

Расчеты освещения от больших поверхностей. Формула В.А. Фока

E-mail: SmirnovPA@mpei.ru

сот: 8-910-443-75-52

Подготовил: Смирнов П.А.

Фок, Владимир Александрович

(22 декабря 1898 г. – 27 декабря 1974 г. Санкт-Петербург)

Освещённость от поверхностей произвольной формы – труды ГОИ – 1924 г. – 26 лет.

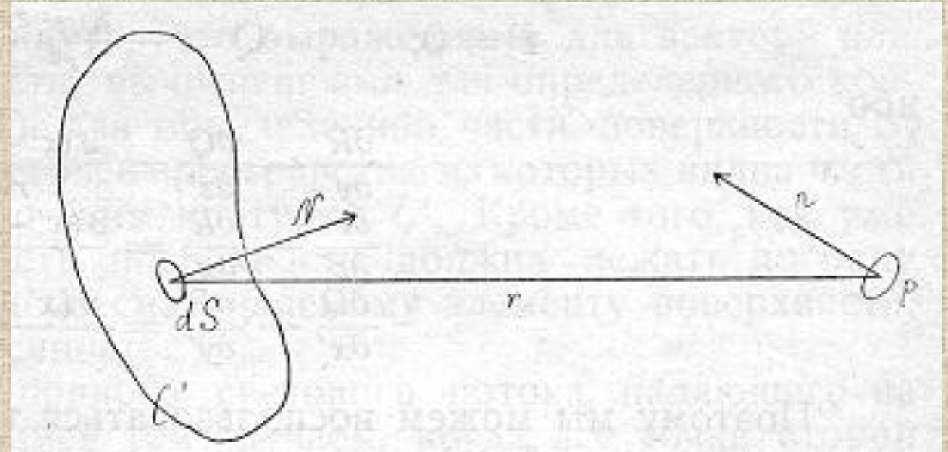
- Квантовая механика, квантовая электродинамика, квантовая теория поля
- Пространство Фока
- Метод функционалов Фока
- Метод собственного времени
- Многовременной формализм
- Метод Хартри-Фока «Метод самосогласованного поля»
- и т.д.



По статье В.А. Фока «Освещённость от поверхностей произвольной формы»

Принимая яркость поверхности $L=1$

$$E = \frac{1}{\pi} \iint \frac{\cos(\mathbf{N}, \mathbf{r}) \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) dS}{r^2}$$



Разложение по осям:

$$\begin{cases} E_x = \frac{1}{\pi} \iint \frac{\cos(\mathbf{N}, \mathbf{r}) \cos(\mathbf{r}, \mathbf{x}) dS}{r^2} \\ E_y = \frac{1}{\pi} \iint \frac{\cos(\mathbf{N}, \mathbf{r}) \cos(\mathbf{r}, \mathbf{y}) dS}{r^2} \\ E_z = \frac{1}{\pi} \iint \frac{\cos(\mathbf{N}, \mathbf{r}) \cos(\mathbf{r}, \mathbf{z}) dS}{r^2} \end{cases}$$

По статье В.А. Фока «Освещённость от поверхностей произвольной формы»

Разложение через координаты для E_x :

$$r^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2$$

$$\cos(\mathbf{r}, \mathbf{x}) = \frac{x' - x}{r}; \cos(\mathbf{r}, \mathbf{y}) = \frac{y' - y}{r}; \cos(\mathbf{r}, \mathbf{z}) = \frac{z' - z}{r}$$

$$\cos(\mathbf{N}, \mathbf{r}) = \frac{x' - x}{r} \cos(\mathbf{N}, \mathbf{x}) + \frac{y' - y}{r} \cos(\mathbf{N}, \mathbf{y}) + \frac{z' - z}{r} \cos(\mathbf{N}, \mathbf{z})$$

$$E_x = \frac{1}{2\pi} \iint \left[\frac{2(x' - x)^2}{r^4} \cos(\mathbf{N}, \mathbf{x}) + \right. \\ \left. + \frac{2(x' - x)(y' - y)}{r^4} \cos(\mathbf{N}, \mathbf{y}) + \right. \\ \left. + \frac{2(x' - x)(z' - z)}{r^4} \cos(\mathbf{N}, \mathbf{z}) \right] dS$$

