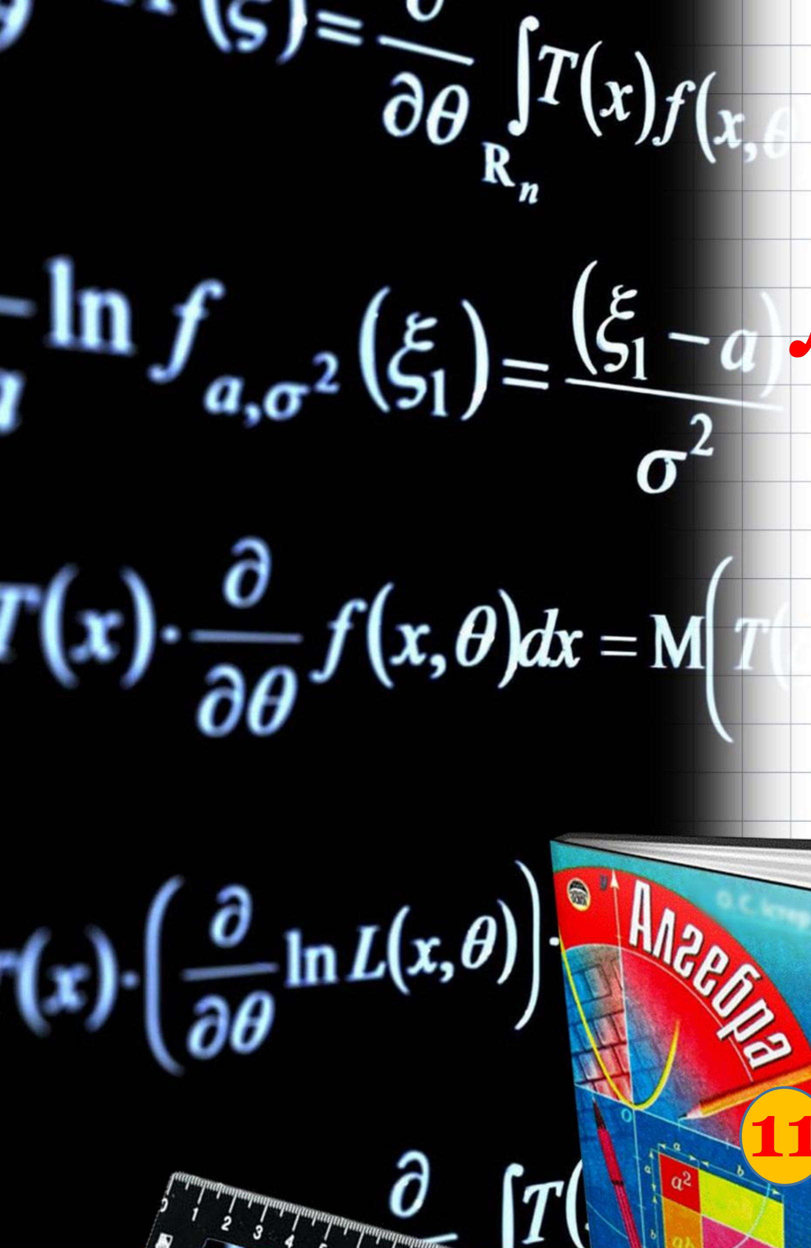
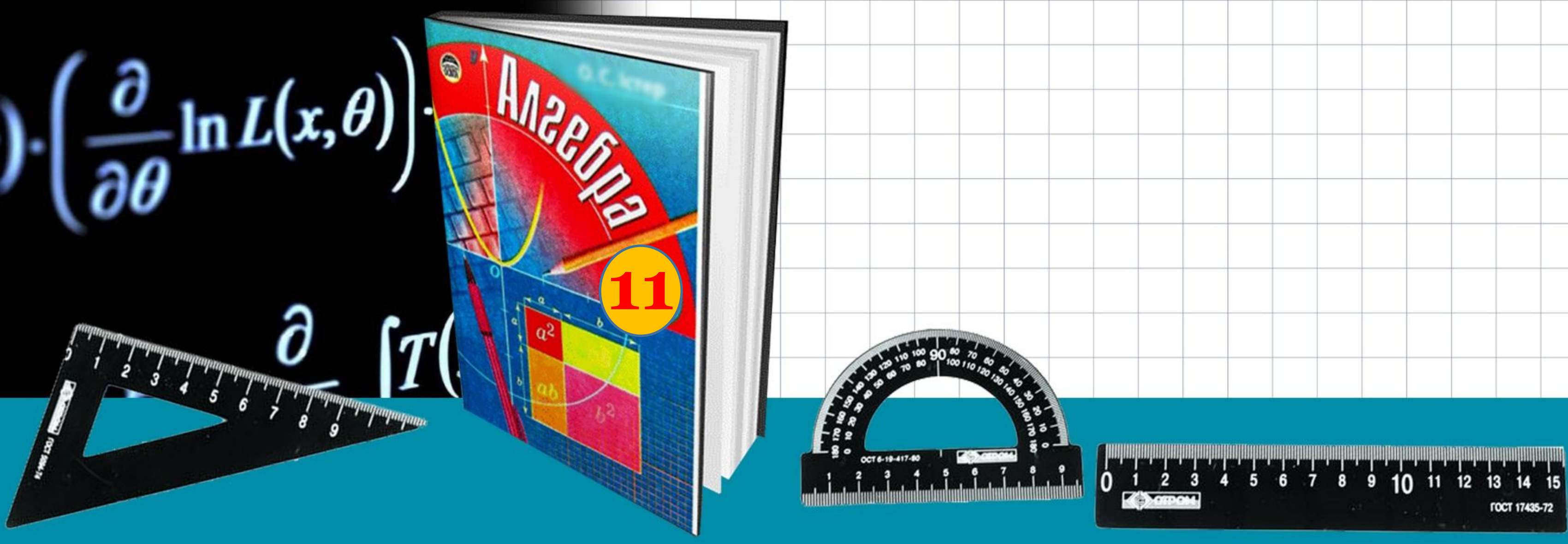
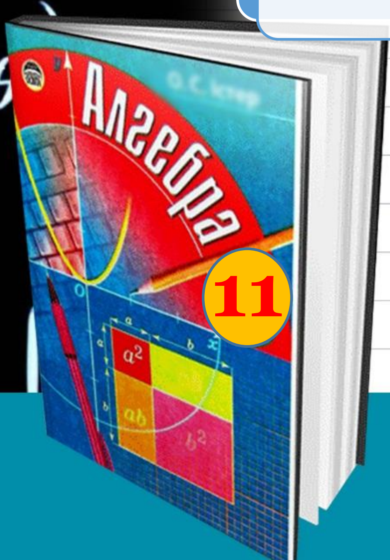


