Функция одной и нескольких переменны

Путь к появлению понятия функции идет от французских ученых
Рене Декарта и Франсуа Виета (XVII в.).

Рене Декарт

(1596 – 1650)

Понять и работать с функцией гораздо легче, если она задана аналитически.

Виет и Декарт разработали единую буквенную математическую символику, которая вскоре получила всеобщее признание.

Франсуа Виет

(1540 – 1603)

Было введено единое обозначение:

<u>Неизвестных</u> - последними буквами латинского алфавита - x, y, z;

<u>Известных </u>- начальными буквами того же алфавита - a, b, c, ... и т.д.

О самом понятии функции говорилось не сразу.

Слово «функция»

(от латинского functio -совершение, выполнение) впервые было употреблено немецким математиком Лейбницем в 1673г. Под функцией он понимал отрезок, длина которого меняется по какому-нибудь определенному закону.

Готфрид Вильгельм фон Лейбниц

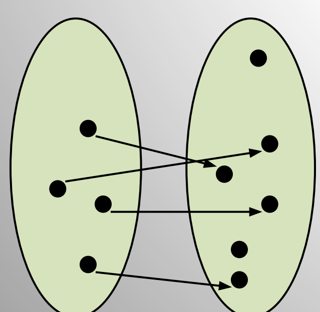
(1646 – 1716) — немецкий философ, математик, юрист, дипломат.

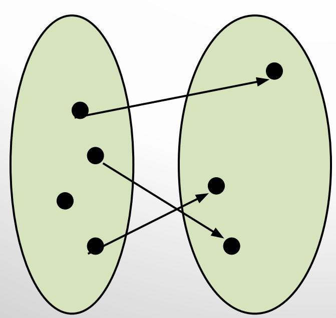
.

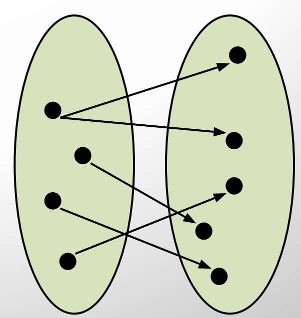
Задание 1.

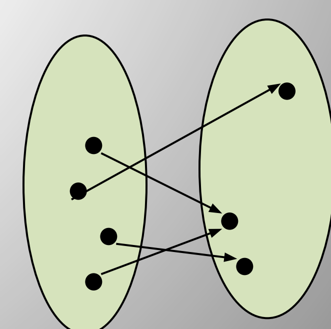
Определите, какая из данных зависимостей является функциональной

1) x y 2) a q 3) x d 4) n f









Определение функции

***<u>Функция</u>* –**

одно из важнейших математических понятий

Функция – это особое соответствие!!!

Функцией называется соответствие, при котором каждому элементу одного множества ставится в соответствие единственный элемент другого множества

Функция

Функцией одной переменной

$y = f(x)$

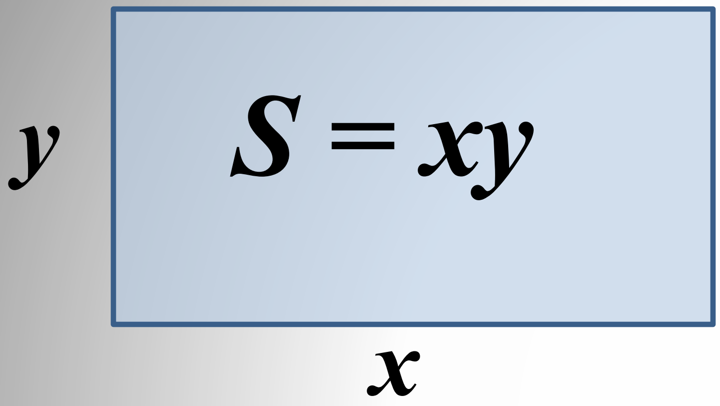
называется такая зависимость, при которой <u>каждому</u> значению переменной x соответствует <u>единственное</u> значение переменной y

