Матрицы. Определители.

Матрицы и операции над ними

Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов. Числа, составляющие матрицу, называются *элементами* матрицы.

Матрицы обозначаются прописными (заглавными) буквами латинского алфавита (A, B, C…), а элементы матриц строчными буквами с двойным индексом: a_{ij}, где i – номер строки, j – номер столбца.

$$A_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$\times$

или, в сокращенной записи $A=(a_{ij})$ $i=1..m$; $j=1..n$.

Две матрицы A и B одного размера $\boldsymbol{m{\times}n}$ называются *равными*, если они совпадают поэлементно,

т.е. $a_{ij}=b_{ij}$ для всех $i=1..m$; $j=1..n$.

Классификация матриц

Матрица, состоящая из одной строки, называется матрицей ***(вектором)-строкой***, а из одного столбца – матрицей ***(вектором)-столбцом***.

Квадратной матрицей *n-го порядка* называется матрица, у которой число строк равно числу столбцов и равно n.

Элементы матрицы a_{ij}, у которых $i = j$ называются ***диагональными элементами*** и образуют ***главную диагональ.***

Если все недиагональные элементы квадратной матрицы равны нулю, то она называется ***диагональной*** .

Единичной, называется диагональная матрица, элементы которой равны единице.

Классификация матриц

- Симметрической называется квадратная матрица, у которой элементы, расположенные симметрично относительно главной диагонали, равны, т.е.
  $a_{ij} = a_{ji}\ (i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,n}).$
- Треугольная матрица – квадратная матрица, у которой все элементы, стоящие по одну из сторон главной диагонали, равны нулю.

Операции над матрицами

Умножение матрицы на число.

- *Произведением матрицы А на число* λ называется матрица $B=\lambda A$, элементы которой $b_{ij}=\lambda a_{ij}$ для всех $i=1\ldots m$; $j=1\ldots n$.

Сложение матриц.

- *Суммой двух матриц А и В одинакового размера mxn называется матрица $C=A+B$, элементы которой $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ для всех $i=1\ldots m$; $j=1\ldots n$.*

Вычитание матриц.

- *Разность двух матриц* одинакового размера определяется через предыдущие операции: $A-B=A+(-1)\cdot B$.

Умножение матриц.

- Умножение матриц А на матрицу В определено, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй. Тогда произведением матриц называется такая матрица , каждый элемент которой c_{ij} равен сумме произведений элементов *i*-й строки матрицы *A* на соответствующие элементы *j*-го столбца матрицы *B*.

Целой положительной степенью A^m квадратной матрицы *A* называется произведение m матриц А, т.е. $A^m = A \cdot A \cdot \ldots \cdot A$

Транспонирование матрицы.

- ***Транспонированием матрицы*** называется переход от матрицы *A* к $A^т$ (или A'), в которой строки и столбцы поменялись местами с сохранением порядка. $A^т$ – называется транспонированной относительно матрицы *A.*

Определители квадратной матрицы

- Каждой квадратной матрице *A*, можно поставить в соответствие вычисленное по определенным правилам число, называемое *определителем квадратной матрицы.*
- *Определителем матрицы первого порядка* $A=(a_{11})$ или определителем первого порядка называется элемент a_{11}. Обозначается $\Delta_1 = a_{11}$ или $|A| = a_{11}$.
- *Определителем матрицы второго порядка* или определителем второго порядка называется число, которое вычисляется по формуле: $\Delta_2 = |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Определителем матрицы третьего порядка

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

или определителем третьего порядка называется число,
которое вычисляется по формуле:

$$\Delta_3 = |A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}.$$

Пусть *A* является квадратной матрицей *n*-го порядка.

Минором M_{ij} элемента a_{ij}, называется определитель (*n*-1)-го порядка, полученный из матрицы *A* вычеркиванием *i* –ой строки и *j*-го столбца.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} матрицы *n*-го порядка называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$.

- $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

Теорема Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения:

- $\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$.
- Значение теоремы состоит в том, что позволяет свести вычисление определителей n-го порядка к вычислению более простых определителей (n-1)-го порядка.

Свойства определителей

- 1
  - Если какая-либо строка (столбец) матрицы состоит из одних нулей, то её определитель равен нулю.
- 2
  - Если все элементы какой-либо строки (столбца) матрицы умножить на число λ, то её определитель умножится на это число λ.
- 3
  - При транспонировании матрицы её определитель не изменится.
- 4
  - При перестановке 2-х строк (столбцов) матрицы её определитель меняет знак на противоположный.
- 5
  - Если матрица содержит две одинаковые строки (столбца), то её определитель равен нулю.

Свойства определителей

- 6
  - Если элементы двух строк (столбцов) матрицы пропорциональны, то её определитель равен нулю.
- 7
  - Определитель матрицы не изменится, если к элементам любой строки (столбца) прибавить элементы другой строки (столбца), предварительно умноженной на любое число.
- 8
  - Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) матрицы на алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) этой матрицы равна нулю.
- 9
  - Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению их определителей: $|AB| = |A|\,|B|$.

Обратная матрица

Матрица A^{-1} называется обратной по отношению к квадратной матрице A, если при умножении этой матрицы на данную как справа, так и слева получается единичная матрица: $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$.

Если определитель матрицы отличен от нуля, то такая матрица называется *невырожденной, или неособенной*; в противном случае (при $|A|=0$) – *вырожденной, или особенной* .

Присоединенной матрицей квадратной матрицы А называется матрица $\tilde{A}$, каждый элемент которой есть алгебраическое дополнение a_{ij} элемента транспонированной матрицы.

Теорема о существовании обратной матрицы. Обратная матрица A^{-1} существует и единственна тогда и только тогда, когда исходная матрица невырожденная.

Алгоритм нахождения обратной матрицы

1. Находим определитель исходной матрицы. Если $|A|=0$, то матрица A вырожденная и обратной матрицы A^{-1} не существует. Если определитель матрицы A не равен нулю, то обратная матрица существует.
2. Находим A', транспонированную к A.
3. Находим алгебраические дополнения элементов транспонированной матрицы $A'_{ij}=A_{ji}$ (i=1..n; j=1..n) и составляем из них присоединенную матрицу .

$$\widetilde{A}:\ \widetilde{a}_{ij} = A'_{ij} \quad (i=1..n;\ j=1..n)$$

Вычисляем обратную матрицу по формуле:

4.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}$$

5. Проверяем правильность вычисления обратной матрицы, исходя из ее определения $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$.