Решение логарифмических неравенств



Методы решения логарифмических неравенств

- **Нестандартные**
  - **Метод рационализации**
  - **Методы с использованием свойств функции**
    - **область определения, область значений**
    - **ограниченность**
    - **монотонность**
- **Стандартные**



Метод рационализации

Суть **метода рационализации** *для решения логарифмических неравенств* (**метода замены множителя**) *состоит в том, что в ходе решения осуществляется переход от неравенства, содержащего* **логарифмические** *выражения,* *к* **равносильному рациональному** *неравенству (или равносильной системе рациональных неравенств)*

Рассмотрим неравенства:

$$\log_a f(x) > 0;$$

$$\log_a f(x) - \log_a g(x) > 0;$$

$$\log_{a(x)} f(x) > 0;$$

$$\log_{a(x)} f(x) - \log_{a(x)} g(x) > 0$$

число

функция

$$1)\ \log_a f(x) > 0, a > 0, a \neq 1.$$

$$\log_a f(x) > \log_a 1.$$

Если $a > 1$, то $f(x) > 1$, значит,

$$(a-1)\cdot(f(x)-1) > 0;$$

$\log_a t$ возрастает на R_+

Имеем : $a - 1 > 0;\ f(x) - 1 > 0.$

Если $0 < a < 1$, то $0 <$

$$(a-1)\cdot(f(x)-1) > 0.$$

$\log_a t$ убывает на R_+

Имеем : $a - 1 < 0;\ f(x) - 1 < 0.$

Следовательно :

$$\log_a f(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)\cdot(f(x)-1) > 0, \\ f(x) > 0. \end{cases}$$

$$\log_a f(x) - \log_a g(x) > 0, a > 0, a \neq 1.$$

$$\log_a f(x) > \log_a g(x),$$

Если $a > 1$, то $f(x) > g(x) > 0$, тогда

$$(a-1)(f(x) - g(x)) > 0,$$

Если $0 < a < 1$, то $0 < f(x)$

$$(a-1)(f(x) - g(x)) > 0.$$

Знак «сохраняется».

Имеем :

$$\log_a f(x) - \log_a g(x) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)(f(x) - g(x)) > 0, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

$$\boxed{(a-1)\cdot(f(x)-1)}$$

$$\log_a f(x) > 0;$$

$$\log_a f(x) < 0;$$

$$\boxed{(a-1)(f(x)-g(x))}$$

$$\log_a f(x) - \log_a g(x) > 0;$$

$$\log_a f(x) - \log_a g(x) < 0;$$

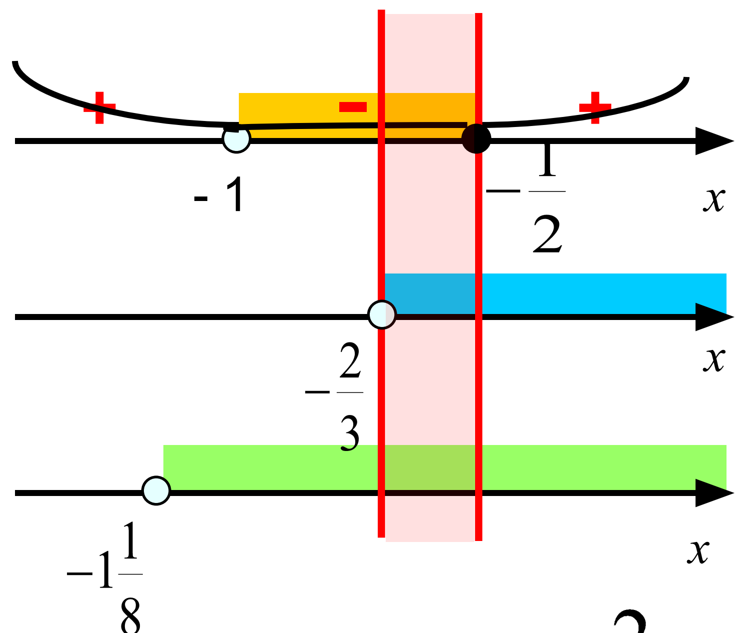
При решении учитываем ОДЗ!

