Урок 1

Тема урока: Дифференциал функции. Приложения дифференциала к приближенным вычислениям.

Цель урока. *Дать понятие дифференциала функции как главной части приращения функции. Показать приложения дифференциала к приближенным вычислениям.*

Прививать интерес к предмету, используя исторический материал. Отметить, что современная интерпретация дифференциала как главной части приращения функции дана Ж. Лагранжем, а окончательно была сформулирована О.Коши.

ЛАГР˜АНЖ (Lagrange) Жозеф Луи (25 января 1736, Турин — 10 апреля 1813, Париж), французский математик и механик, иностранный почетный член Петербургской АН (1776).

Ж. Л. Лагранж

В 1754 в возрасте 18 лет стал профессором артиллерийской школы Турина. Организовал кружок, из которого впоследствии выросла Туринская академия наук. Академия издавала публикации Лагранжа — в том числе по математическим проблемам азартных игр, движения жидкостей, сотрясения струн. В 1766 стал президентом Берлинской академии наук, в 1787 — действительным членом Парижской академии наук. Учавствовал в разработке метрической системы мер в парижском Институте и Бюро долгот. Во время Великой французской революции (1789) получил должность сенатора.

Ж. Л. Лагранж

Автор трудов по вариационному исчислению. Им разработаны основные понятия и методы по математическому анализу, теории чисел, алгебре, дифференциальным уравнениям. В трактате «Аналитическая механика» (1788) в основу статики положил принцип возможных перемещений, в основу динамики — сочетание этого принципа с принципом Д'Аламбера (принцип Д'Аламбера — Лагранжа), придал уравнениям движения формулу, названную его именем. Уравнение Лагранжа используется в гидродинамике и общей механике. Его сочинения по математике, астрономии и механике составляют 14 томов.

Коши Огюстен Луи

КОШ□И (Cauchy) Огюстен Луи (1789-1857), французский математик, иностранный почетный член Петербургской АН (1831). Один из основоположников теории аналитических функций. Труды по теории дифференциальных уравнений, математической физике, теории чисел, геометрии. Автор классических курсов математического анализа.

1. ***Сравнение бесконечно малых величин***.

Известно, что при сложении, вычитании и умножении бесконечно малых величин получаются величины бесконечно малые. Рассмотрим деление.

1) отношение $\dfrac{\alpha^2}{\alpha} = \alpha$ - бесконечно малая величина,

2) отношение $\dfrac{\alpha}{\alpha^2} = \dfrac{1}{\alpha}$ - бесконечно большая величина,

3) отношение $\dfrac{2\alpha}{\alpha} = 2$ - конечная величина.

α	1	0,1	0,01	0,001	0,0001	$\dots\dots\dots \to 0$
α^2	1	0,01	0,0001	0,000001	0,00000001	$\dots\dots\dots \to 0$
$\dfrac{\alpha^2}{\alpha}$	1	0,1	0,01	0,001	0,0001	$\dots\dots\dots \to 0$
$\dfrac{\alpha}{\alpha^2}$	1	10	100	1000	10000	$\dots\dots\dots \to \infty$

Малую α^2 по отношению к α называют бесконечно малой высшего порядка, а α по отношению к α^2 - бесконечно малой низшего порядка. 2α *и* α имеют одинаковый порядок малости.

2. Понятие дифференциала функции.

Рассмотрим функцию $y = x^2$

Найдем ее приращение.

1. $y_н = (x+\Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2$

2. $\Delta y = y_н - y = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$

$\Delta y = y'\Delta x + (\Delta x)^2$

Сравним изменение величин обоих слагаемых последнего равенства с уменьшением Δx. Положив, например, $x = 2$ и, следовательно, $y' = 4$. составим следующую таблицу значений

Δx	1	0,1	0,01	0,001
$y'\Delta x$	4	0,4	0,04	0,004
$(\Delta x)^2$	1	0,01	0,0001	0,000001

Из таблицы видно, что первое слагаемое уменьшается пропорционально Δx, а второе значительно быстрее.

Покажем, что то же самое справедливо для любой дифференцируемой функции $y = f(x)$.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Мы знаем, что постоянная величина a называется пределом переменной x, если разность между ними есть величина бесконечно малая α, то есть $\lim x = a$, если $x - a = \alpha \quad \Rightarrow \quad x = a + \alpha$

Значит, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha$,

$$\Delta y = y'\,\Delta x + \alpha\,\Delta x$$

И здесь первое слагаемое с уменьшением Δx уменьшается пропорционально Δx, а второе значительно быстрее, им можно пренебречь. Выражение $y'\,\Delta x$ называют главной частью приращения функции $y = f(x)$

Главная часть приращения функции называется дифференциалом функции.

$$dy = y'\,\Delta x$$

$$dx = \Delta x$$

$$dy = y'\,dx$$

Дифференциал функции равен произведению производной функции на дифференциал аргумента.