Функцией нескольких переменных

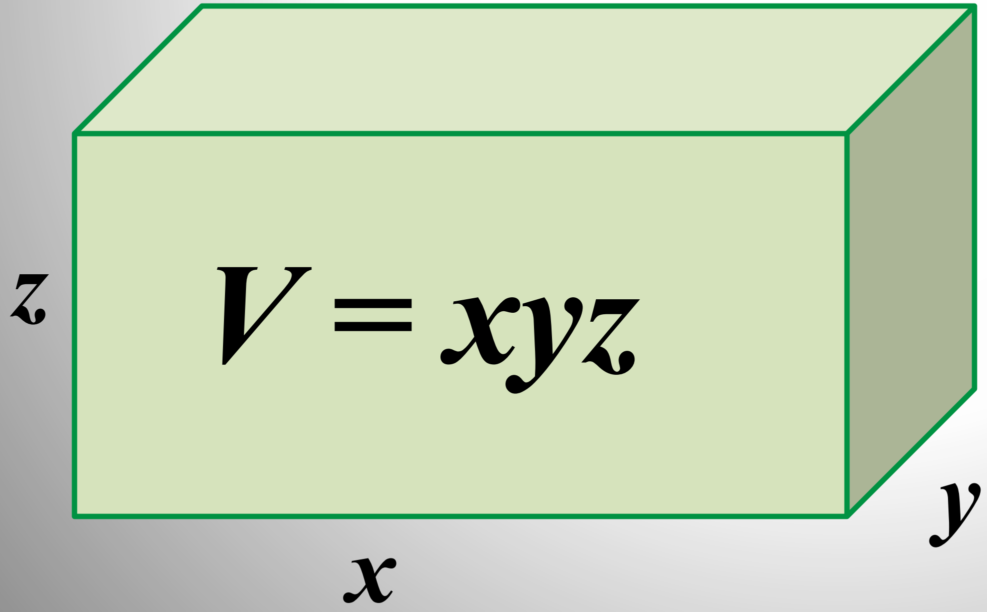
$y = f(x, y, z, \ldots t)$

называется такая зависимость, при которой <u>каждому</u> значению аргументов $x, y, z, \ldots, t$ ***соответствует <u>единственное</u> значение переменной y***

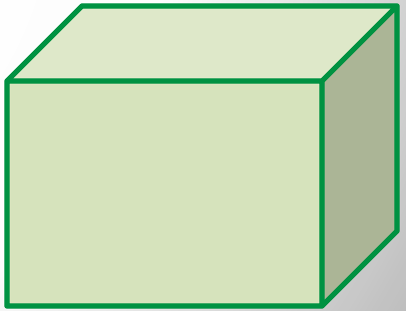
Определение функции нескольких переменных



$$S = xy$$



$$V = xyz$$



D(y) и E(y) функции

Область определения функции – D(y)

D(f) «domain» - «область»

Значения аргумента, при котором функция имеет смысл

Область значений функции – E(y)

E(f) «emsemble» «ансамбль, множество»

Найти D(y) и E(y) функции:

1. $y = 3x-5$	$x \in R$	$y \in R$
2. $y = -2x/3$	$x \in R$	$y \in R$
3. $y = 3/2x$	$x \in (-\infty;0)U(0;\infty)$	$y \in (-\infty;0)U(0;\infty)$
4. $y = \sqrt{1-2x}$	$x \in (-\infty;0,5]$	$y \in [0;\infty)$
5. $y = 11\sin x$	$x \in R$	$y \in [-11;11]$
6. $y = \lg(4x-1)$	$x \in (0,25;\infty)$	$y \in R$