Решим неравенство:

$$\boxed{\frac{\log_5(6x+4)}{\log_{0,7}(8x+9)} \geq 0;}$$

$$\begin{cases} \dfrac{(5-1)\cdot(6x+4-1)}{(0,7-1)\cdot(8x+9-1)} \geq 0, \\ 8x+9 \neq 1, \\ 6x+4>0, \\ 8x+9>0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{6x+3}{8x+8} \leq 0, \\ x > -\dfrac{2}{3}, \\ x > -\dfrac{9}{8}; \end{cases}$$



$$\text{Ответ}: \left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{2}\right]$$

$$\log_{a(x)} f(x) > 0.$$

Если $\underline{a(x) > 1}$, то $f(x) > 1$,
тогда $(a(x)-1)\cdot(f(x)-1) > 0$.

Если $\underline{0 < a(x) < 1}$, то $0 < f(x) < 1$,
тогда $(a(x)-1)\cdot(f(x)-1) > 0$;

Имеем:

$$\boxed{\log_{a(x)} f(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (a(x)-1)\cdot(f(x)-1) > 0, \\ a(x) > 0, \\ a(x) \neq 1, \\ f(x) > 0; \end{cases}}$$

$$\log_{a(x)} f(x) - \log_{a(x)} g(x) > 0,$$

$$\log_{a(x)} f(x) > \log_{a(x)} g(x)$$

Если $a(x) > 1$, то $f(x) > g(x) > 0$,
тогда $(a(x)-1)\cdot(f(x)-g(x)) > 0$.

Если $0 < a(x) < 1$, то $0 < f(x) < g(x)$,
тогда $(a(x)-1)\cdot(f(x)-g(x)) > 0$;

Имеем:

$$\log_{a(x)} f(x) - \log_{a(x)} g(x) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (a(x)-1)(f(x)-g(x)) > 0, \\ a(x) > 0, \\ a(x) \neq 1, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Решим неравенство: $\log_{2x+3} x^2 < 1$

ОДЗ:

$$\begin{cases} 2x+3>0, \\ 2x+3 \neq 1, \\ x^2 > 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x > -\dfrac{3}{2}, \\ x \neq -1, \\ x \neq 0. \end{cases}$$

$$\log_{2x+3} x^2 < 1;$$

$$\log_{2x+3} x^2 - 1 < 0;$$

$$\log_{2x+3} x^2 - \log_{2x+3}(2x+3) < 0;$$

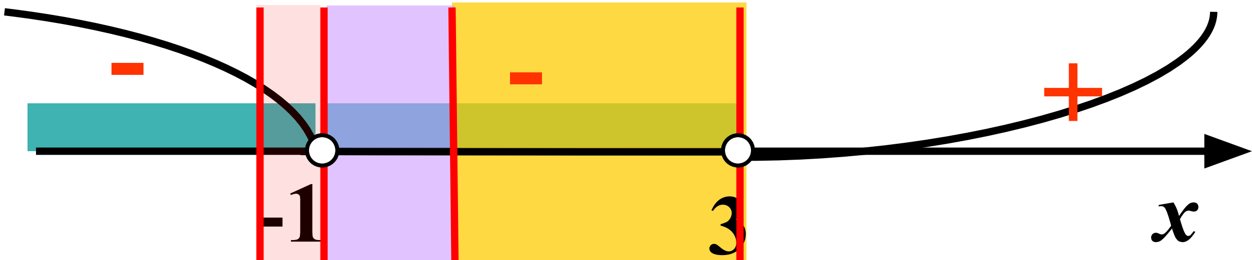
$$\log_{2x+3} x^2 - \log_{2x+3}(2x+3) < 0;$$

-1

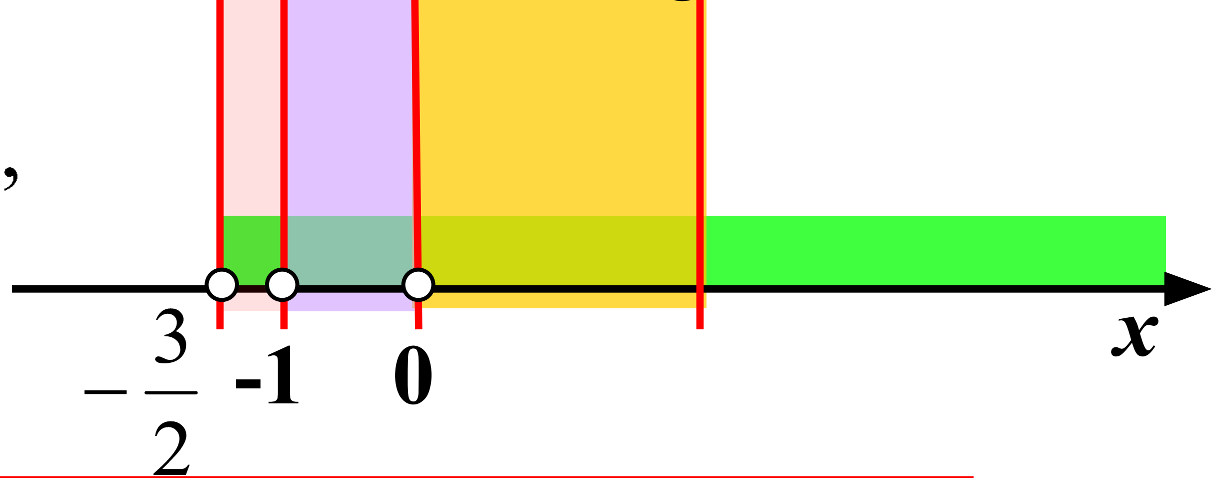
$$\begin{cases} (2x+3-1)\cdot(x^2-2x-3) < 0, \\ x > -\dfrac{3}{2}; \\ x \neq -1; \\ x \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2x+2)(x+1)(x-3) < 0, \\ x > -\dfrac{3}{2}; \\ x \neq -1; \\ x \neq 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(x+1)(x+1)(x-3)<0, \\ x > -\dfrac{3}{2}; \\ x \neq -1; \\ x \neq 0. \end{cases}$$



$$\begin{cases} (x+1)^2(x-3)<0, \\ x > -\dfrac{3}{2}; \\ x \neq -1; \\ x \neq 0. \end{cases}$$