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

$$\Delta y = dy + \alpha \Delta x$$

$$\Delta y \approx dy$$

Для удобства пользования выпишем основные формулы нахождения дифференциалов в виде таблицы:

$I. d(C) = 0.$ $\qquad$ $II. d(x) = dx.$

$III. d(u + v - w) = du + dv - dw.$ $\qquad$ $IV. d(uv) = v\,du + u\,dv.$

$V. d(Cu) = C\,du$ $\qquad$ $VI. d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$

$$VII.\ d(y(u(x))) = y'_u\, u'_x\, dx \quad VIII.\ d(\ln x) = \frac{dx}{x}.$$

$$IX.\ d(\log_a x) = \frac{dx}{x \ln a} \qquad X.\ d(x^n) = nx^{n-1}dx$$

$$XI.\ d(\sqrt{x}) = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \qquad XII.\ d(a^x) = a^x \ln a\, dx$$

$$XIII.\ d(\sin x) = \cos x\, dx. \qquad XIV.\ d(\cos x) = -\sin x\, dx.$$

$$XV.\ d(tgx) = \frac{dx}{\cos^2 x}. \qquad XVI.\ d(ctg\, x) = -\frac{dx}{\sin^2 x}.$$

$$XVII.\ d(\arcsin x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}. \quad XVIII.\ d(\arccos x) = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$XIX.\ d(arctg\, x) = \frac{dx}{1+x^2}. \qquad XX.\ d(arcctg\, x) = -\frac{dx}{1+x^2}$$

Примеры.

1. Найти дифференциал функции

$$y = \frac{1}{3}x^3 + 2x \text{ при } x = 3 \text{ и } \mathrm{dx} = 0{,}001$$

$$dy = y'dx = (\frac{1}{3}x^3 + 2x)'dx = (x^2 + 2)dx$$

$$dy = (9 + 2) \cdot 0{,}001 = 11 \cdot 0{,}001 = 0{,}011$$

2.Найти дифференциал функции

$$y = \sqrt{x^2 + 1} \text{ при } x = \sqrt{3} \text{ и } \mathrm{dx} = 0{,}001$$

$$dy = (\sqrt{x^2 + 1})'dx = \frac{(x^2 + 1)'}{2\sqrt{x^2 + 1}}dx = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}}dx$$

$$dy = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}dx$$

$$dy = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0{,}001 = 0{,}00087$$

3. Найти дифференциал функции

$$y=\sqrt[4]{(3x-2)^3}=\left(3x-2\right)^{\frac{3}{4}}$$

$$dy=\frac{3}{4}\left(3x-2\right)^{-\frac{1}{4}}\cdot(3x-2)'\cdot dx=\frac{3}{4}(3x-2)^{-\frac{1}{4}}\cdot 3dx=$$

$$=\frac{9\,dx}{4\sqrt[4]{3x-2}}$$

4. Найти приближенное значение приращения функции

$y=2x^3+5$ при $x=2$ и $\Delta x=0{,}001$

$$\Delta y\approx dy=6x^2dx=6\cdot 2^2\cdot 0{,}001=0{,}024$$

Точное значение приращения

$$\Delta y = 2(x+\Delta x)^3 + 5 - 2x^3 - 5 = 2x^3 + 6x^2\Delta x + 6x(\Delta x)^2 +$$
$$+ 2(\Delta x)^3 - 2x^3 - 5 = 6x^2\Delta x + 6x(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3 =$$
$$= 6\cdot 4\cdot 0{,}001 + 6\cdot 2\cdot 0{,}000001 + 2\cdot 0{,}000000001 =$$
$$= 0{,}024012002$$

5. Найти приближенное значение функции

$y = 5x^3 - 2x + 3$ при $x = 2{,}01$

Полагая $x = 2$ и $\Delta x = 0{,}01$, получим

$$y(x) = y(2) = 5\cdot 2^3 - 2\cdot 2 + 3 = 39$$

$$y'(x)\Delta x = y'(2)\cdot 0{,}01 = (5x^3 - 2x + 3)'\Delta x =$$
$$= (15x^2 - 2)\cdot 0{,}01 = (15\cdot 2^2 - 2)\cdot 0{,}01 = 0{,}58$$
$$y(2{,}01) = y(2) + y'(2)\cdot \Delta x = 39 + 0{,}58 = 39{,}58$$

Найдем точное значение функции:

$$y(2{,}01) = 5\cdot (2{,}01)^3 - 2\cdot 2{,}01 + 3 = 39{,}583005$$

Подведение итогов урока.
Домашнее задание. [2] с245-253 №478,481,511,512-516.