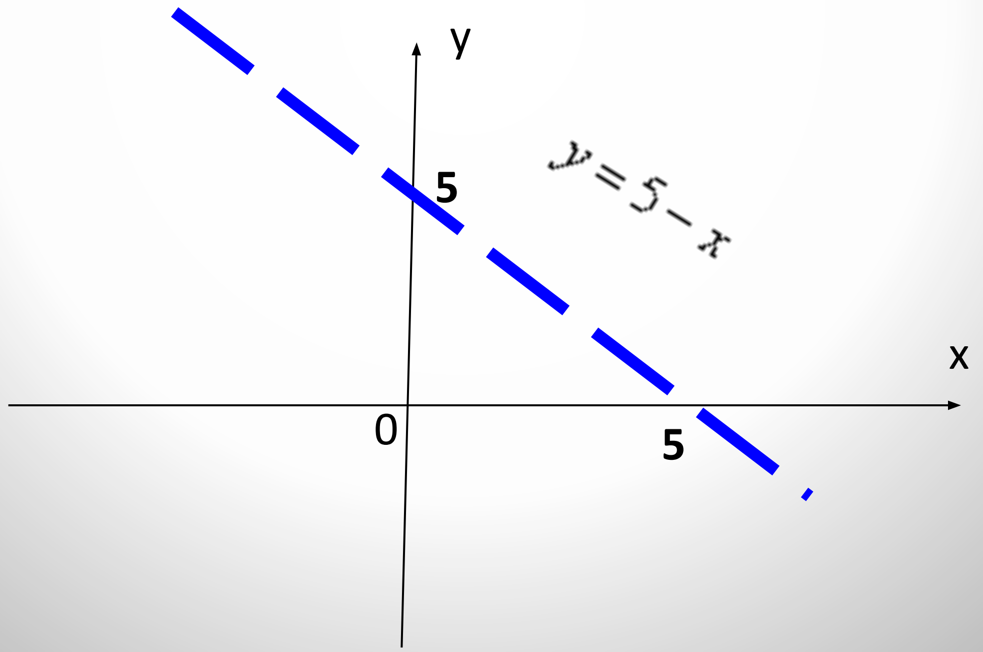
Найти область определения функции $z = \dfrac{x^2 + 4xy - 3}{x + y - 5}$

Решение: так как знаменатель не может обращаться в ноль, то:

$$x + y - 5 \neq 0$$

$$y \neq 5 - x$$

Ответ: вся координатная плоскость XOY кроме точек, принадлежащих прямой $y = 5 - x$



Найти область определения функции $f(x;y) = \sqrt{3y+2}$

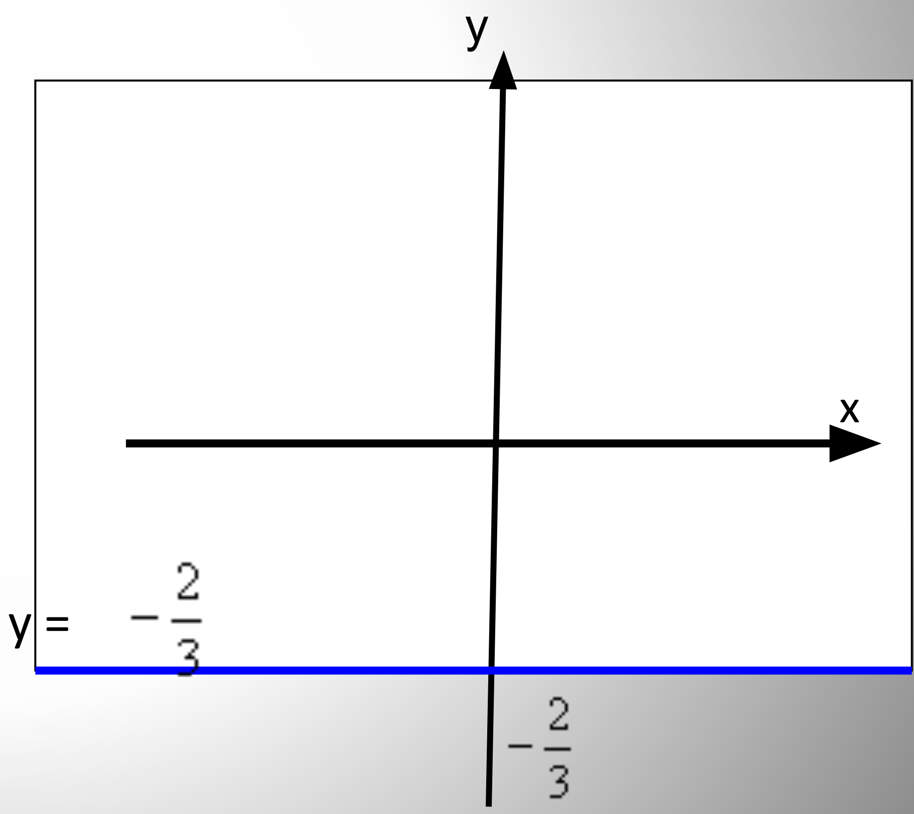
Решение: подкоренное выражение должно быть неотрицательным:

$$3y + 2 \ge 0$$

$$3y \ge -2$$

$$y \ge -\frac{2}{3}$$

Ответ: полуплоскость $y \ge -\frac{2}{3}$



Найти область определения функции и изобразить её на чертеже

$$z = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2 - 5}}$$

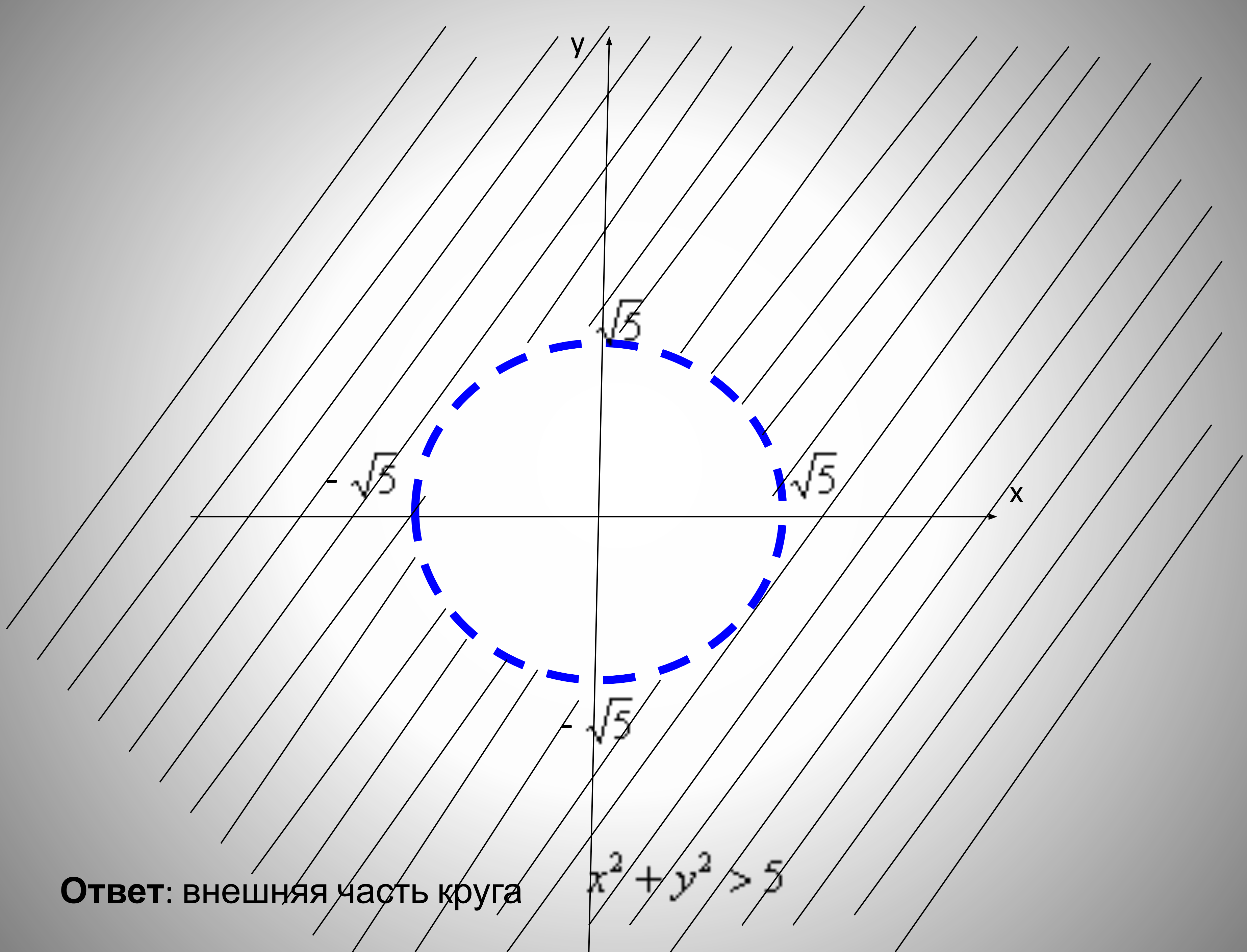
Решение: подкоренное выражением должно быть неотрицательным:

$x^2 + y^2 - 5 \geq 0$ и, учитывая, что знаменатель не может обращаться в ноль, неравенство становится строгим:

$$x^2 + y^2 - 5 > 0$$

$$x^2 + y^2 > 5$$

Уравнение $x^2 + y^2 = 5$ определяет **окружность** с центром в начале координат радиуса $\sqrt{5}$,
которая делит координатную плоскость на **две** части – «внутренность» и «внешность» круга.
Так как неравенство у нас ***строгое,*** то сама окружность заведомо не войдёт в область определения
и поэтому её нужно провести ***пунктиром.***



Ответ: внешняя часть круга

Определение . Совокупность пар (x,y) значений x и y, при которых определяется функция $z = f(x, y)$, называется ***областью определения*** или ***областью существования*** этой функции.