Ответ : $(-\frac{3}{2};-1)\cup(-1;0)\cup(0;3).$

Решим неравенство: $\log_{2x-1} \dfrac{x^4+2}{2x+1} \geq 1;$

ОДЗ:

$$\begin{cases} \dfrac{x^4+2}{2x+1} > 0, \\ 2x-1 > 0, \\ 2x-1 \neq 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x > -\dfrac{1}{2}, \\ x > \dfrac{1}{2}, \\ x \neq 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x > \dfrac{1}{2}, \\ x \neq 1; \end{cases}$$

$$\log_{2x-1}\frac{x^4+2}{2x-1}\ge 1;$$

$$\log_{2x-1}\frac{x^4+2}{2x+1}-\log_{2x-1}(2x-1)\ge 0;$$

-1

$$(2x-1-1)\cdot\left(\frac{x^4+2}{2x+1}-(2x-1)\right)\ge 0;$$

$$(2x-2)\cdot\left(\frac{x^4+2-4x^2+1}{2x+1}\right)\ge 0;$$

$$(x-1)\cdot\left(\frac{x^4-4x^2+3}{2x+1}\right)\ge 0;$$

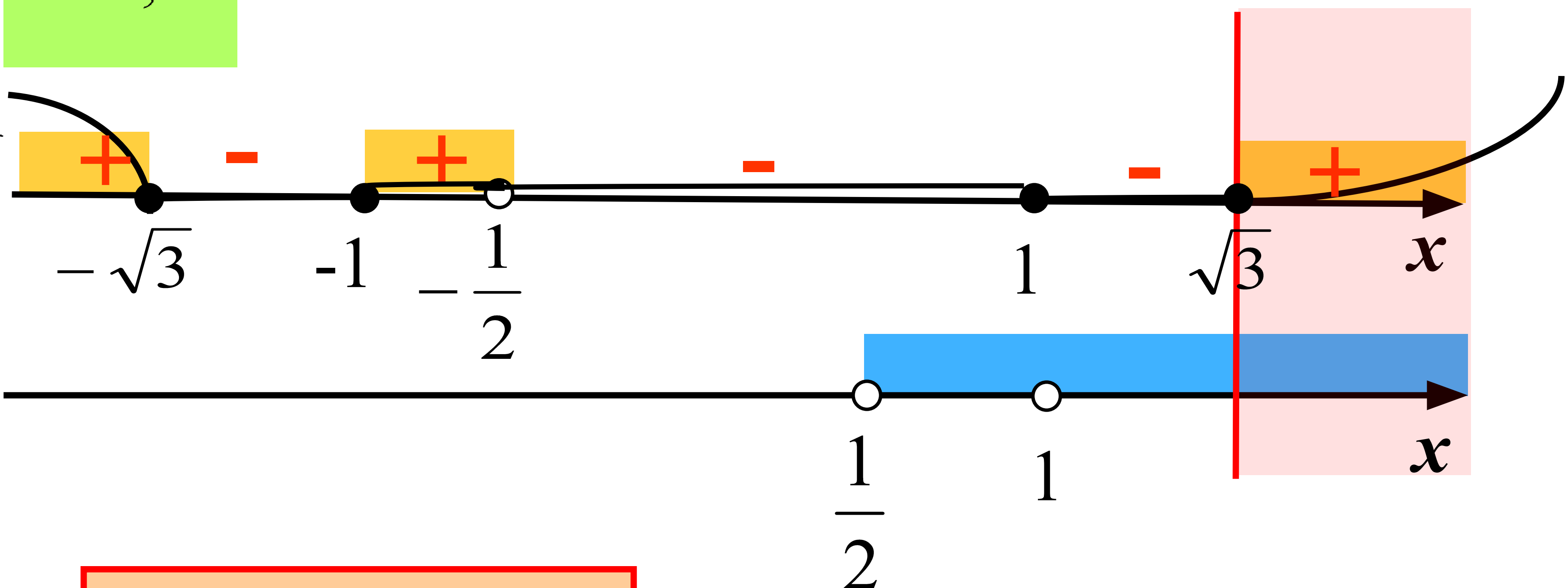
$$\begin{cases} (x-1)\cdot\left(\dfrac{x^4-4x^2+3}{2x+1}\right)\ge 0; \\ x>\dfrac{1}{2}, \\ x\ne 1; \end{cases}$$

Решаем методом интервалов.

