Раздел № 4
Сетевые, имитационные и балансовые модели

Тема №3

Балансовые модели

Балансовые модели

БАЛАНСОВАЯ МОДЕЛЬ - экономико-математическая модель, построенная в виде системы уравнений, представляющих балансовые соотношения и характеризующих равенство произведенного (поступившего) и потребленного (распределенного) продукта.

Балансовые модели

Рассматривается экономическая система, состоящая из n взаимосвязанных отраслей производства. Продукция каждой отрасли частично идет на внешнее потребление (конечный продукт), а частично используется в других отраслях, в том числе и в данной. Потребление этой части продукции называют производственным потреблением. Поэтому каждая из рассматриваемых отраслей выступает и как производитель продукции и как ее потребитель.

Для упрощения будем считать, что баланс составляется не в натуральном, а в стоимостном разрезе

Балансовые модели

№ \ №		Потребляющие отрасли				Внутреннее потребление	Конечный продукт	Валовой выпуск
		1	2	…..	n			
Производящие отрасли	1	x_{11}	x_{12}		x_{1n}	$\sum_{j=1}^{n} x_{1j}$	Y_1	X_1
	2	x_{21}	x_{22}		x_{2n}	$\sum_{j=1}^{n} x_{2j}$	Y_2	X_2
	…..	…..	…..	…..	…..	…..	…..	…..
	n	x_{n1}	x_{n2}		x_{nn}	$\sum_{j=1}^{n} x_{nj}$	Y_n	X_n
Производственные затраты		$\sum_{i=1}^{n} x_{i1}$	$\sum_{i=1}^{n} x_{ij2}$		$\sum_{i=1}^{n} x_{in}$			

Балансовые модели

Обозначим через X_i валовой выпуск продукции *i*-ой отрасли за планируемый период, а через Y_i – конечный продукт *i*-ой отрасли, идущий на внешнее для рассматриваемой системы потребление.

Таким образом, разность X_i - Y_i составляет часть продукции *i*-ой отрасли, предназначенную для внутрипроизводственного потребления.

Обозначим через x_{ij} часть продукции *i*-ой отрасли, которая потребляется *j*-ой отраслью, для обеспечения выпуска ее продукции в размере X_j .

Балансовые модели

Величины, расположенные в строках таблицы связаны следующими балансовыми равенствами:

$$X_1 - (x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n}) = Y_1$$

$$X_2 - (x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n}) = Y_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$X_n - (x_{n1} + x_{n2} + \ldots + x_{nn}) = Y_n$$

Балансовые модели

Одна из задач балансовых исследований заключается в том, чтобы на базе данных об исполнение баланса за предшествующий период определить исходные данные на планируемый период.

Будем снабжать штрихом данные, относящиеся к истекшему периоду, а теми же буквами, но без штриха – аналогичные данные, связанные с планируемым периодом. Балансовые равенства должны выполняться как в истекшем, так и в планируемом периоде.

Балансовые модели

Совокупность значений Y_1, Y_2, …, Y_n, характеризующих выпуск конечного продукта, называется ассортиментным вектором:

$$\overline{Y} = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$$

Совокупность значений X_1, X_2, …, X_n, определяющих валовой выпуск всех отраслей – вектор-планом:

$$\overline{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

Балансовые модели

Зависимость между двумя этими векторами определяется балансовыми равенствами. Однако они не дают возможности определить по заданным значениям, например, вектор Y необходимый для его обеспечения вектор-плана X, т.к. кроме искомых неизвестных X_j, содержат n^2 неизвестных x_{ij}, которые в свою очередь зависят от X_j.

Преобразуем эти равенства, рассчитав величины a_{ik} из соотношений:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}$$

Балансовые модели

Величины a_{ij} называются коэффициентами прямых затрат или технологическими коэффициентами. Они определяют затраты продукции *i*-ой отрасли, используемые *j*-ой отраслью на изготовление единицы ее продукции. С некоторым приближением можно полагать, что коэффициенты a_{ij} постоянны в некотором промежутке времени, охватывающим как истекший, так и планируемый период, т.е.:

$$\frac{x'_{ij}}{X'_j} = \frac{x_{ij}}{X_j} = a_{ij} = const$$

Балансовые модели

Поскольку, $a_{ij} = \dfrac{x_{ij}}{X_j}$ **, то** $x_{ij} = a_{ij} * X_j$

То есть затраты *i*-ой отрасли в *j*-ую отрасль пропорциональны ее валовому выпуску, или, другими словами, зависят линейно от валового выпуска *Xj*. Поэтому последнее равенство называют условием линейности прямых затрат.

Балансовые модели

Рассчитав коэффициенты прямых затрат a_{ij}, используя данные об исполнении баланса за предшествующий период, получим матрицу:

$$A = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{matrix}$$

Эту матрицу называют матрицей затрат. В этой матрице отражены все внутренние взаимосвязи между производством и потреблением. Все элементы этой матрицы неотрицательны.

Балансовые модели

Подставив значения $x_{ij} = a_{ij} * X_j$ во все уравнения системы, получим линейную балансовую модель, характеризующую баланс затрат - выпуска продукции:

$$X_1 - (a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots + a_{1n}X_n) = Y_1$$

$$X_2 - (a_{21}X_2 + a_{22}X_2 + \ldots + a_{2n}X_n) = Y_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$X_n - (a_{n1}X_n + a_{n2}X_n + \ldots + a_{nn}X_n) = Y_n$$

Теперь, исходя из заданного ассортиментного вектора можно определить необходимый для его производства вектор-план.

Пример балансовой модели

В качестве примера рассмотрим упрощенную систему, состоящую из двух производственных отраслей:

№ \ №		Потребляющие отрасли		Внутреннее потребление	Конечный продукт	Валовой выпуск
		1	2			
Производящие отрасли	1	100	160	260	240	500
	2	275	40	315	85	400
Производственные затраты		375	200	575 \ 575		

Пример балансовой модели

Пусть исполнение баланса за предшествующий период характеризуется данными, помещенными в приведенной выше таблице

Тогда коэффициенты прямых затрат равны:

$$a_{11} = \frac{100}{500} = 0.2; a_{12} = \frac{160}{400}; a_{21} = \frac{275}{500}; a_{22} = \frac{40}{400}$$

Эти коэффициенты записываются в углах соответствующих клеток исходной таблицы.

Пример балансовой модели

№ \ №		Потребляющие отрасли		Внутреннее потребление	Конечный продукт	Валовой выпуск
		1	2			
Производящие отрасли	1	0,20 100	0,40 160	260	240	500
	2	0,55 275	0,10 40	315	85	400
Производственные затраты		375	200	575 \ 575		

Пример балансовой модели

Балансовая модель, соответствующая исходным данным примера:

$$X_1 - 0.20X_1 - 0.40X_2 = Y_1$$
$$X_2 - 0.55X_1 - 0.10X_2 = Y_2$$

Эта система двух уравнений может быть использована для определения X_1 и X_2 при заданных значениях Y_1 и Y_2, для определения влияния на валовой выпуск каких-либо изменений в ассортименте конечного продукта и т.д.

Так, например, задавшись Y_1 =240 и Y_2 =85, получим X_1=500 и X_2 =400, задавшись Y_1 =480 и Y_2 =170, получим X_1=1000 и X_2 =800 и т.д.