Геометрически: если каждую пару значений x и y изобразить точкой $M(x, y)$ в плоскости Oxy, то область определения функции изобразится в виде некоторой совокупности точек на плоскости.

Для функции одной переменной область определения – промежуток на оси Ох.

Для функции двух **переменных** *z=f(x,y)* область определения представляет некоторую совокупность **точек плоскости**, а для функции трех переменных ***u = f (x,y,z)*** –некоторую совокупность **точек пространства**.

Геометрический смысл функции 2-х переменных

Функции одной переменной ***y=f(x)*** соответствует определённая линия на плоскости (например, $y = x^2$ – всем знакомая школьная парабола), то график функции двух переменных ***z=f(x,y)*** располагается в трёхмерном пространстве.

На практике чаще всего приходится иметь дело с **<u>поверхностью</u>**, но иногда график функции может представлять собой, например, пространственную прямую (прямые) либо даже единственную точку.

Определите какие из кривых являются графиками функций

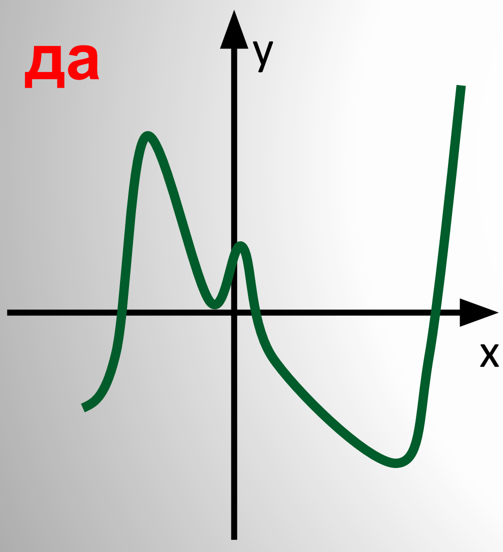


Рис 1

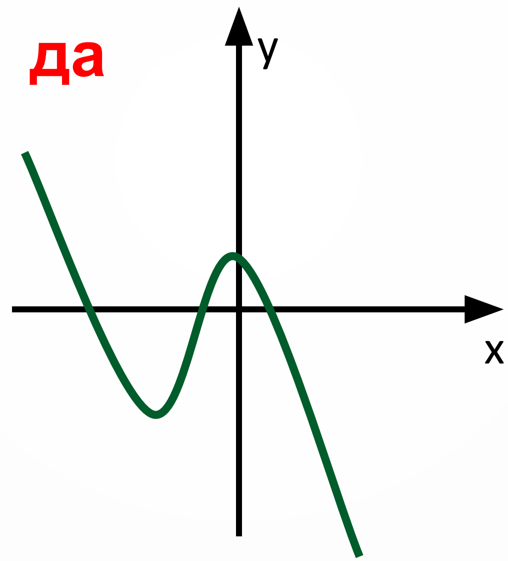


Рис 2

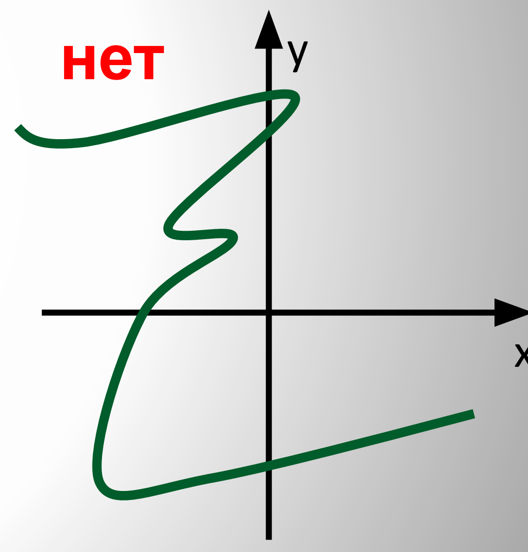
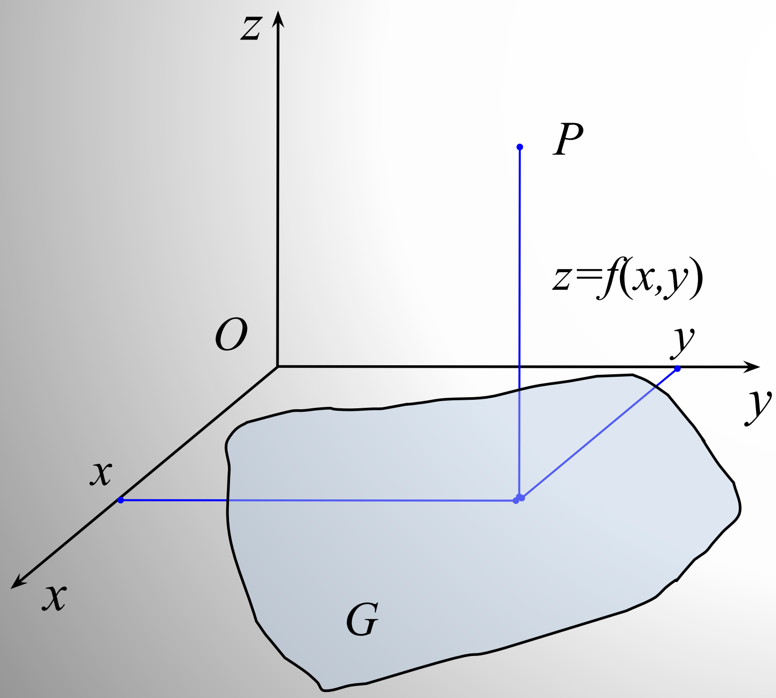


Рис 3

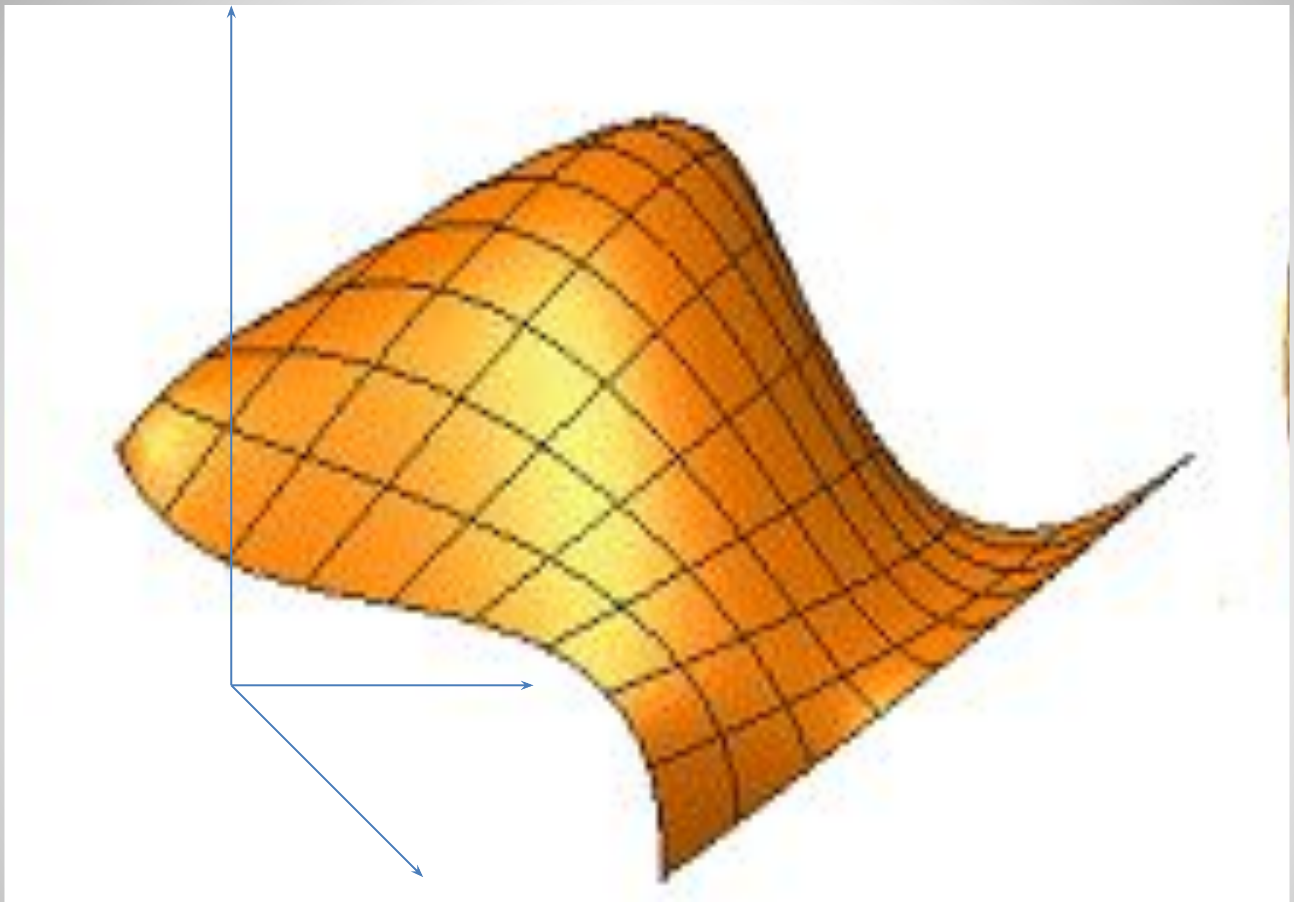
Геометрическое изображение функции нескольких переменных