1) $x \ne -\frac{1}{2}$

2) *Нули функции* :

$$\left[\begin{array}{l} x=1, \\ x^2=1, \\ x^2=3; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=\pm 1, \\ x=\pm\sqrt{3}. \end{array}\right.$$



Ответ : $[\sqrt{3};\infty)$

Решить неравенство :

$$\log_{\frac{1}{49}}(26-5x)\cdot\log_{6-x}\frac{1}{7}\geq 1$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} 26-5x>0, \\ 6-x>0, \\ 6-x\neq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x<\dfrac{26}{5}, \\ x<6, \\ x\neq 5; \end{cases} \quad \begin{cases} x<\dfrac{26}{5}, \\ x\neq 5. \end{cases}$$

$$\log_{\frac{1}{49}}(26-5x)\cdot\log_{6-x}\frac{1}{7}\ge 1;$$

$$\log_{7^{-2}}(26-5x)\cdot\log_{6-x}7^{-1}\ge 1;$$

$$-\frac{1}{2}\log_7(26-5x)\cdot(-\log_{6-x}7)\ge 1,;$$

$2\log_7(6-x)$

$$\frac{\log_7(26-5x)}{2}\cdot\frac{1}{\log_7(6-x)}-1\ge 0;$$

$$\frac{\log_7(26-5x)-2\log_7(6-x)}{2\log_7(6-x)}\ge 0;$$

$$\frac{\log_7(26-5x)-\log_7(6-x)^2}{2\log_7(6-x)}\ge 0;$$

$$\frac{\log_7(26-5x)-\log_7(6-x)^2}{\log_7(6-x)} \ge 0,$$

$$\frac{26-5x-(6-x)^2}{6-x-1} \ge 0,$$

7-1>0

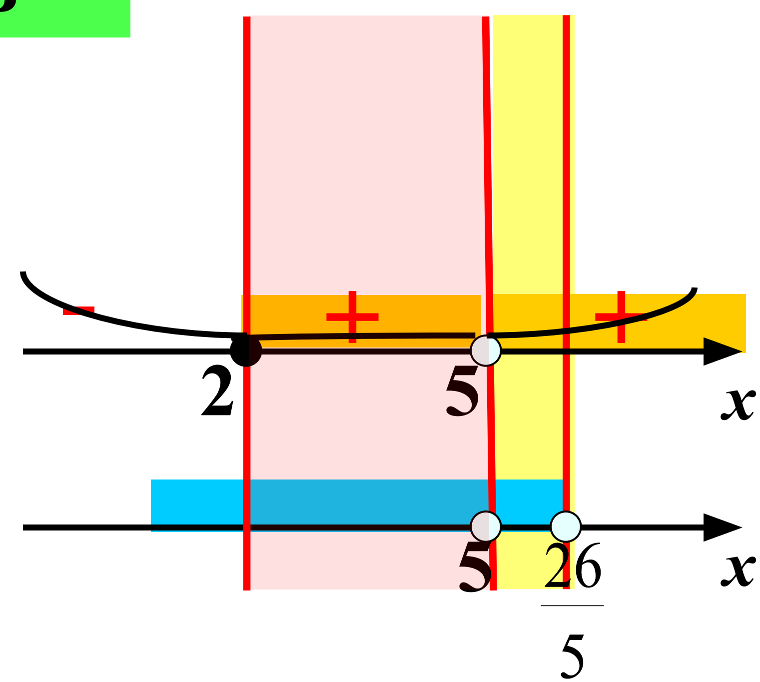
$$\frac{26-5x-36+12x-x^2}{5-x} \ge 0,$$

$$\frac{x^2-7x+10}{x-5} \ge 0,$$

$$\frac{(x-2)(x-5)}{x-5} \ge 0,$$

$$\begin{cases} \dfrac{(x-2)(x-5)}{x-5} \geq 0, \\ x < \dfrac{26}{5}, \\ x \neq 5. \end{cases}$$

ОДЗ



$$\text{Ответ}: [2;5) \cup \left(5; \frac{26}{5}\right).$$

Решите неравенства:

Практикум

1) $\log_{x^2}(x-1)^2 \le 1;$

2) $\log_{0,25x^2}\left(\dfrac{6-x}{4}\right) \le 1;$

3) $\log_{3x}\dfrac{1}{27}\cdot\log_3 27x+9 \ge 0;$

4) $\log_{x+5}\left(\dfrac{3-x}{x}\right)^4+\log_{x+5}\dfrac{x}{x-3} \le 3;$

5) $\log_{x+8}\left(\dfrac{7-x}{x+1}\right)^2 \le 1-\log_{x+8}\dfrac{x+1}{x-7};$

6) $\log_{6-x}\dfrac{x^4}{x^2-12x+36} \le 0;$

$$\log_{x^2}(x-1)^2 \le 1;$$

$$\begin{cases} (x^2-1)\cdot\left((x-1)^2-x^2\right) \le 0, \\ x \ne 0, \\ x \ne 1, \\ x \ne -1. \end{cases}$$

Ответ $: (-1;0) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right] \cup (1;\infty).$

$$\log_{0,25x^2}\left(\frac{6-x}{4}\right)\le 1$$

$$\begin{cases}(0{,}25x^2-1)\cdot\left(\dfrac{6-x-x^2}{4}\right)\le 0,\\ x<6,\\ x\ne 0,\\ x\ne 2,\\ x\ne -2.\end{cases}$$

Ответ : $(-\infty;-3]\cup(-2;0)\cup(0;2)\cup(2;6)$.

