Однородные тригонометрические уравнения

Здесь мы вспомним тригонометрические уравнения специального вида, довольно часто встречающиеся на практике.

Определение

- Уравнения вида $a\sin x + b\cos x = 0$ называют однородным тригонометрическим уравнением первой степени
- Уравнения вида $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$ называют однородным тригонометрическим уравнением второй степени

Сначала поговорим о решении однородных тригонометрических уравнений первой степени, причем рассмотрим только самый общий случай, когда оба коэффициента а и b отличны от нуля, так как, если а=о, то уравнение принимает вид b*cosx=0*, а получившееся уравнение cosx=0 отдельного обсуждения не заслуживает; аналогично при b=0 получаем *sinx=0*, что тоже не требует отдельного обсуждения.

Итак, дано уравнение $a\sin x+b\cos x=0$, где $a\neq0$, $b\neq0$. Разделив обе части уравнения почленно на $\cos x$, получим:

$$a\sin x/\cos x + b\cos x/\cos x = 0/\cos x$$

$$a\,tg x+b=0$$

В итоге приходим к простейшему тригонометрическому уравнению:

$$tg x= -b/a$$

Но внимание! Вообще-то, делить обе части уравнения на одно и то же выражение можно только в том случае, когда мы уверены, что это выражение нигде не обращается в нуль, потому что на нуль делить нельзя. Уверены ли мы, что в рассматриваемом случае *cosx* отличен от нуля? Давайте проанализируем. Предположим, что *cosx=0.* Тогда однородное уравнение *asinx+bcosx=0* примет вид *asinx=0*, то есть *sinx=0* (коэффициент *а* не равен нулю по условию). Получается, что и *cosx=0* и *sinx=0,* а это невозможно, так как *sinx* и *cosx* обращаются в нуль в различных точках.

Итак, в однородном тригонометрическом уравнении первой степени деление обеих частей уравнения на *cosx* – вполне благополучная операция.

Уравнение вида $a\sin mx + b\cos mx = 0$ тоже называют однородным тригонометрическим уравнением первой степени. Для их решения обе части уравнения делят почленно на $\cos mx$.

Примеры

- №1. *Решить уравнение* $2\sin x-3\cos x=0$

<u>Решение.</u> Разделив обе части уравнения почленно на $\cos x$, получим $2\operatorname{tg}x-3=0$

$$\operatorname{tg}x=3/2$$

$$x=\operatorname{arctg}3/2+\pi n,\ n \in Z$$

<u>Ответ:</u> $x=\operatorname{arctg}3/2+\pi n,\ n \in Z$

- №2. *Решить уравнение* $sin2x+cos2x=0$

  Решение. Разделив обе части уравнения почленно на $cos2x$, получим

$$tg2x+1=0,\ tg2x=-1$$

$$2x=-\pi/4+\pi n,\ n \in Z$$

$$x=-\pi/8+\pi n/2,\ n \in Z$$

Ответ: $x=-\pi/8+\pi n/2,\ n \in Z$

Рассмотрим теперь однородное тригонометрическое уравнение второй степени $a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x=0$.

Если коэффициент a отличен от нуля, то есть в уравнение содержится член $\sin^2 x$ с каким-то коэффициентом, отличным от нуля, то, рассуждая как и выше, нетрудно убедиться в том, что при интересующих нас значениях переменной $\cos x$ не обращается в нуль, а потому можно обе части уравнения разделить почленно на $\cos^2 x$.

$$a\sin^2 x/\cos^2 x+b\sin x\cos x/\cos^2 x+c\cos^2 x/\cos^2 x=0/\cos^2 x$$

$$a\,tg^2 x+b\,tgx+c=0$$

Это квадратное уравнение относительно новой переменной $z=tgx$.

