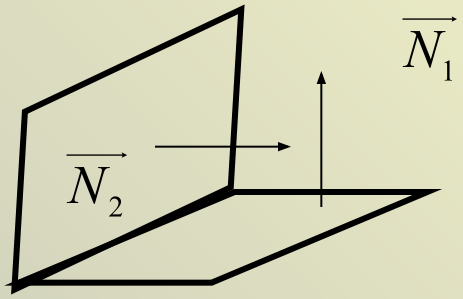
$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$



2. Условие перпендикулярности плоскостей

$\overrightarrow{N_1} \perp \overrightarrow{N_2}$ $\quad (\overrightarrow{N_1} \cdot \overrightarrow{N_2}) = 0$

$$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0$$



3. Косинус угла между плоскостями

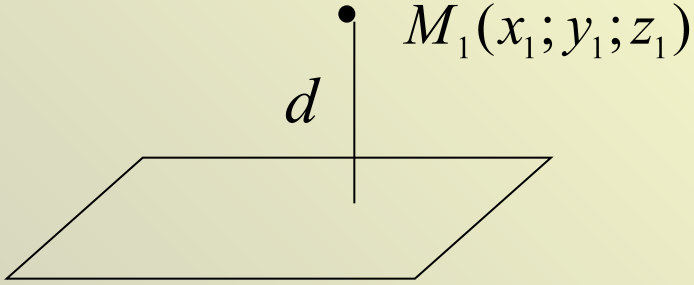
Угол между плоскостями – это угол между векторами нормалей этих плоскостей

$$\cos\varphi = \cos(\overrightarrow{N_1}, \overrightarrow{N_2}) = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Расстояние от точки до плоскости

Расстояние от точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ находится по формуле

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$



Расстояние – это длина перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость

***Правило**: для нахождения расстояния от точки до плоскости нужно координаты точки подставить в левую часть уравнения плоскости, разделить на длину вектора нормали плоскости и полученное значение взять по абсолютной величине.*

! Расстояние – величина всегда положительная

Задание на СРС

1. Построение произвольных плоскостей. [1]
2. Точка пересечения трех плоскостей (конспект).

Задание на СРСП

1. ИДЗ – 3.1. [1. стр.97].

Глоссарий

№	На русском языке	На казахском языке	На английском языке
1	Плоскость	Жазықтық	Plane
2	Общее уравнение	Жалпы теңдеу	General equation
3	Параметрическое	Параметрлік	Parameter
4	Каноническое	Канондық	Canon
5	Нормаль	Нормаль	Normal vector

Литература:

Основная

А.П. Рябушко. Индивидуальные задания по высшей математике, т.1.- Мн.: Выш. Школа, 2011.

Данко П.Е., Попов А.Г. Высшая математика в упражнениях и задачах: Учебное пособие для втузов. - М.: Оникс, 2007.

Дополнительная

Буганова С.Н. Математика для технических специальностей с применением прикладных программ. - Алматы: КазГАСА, 2015, с.108.

Сыдыкова Д.К. «Курс Математики- I», Модуль I, II для дистанционного обучения. Электронный учебник.-Алматы: КазГАСА, 2012.

www.studentlibrary.ru

http://sferaznaniy.ru/vysshaya-matematika.