$$\log_{3x}\frac{1}{27}\cdot\log_3 27x+9\geq 0$$

$$\begin{cases} -3\log_{3x}3\cdot\left(2+\log_3 3x\right)+9\geq 0, \\ x>0, \\ x\neq\dfrac{1}{3}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_{3x}3-1\leq 0, \\ x>0, \\ x\neq\dfrac{1}{3}; \end{cases} \qquad \begin{cases} (3x-1)(3-3x)\leq 0, \\ x>0, \\ x\neq\dfrac{1}{3}; \end{cases}$$

$$\text{Ответ}:\left(0;\frac{1}{3}\right)\cup[1;\infty).$$

$$\log_{x+5}\left(\frac{3-x}{x}\right)^4+\log_{x+5}\frac{x}{x-3}\le 3;$$

$$\begin{cases} 3\log_{x+5}\dfrac{x-3}{x}\le 3, \\ \left[\begin{aligned} &x<0, \\ &x>3; \end{aligned}\right. \\ x>-5, \\ x\ne -4; \end{cases}$$

Т.к. $\dfrac{x}{x-3}>0$, то

$$\log_{x+5}\left(\frac{3-x}{x}\right)^4=4\log_{x+5}\left|\frac{3-x}{x}\right|=4\log_{x+5}\frac{x-3}{x}.$$

$$\begin{cases} (x+5-1)\cdot\left(\dfrac{x-3}{x}-x-5\right)\le 0, \\ \left[\begin{aligned} &x<0, \\ &x>3; \end{aligned}\right. \\ x>-5, \\ x\ne -4; \end{cases}$$

$$\text{Ответ}: (-5;-4)\cup[-3;-1]\cup(3;\infty).$$

$$\log_{x+8}\left(\frac{7-x}{x+1}\right)^2 \le 1-\log_{x+8}\frac{x+1}{x-7};$$

$$2\log_{x+8}\frac{x-7}{x+1} \le 1+\log_{x+8}\frac{x-7}{x+1};$$

$$\log_{x+8}\frac{x-7}{x+1}-1 \le 0;$$

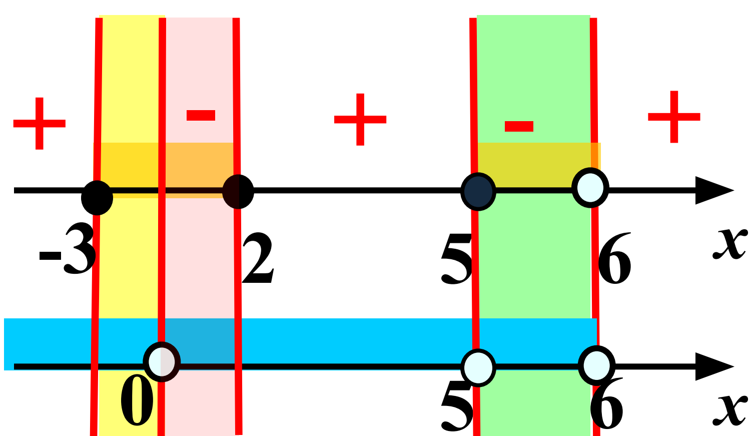
$$\begin{cases} (x+7)\cdot\left(\dfrac{x^2+8x+15}{x+1}\right) \ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} x<-1, \\ x>7; \end{array}\right. \\ x>-8, \\ x \ne -7; \end{cases}$$

Ответ : $(-8;-7)\cup[-5;-3]\cup(7;\infty)$.

$$\log_{6-x}\frac{x^4}{x^2-12x+36}\le 0;$$

$$\log_{6-x}\left(\frac{x^2}{x-6}\right)^2\le 0;\qquad 2\log_{6-x}\left|\frac{x^2}{x-6}\right|\le 0;$$

$$\begin{cases}\log_{6-x}\dfrac{x^2}{6-x}\le 0,\\ 6-x>0,\\ 6-x\ne 1,\\ x\ne 0;\end{cases}\qquad \begin{cases}(6-x-1)(\dfrac{x^2}{6-x}-1)\le 0,\\ x<6,\\ x\ne 5,\\ x\ne 0;\end{cases}\qquad \begin{cases}(5-x)(\dfrac{x^2+x-6}{6-x})\le 0,\\ x<6,\\ x\ne 5,\\ x\ne 0;\end{cases}$$



Ответ : $[-3;0)\cup(0;2]\cup(5;6)$.

Для тех, кто боится «модулей» - 2 способ:

$$\log_{6-x}\frac{x^4}{x^2-12x+36}\le 0;$$

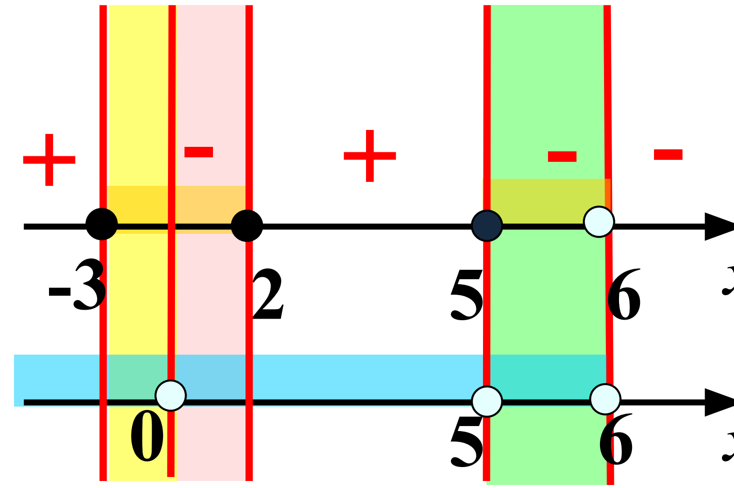
$$\log_{6-x}\left(\frac{x^2}{x-6}\right)^2\le 0;$$

$$\begin{cases}(5-x)\left(\frac{x^2}{x-6}-1\right)\left(\frac{x^2}{x-6}+1\right)\le 0,\\ x<6,\\ x\ne 5,\\ x\ne 0;\end{cases}$$