Пусть теперь в однородном тригонометрическом уравнении $a\sin^2x+b\sin x\cos x+c\cos^2x=0$ коэффициент $a=0$, то есть отсутствует член $a\sin^2x$. Тогда уравнение принимает вид $b\sin x\cos x=0$. Это уравнение можно решить методом разложения на множители:

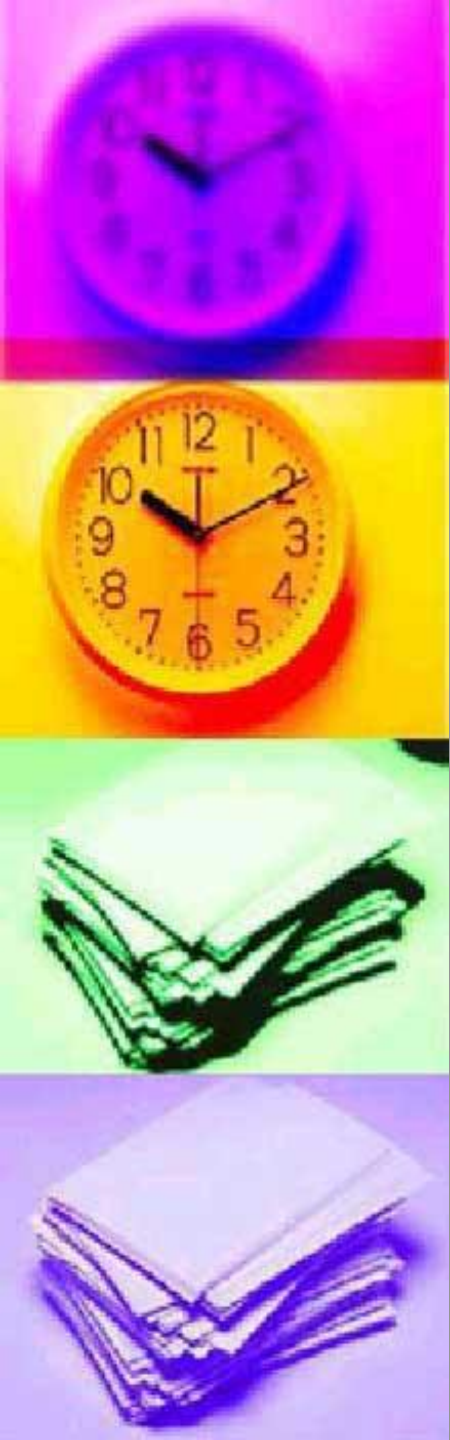
$$\cos x(b\sin x+c\cos x)=0$$

$$\cos x=0 \quad \text{или} \quad b\sin x+c\cos x=0$$

Получились два уравнения, которые мы умеем решать.

Аналогично обстоит дело и в случае, когда $c=0$, то есть когда однородное уравнение принимает вид $a\sin^2x+b\sin x\cos x=0$ (здесь можно вынести за скобки $\sin x$).

Фактически мы выработали алгоритм решения однородных тригонометрических уравнений второй степени.



Алгоритм решения однородных тригонометрических уравнений второй степени

- *Посмотреть, есть ли в уравнении член $a\sin^2 x$;*
- *Если этот член содержится, то есть $a \neq 0$, то уравнение решается делением обеих его частей на $\cos^2 x$ и последующим введением новой переменной $z = tgx$;*
- *Если этот член содержится, то есть $a = 0$, то уравнение решается методом разложения на множители: за скобки выносят $\cos x$;*

Так же обстоит дело и в однородном тригонометрическом уравнении второй степени вида

$$a\sin^2 mx + b\sin mx\cos mx + c\cos^2 mx = 0$$

Примеры

- №1. *Решить уравнение* $sin^2x-3sinxcosx+2cos^2x=0.$

Решение. $sin^2x-3sinxcosx+2cos^2x=0 \ \backslash \div cos^2x$

$tg^2x-3tgx+2=0$

Введем новую переменную $z=tgx$

$z^2-3z+2=0$ $z_1=1, z_2=2$

$tgx=1$ $tgx=2$

$x= п/4+ пn, n \in Z$ $x=arctg2 + пn, n \in Z$

- №2. *Решить уравнение* $\sqrt{3}\sin x\cos x+\cos^2 x=0$.

<u>Решение.</u> $\cos x(\sqrt{3}\sin x+\cos x)=0$

$\cos x=0$ или $\sqrt{3}\sin x+\cos x=0 \ \backslash \div \cos x\neq 0$

$x=\pi/2+\pi n,\ n \in Z$ $\sqrt{3}\,tg x+1=0$

$tg x=-1/\sqrt{3}$

$x=arctg(-1/\sqrt{3})+\pi n,\ n \in Z$

$x=-\pi/6+\pi n,\ n \in Z$