Рассмотрим функцию $z = f(x, y)$,

определенную в области G на плоскости Oxy, и систему прямоугольных декартовых координат $Oxyz$



Получили в пространстве точку P с координатами $x, y, z = f(x, y)$.

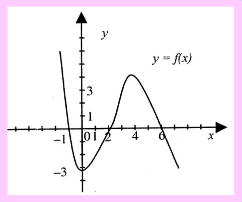


!!! Уравнение $z = f(x, y)$ в пространстве определяет некоторую поверхность.
Таким образом, графиком функции двух переменных является поверхность, проектирующаяся на плоскость Oxy в область определения функции.

Способы задания функций

1. Аналитический
2. Графический
3. Табличный
4. Описательный

1. $y=2x-5;$

2. 

3.

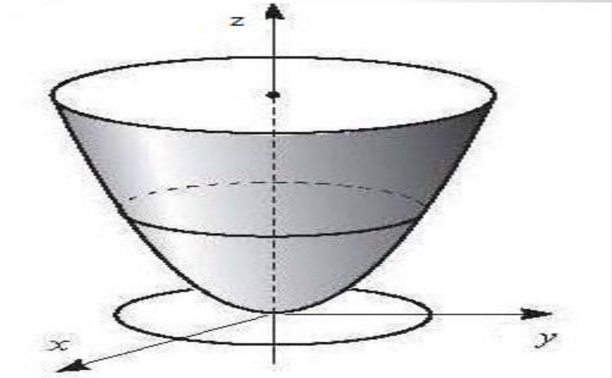
x	1	2	5	6
y	1	4	25	36

4. Функция на [-2; -1] возрастает,
на [0; 4] убывает,
на [-1; 0] равна 5.

Способы задания функции двух переменных

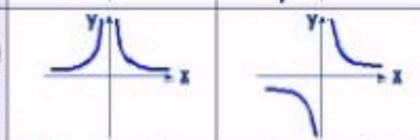
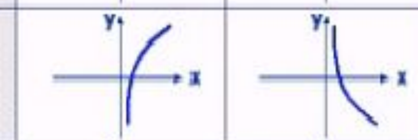
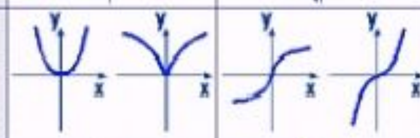
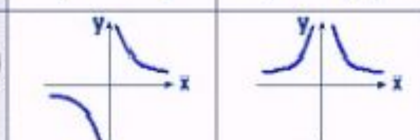
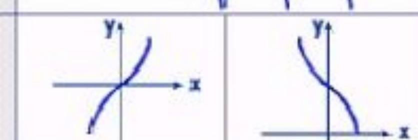
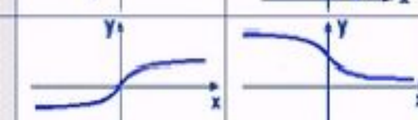
1. ***Аналитический***
2. ***Графический***
3. ***Табличный***
4. ***Описательный***

$$z = f(x, y)$$



	0	1	1,5	2	3
1	0	1	1,5	2	3
2	0	2	3	4	6
3	0	3	4,5	6	9
4	0	4	6	8	12

Итоговая таблица
«Основные элементарные функции, их области определения и графики»