D<0, $x^2-x+6>0.$

$$\begin{cases}(5-x)\left(\frac{x^2-x+6}{x-6}\right)\left(\frac{x^2+x-6}{x-6}\right)\le 0,\\ x<6,\\ x\ne 5,\\ x\ne 0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{(5-x)(x^2+x-6)}{(x-6)^2}\le 0,\\ x<6,\\ x\ne 5,\\ x\ne 0;\end{cases}$$

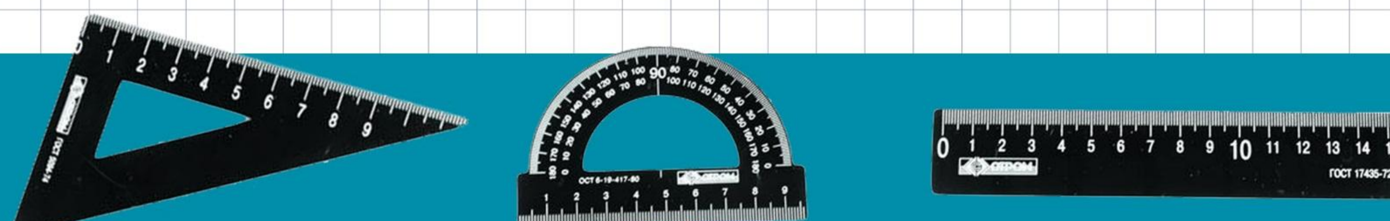


Ответ: $[-3;0)\cup(0;2]\cup(5;6).$

Методы с использованием свойств функции

1) Использование неотрицательности функций

$$\mathbf{I.}\ \begin{cases} f(x)+g(x)\geq 0, \\ f(x)\geq 0, \\ g(x)\geq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x\in D(f)\cap D(g).$$

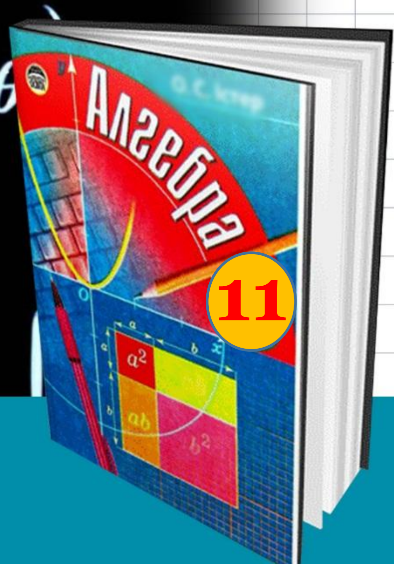


II. $\begin{cases} f(x)+g(x)>0, \\ f(x)\geq 0, \\ g(x)\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in D(f)\cap D(g), \\ x\neq x_k, \end{cases}$

где x_k – решения системы $\begin{cases} f(x)=0, \\ g(x)=0. \end{cases}$

III. $\begin{cases} f(x)+g(x)\leq 0, \\ f(x)\geq 0, \\ g(x)\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)+g(x)=0, \\ f(x)\geq 0, \\ g(x)\geq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=0, \\ g(x)=0. \end{cases}$



Решите неравенство $|x-1|+\log_2(x^2-2x+5)-2\le 0$

$$f_1(x)+f_2(x)\le 0,$$

где $f_1(x)=|x-1|, \quad f_2(x)=\log_2(x^2-2x+5)-2.$

1) $ООН: \ x^2-2x+5>0 \ \Leftrightarrow \ x\in R.$

2) $x^2-2x+5=(x-1)^2+4\ge 4 \ \Rightarrow \ f_2(x)\ge 0.$

3) (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x)+f_2(x)\le 0, \\ f_1(x)\ge 0, \ f_2(x)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x)=0, \\ f_2(x)=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} |x-1|=0, \\ \log_2(x^2-2x+5)-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, \\ \log_2 4-2=2-2=0 \end{cases}$$

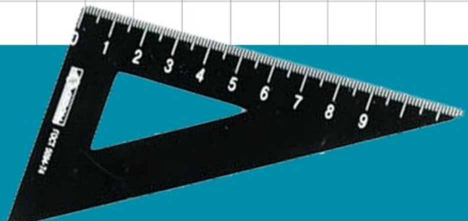
$\Leftrightarrow \ x=1$

Ответ: $\{1\}$

Методы с использованием свойств функции

2) Метод мини-максов (метод оценки)

$$\begin{cases} f(x)\le g(x), \\ f(x)\ge A, \\ g(x)\le A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)= g(x), \\ f(x)\ge A, \\ g(x)\le A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)= A, \\ g(x)= A. \end{cases}$$



Решите неравенство $7^{-|x-3|} \cdot \log_2(6x-x^2-7) \geq 1$

$$\Leftrightarrow \quad \log_2(6x-x^2-7) \geq 7^{|x-3|} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \geq g(x)$$

где $f(x) = \log_2(6x-x^2-7)$, $g(x) = 7^{|x-3|}$.

Найдем $E(f)$, $E(g)$.

