Кривые второго порядка

Кривые второго порядка – это линии на плоскости, которым соответствуют уравнения второго порядка.

Установлено, что к кривым второго порядка относятся эллипс, гипербола, парабола.

Других кривых второго порядка нет, если не учитывать случаи вырождения кривых в точку или прямые.

Эллипс и его уравнение

Эллипсом называется множество точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.

Пусть F_1 и F_2 − фокусы эллипса.

Обозначим:

$|F_1F_2| = 2c$, $|F_1M|+|F_2M| = 2a$,

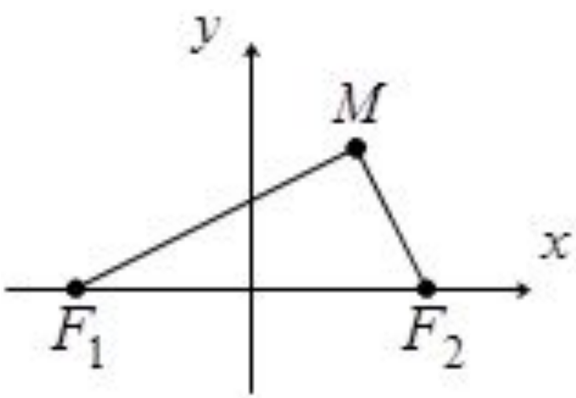
где M−произвольная точка эллипса;

$a > c$.

- Выберем систему координат так, чтобы ось Ox проходила через фокусы, а ось Oy – посередине между ними.

Координаты фокусов: $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$.

Обозначим $M(x;y)$



Тогда $|F_1M|=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$;

$|F_2M|=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$

и сумма этих расстояний равна $2a$.

Выберем систему координат так, чтобы ось Ox проходила через фокусы, а ось Oy – посередине между ними.

Координаты фокусов: $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$.

Обозначим $M(x;y)$

Тогда $|F_1M|=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$;

$$|F_2M|=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

и сумма этих расстояний равна $2a$.

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ − каноническое уравнение эллипса ($b^2=a^2-c^2$).

Если $b=a$, то уравнение примет вид:

$x^2+y^2=a^2$ − каноническое уравнение окружности.

Точка (0; 0) − центр эллипса.

Если центр смещен в точку $(x_0; y_0)$, то уравнение эллипса примет вид:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1;$$

a, b − полуоси эллипса.

Если уравнение имеет вид $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=-1$, то получаем мнимый эллипс (пустое множество).

Если уравнение имеет вид $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=0$, то получаем вырожденный эллипс (точка $(x_0; y_0)$).

Построение эллипса по каноническому уравнению

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

Гиперболa и ее уравнение

Гиперболой называется множество точек плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.

Пусть F_1 и F_2 − фокусы гиперболы.

Обозначим:

$|F_1F_2| = 2c$, $||F_1M|-|F_2M|| = 2a$,

где M−произвольная точка гиперболы;

$a < c$.

Выберем прямоугольную систему координат так же, как и в случае вывода уравнения эллипса.

Тогда $|MF_1| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \quad |MF_2| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2};$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

После преобразования получим

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ каноническое уравнение гиперболы

$(b^2 = c^2 - a^2)$.

Если центр смещен в точку $(x_0; y_0)$, то уравнение гиперболы примет вид:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

a – действительная полуось гиперболы;

b – мнимая полуось гиперболы.

Если уравнение имеет вид $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}-\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=0$, то получаем вырожденную гиперболу (пару пересекающихся прямых).

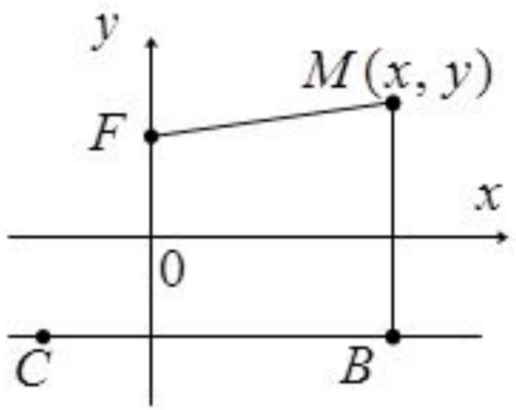
Построение гиперболы по каноническому уравнению

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

$$-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

Парабола и ее уравнение

Параболой называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой фокусом, и от данной прямой, называемой директрисой.



Пусть F − фокус,

прямая CB – директриса.

Выберем систему координат следующим образом: ось Oy проведем через фокус F перпендикулярно директрисе CB, а ось Ox – посередине между фокусом и директрисой.

Обозначив расстояние от фокуса до директрисы через p, получим координаты фокуса $F(0;p/2)$.

Пусть $M(x; y)$ − произвольная точка параболы.

По определению параболы $MF=MB$, т.е.

$$\sqrt{x^2+\left(y-\frac{p}{2}\right)^2}=y+\frac{p}{2}.$$

После преобразования получим

$x^2=2py$ − каноническое уравнение параболы;

(0; 0) − вершина параболы,

$x=0$ − ось симметрии.

Уравнение параболы с вершиной, смещенной в точку (x_0; y_0), и осью симметрии, параллельной оси Oy ($x=x_0$), примет вид:

$$(x-x_0)^2=\pm 2p(y-y_0).$$

Уравнение параболы с вершиной, смещенной в точку (x_0; y_0), и осью симметрии, параллельной оси Ox ($y=y_0$), примет вид:

$$(y-y_0)^2=\pm 2p(x-x_0).$$

Построение параболы по каноническому уравнению

$$(x-x_0)^2 = 2p(y-y_0) \quad (p>0).$$

Пример 1. Привести уравнение к каноническому виду и построить соответствующую линию

$$2x^2+3y^2-4x+18y+17=0.$$

Пример 2. Привести уравнение к каноническому виду и построить соответствующую линию

$$x = -2 - \frac{1}{2}\sqrt{y^2 - 2y + 5}.$$

Пример 3. Привести уравнение к каноническому виду и построить соответствующую линию $x = -5 + \sqrt{1 - y}$.