функция ($n, m, k \in N$)	область определения	график	функция	область определения	график
x^n	$(-\infty, \infty)$		a^x	$(-\infty, \infty)$	
$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ $(x \neq 0)$		$\log_a x$	$(0, \infty)$	
$x^{\frac{m}{2k-1}}$	$(-\infty, \infty)$		$Sin\ x$, $Cos\ x$	$(-\infty, \infty)$	
$x^{-\frac{m}{2k-1}}$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ $(x \neq 0)$		$tg\ x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$	
$x^{\frac{m}{2k}}$	$[0, \infty)$		$ctg\ x$	$(x \neq n\pi)$	
$x^{-\frac{m}{2k}}$	$(0, \infty)$		$arcSin\ x$, $arcCos\ x$	$[-1, 1]$	
! Приведенная информация будет применяться в курсе неоднократно			$arctg\ x$, $arcctg\ x$	$(-\infty, \infty)$	

ХАРАКТЕРИСТИКИ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

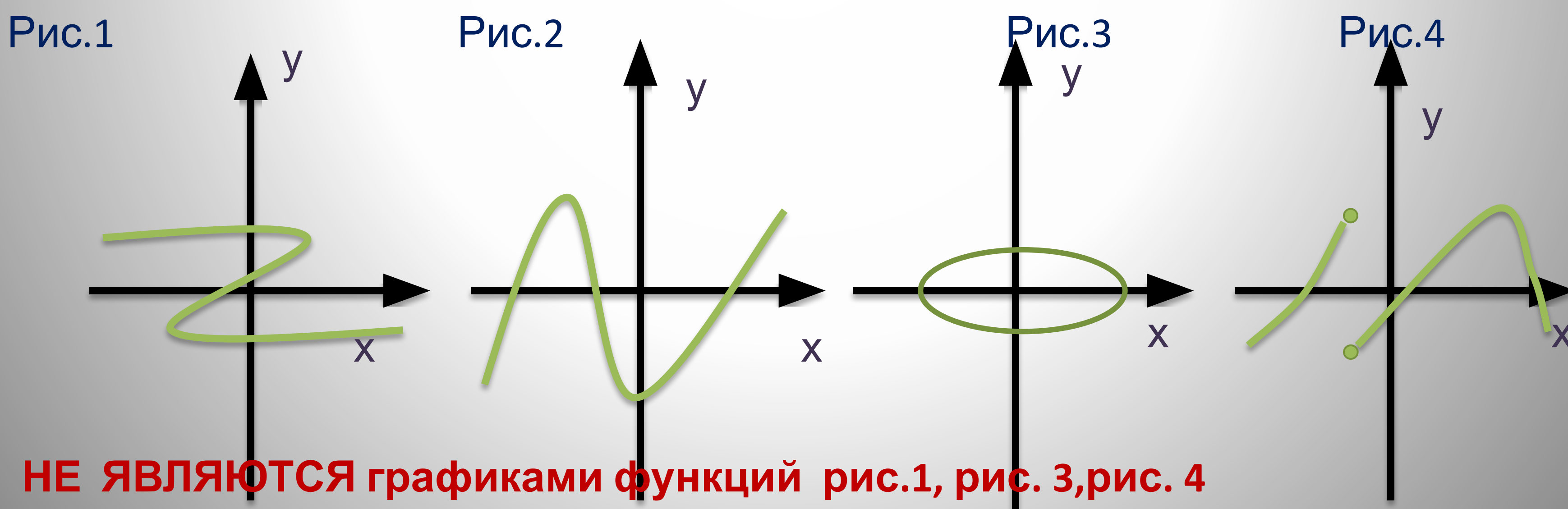
1. Область определения
2. Область значений
3. Нули функции
4. Четность
5. Промежутки знакопостоянства
6. Непрерывность
7. Монотонность
8. Наибольшее и наименьшее значения
9. Ограниченность
10. Выпуклость

График функции

Графиком функции f называют <u>множество</u> всех <u>точек</u> <u>(x; y)</u> координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты равны соответствующим значениям функции.

<u>Задание 2</u>.

Определите, какой из данных графиков является графиком функции



НЕ ЯВЛЯЮТСЯ графиками функций рис.1, рис. 3,рис. 4