1) $E(f) - ?$

а) $t = t(x) = -x^2 + 6x - 7 = -(x^2 - 6x + 7) = -(x-3)^2 + 2 \quad \Rightarrow \quad t \leq 2.$

б) $\begin{cases} f(t) = \log_2 t, \\ t \in (0;\, 2]. \end{cases}$

Так как функция $y = f(t)$ возрастает на промежутке $t \in (0;\, 2]$ $(a = 2 > 1)$,

то $E(f) = (-\infty;\, 1] \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \leq 1.$

2) $E(g)-?$

а) $z=|x-3|,\ z\geq 0;$ б) $\begin{cases} g(z)=7^z, \\ z\geq 0. \end{cases}$

Так как функция $y=g(z)$ возрастает на промежутке $z\in[0;+\infty)$ $(a=7>1)$, то $E(g)=[1;+\infty)$ $\Leftrightarrow$ $g(x)\geq 1$.

3) $\begin{cases} f(x)\geq g(x), \\ f(x)\leq 1, \\ g(x)\geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x), \\ f(x)\leq 1, \\ g(x)\geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=1, \\ g(x)=1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \log_2(6x-x^2-7)=1, \\ 7^{|x-3|}=1=7^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3, \\ \log_2 2=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=3.$$

Ответ: $\{3\}$.

Методы с использованием свойств функции

3) *Использование монотонности функций*

Принцип монотонности для неравенств

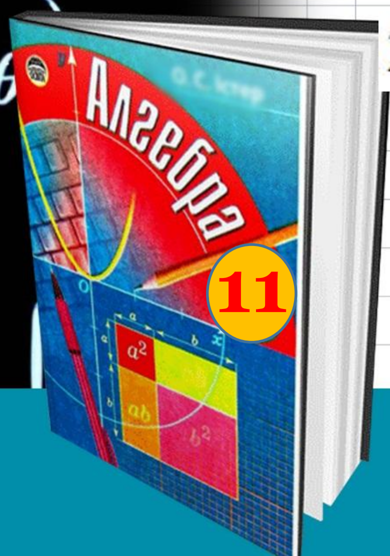
Пусть функция $y = f(t)$ определена и строго монотонна на промежутке M.

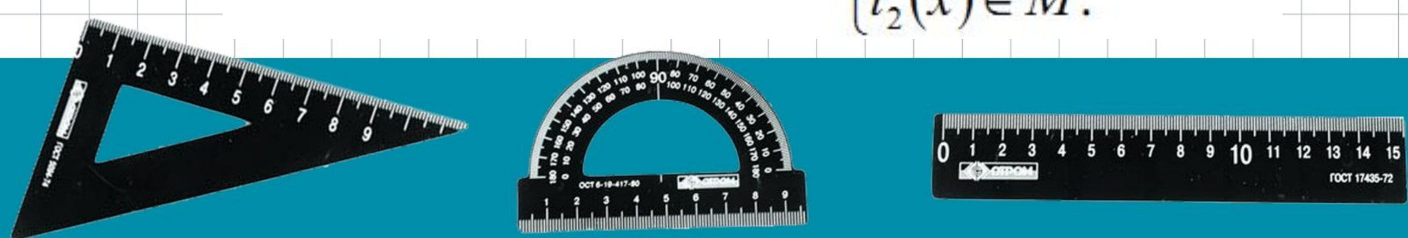
1. Если функция $y = f(t)$ возрастает на промежутке M, то

$$f(t_1(x)) - f(t_2(x)) \vee 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} t_1(x) - t_2(x) \vee 0, \\ t_1(x) \in M, \\ t_2(x) \in M. \end{cases}$$

2. Если функция $y = f(t)$ убывает на промежутке M, то

$$f(t_1(x)) - f(t_2(x)) \vee 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -(t_1(x) - t_2(x)) \vee 0, \\ t_1(x) \in M, \\ t_2(x) \in M. \end{cases}$$





3) Использование монотонности функций

Теорема о корне

1. Если в уравнении $f(x) = C = const$ функция $y = f(x)$ непрерывна и строго монотонна на множестве M, то уравнение имеет на M *не более одного корня*.

2. Если в уравнении $f(x) = g(x)$ функция $y = f(x)$ непрерывна и строго *возрастает*, а функция $y = g(x)$ непрерывна и строго *убывает* на множестве M, то уравнение имеет на M *не более одного корня*.

Решите неравенство $4\left(1+\log_3\left(x^2+3x-7\right)\right)\geq 18-3x-x^2$ (1)

$$(1) \quad \Leftrightarrow 4\log_3\left(x^2+3x-7\right)+\left(x^2+3x-14\right)\geq 0$$

1) $t=x^2+3x-7,\ x^2+3x-14=t-7.$ (2)

$$(2) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4\log_3 t+t-7\geq 0, \\ t>0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(t)\geq 0, \\ t>0. \end{cases}$$

где $f(t)=4\log_3 t+t-7$.

2) Функция $y=f(t)$ возрастает при $t>0$, как сумма двух возрастающих функций.

3) Так как $f(3)=4+3-7=0$, то по теореме о корне $t=3$ единственный корень уравнения $f(t)=0$.

4) $\begin{cases}(3)\\(4)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}f(t)\ge f(3),\\t>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t\ge 3,\\t>0\end{cases} \Leftrightarrow t\ge 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+3x-7\ge 3 \Leftrightarrow x^2+3x-10\ge 0 \Leftrightarrow (x+5)(x-2)\ge 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\le -5,\\x\ge 2.\end{array}\right.$

Ответ: $(-\infty;\,-5]\cup[2;\,+\infty)$.