По статье В.А. Фока «Освещённость от поверхностей произвольной формы»

$$E_x = \frac{1}{2\pi} \iint (A \cos(\mathbf{N}, \mathbf{x}) + B \cos(\mathbf{N}, \mathbf{y}) + C \cos(\mathbf{N}, \mathbf{z})) dS$$

где:

$$A = \frac{2(x' - x)^2}{r^4}$$

$$B = \frac{2(x' - x)(y' - y)}{r^4}$$

$$C = \frac{2(x' - x)(z' - z)}{r^4}$$

Что есть ротор вектора (P,Q,R):

$$P = 0$$

$$Q = -\frac{z' - z}{r^2}$$

$$R = \frac{y' - y}{r^2}$$

$$\frac{\partial R}{\partial y'} - \frac{\partial Q}{\partial z'} = \frac{2(x' - x)^2}{r^4}$$

$$\frac{\partial P}{\partial z'} - \frac{\partial R}{\partial x'} = \frac{2(x' - x)(y' - y)}{r^4}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x'} - \frac{\partial P}{\partial y'} = \frac{2(x' - x)(z' - z)}{r^4}$$

По статье В.А. Фока «Освещённость от поверхностей произвольной формы»

Используем теорему Стокса:

$$\begin{cases} E_x = \frac{1}{2\pi} \oint_{C'} \frac{(y' - y) dz' - (z' - z) dy'}{r^2} \\ E_y = \frac{1}{2\pi} \oint_{C'} \frac{(z' - z) dx' - (x' - x) dz'}{r^2} \\ E_z = \frac{1}{2\pi} \oint_{C'} \frac{(x' - x) dy' - (y' - y) dx'}{r^2} \end{cases}$$

Введём в рассмотрение вектор:

$$\begin{cases} V_x = -\frac{1}{2\pi} \oint_{C'} \lg r dx' \\ V_y = -\frac{1}{2\pi} \oint_{C'} \lg r dy' \\ V_z = -\frac{1}{2\pi} \oint_{C'} \lg r dz' \end{cases}$$

тогда:

$$E_x = \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}$$

$$E_y = \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}$$

$$E_z = \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0$$

Выражения для потока

$$\Phi_{12} = \iint_{S_2} \left(E_x \cos(\mathbf{n}, \mathbf{x}) + E_y \cos(\mathbf{n}, \mathbf{y}) + E_z \cos(\mathbf{n}, \mathbf{z}) \right) dS_2$$

Т.к. вектор \mathbf{E} – это ротор, то можно ещё раз применить теорему Стокса:

$$\Phi_{12} = \oint_C V_x dx + V_y dy + V_z dz$$

ИЛИ

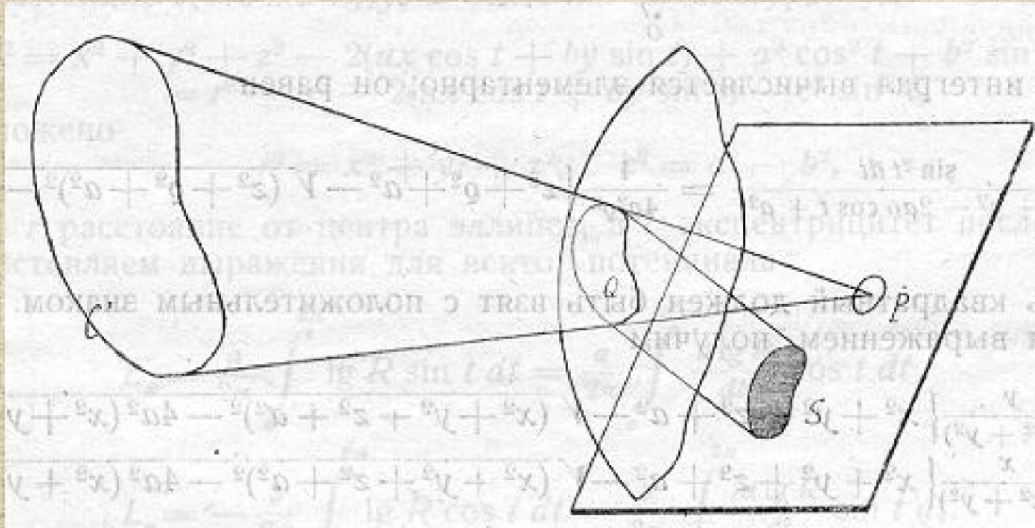
$$\Phi_{12} = -\frac{1}{2\pi} \oint_{C'} \oint_C \lg r (dx dx' + dy dy' + dz dz')$$

$$\Phi_{12} = -\frac{1}{2\pi} \oint_{C'} \oint_C \lg r \cos(ds, ds') ds ds'$$

Связь с геометрией

$$\begin{cases} \xi = \cos(\mathbf{r}, \mathbf{x}) = \frac{x' - x}{r} \\ \eta = \cos(\mathbf{r}, \mathbf{y}) = \frac{y' - y}{r} \\ \zeta = \cos(\mathbf{r}, \mathbf{z}) = \frac{z' - z}{r} \\ \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_x = \frac{1}{2\pi} \oint_{C'} \eta d\zeta - \zeta d\eta \\ E_y = \frac{1}{2\pi} \oint_{C'} \zeta d\xi - \xi d\zeta \\ E_z = \frac{1}{2\pi} \oint_{C'} \xi d\eta - \eta d\xi \end{cases}$$



Освещённость на плоскости P будет равна делёной на π проекции участка единичной сферы на эту плоскость.

Расчёт освещённости от равномернояркой поверхности

Световой вектор:

$$\mathbf{\Omega} = \int_{\Omega} L d\mathbf{\Omega}$$

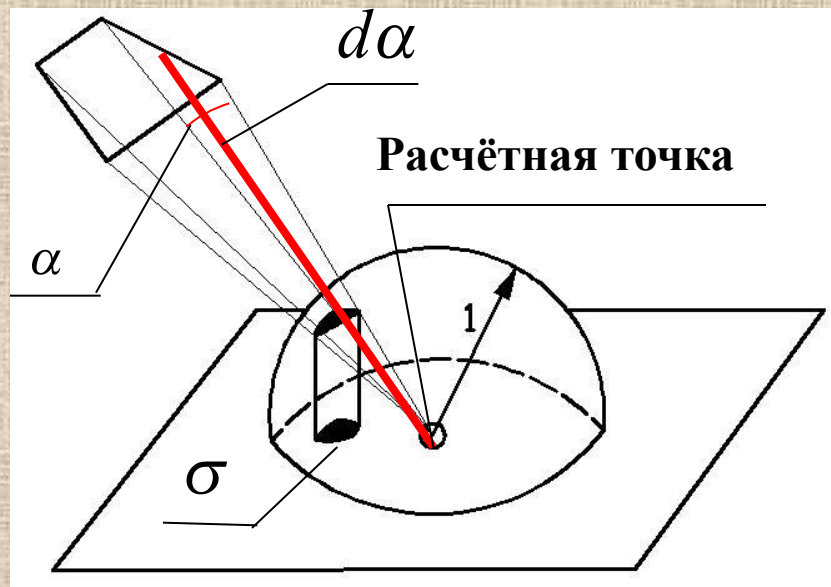
Освещённость:

$$E = \int_{\sigma} L d\sigma$$

или

$$E = \frac{L}{2} \oint_C \cos \beta d\alpha$$

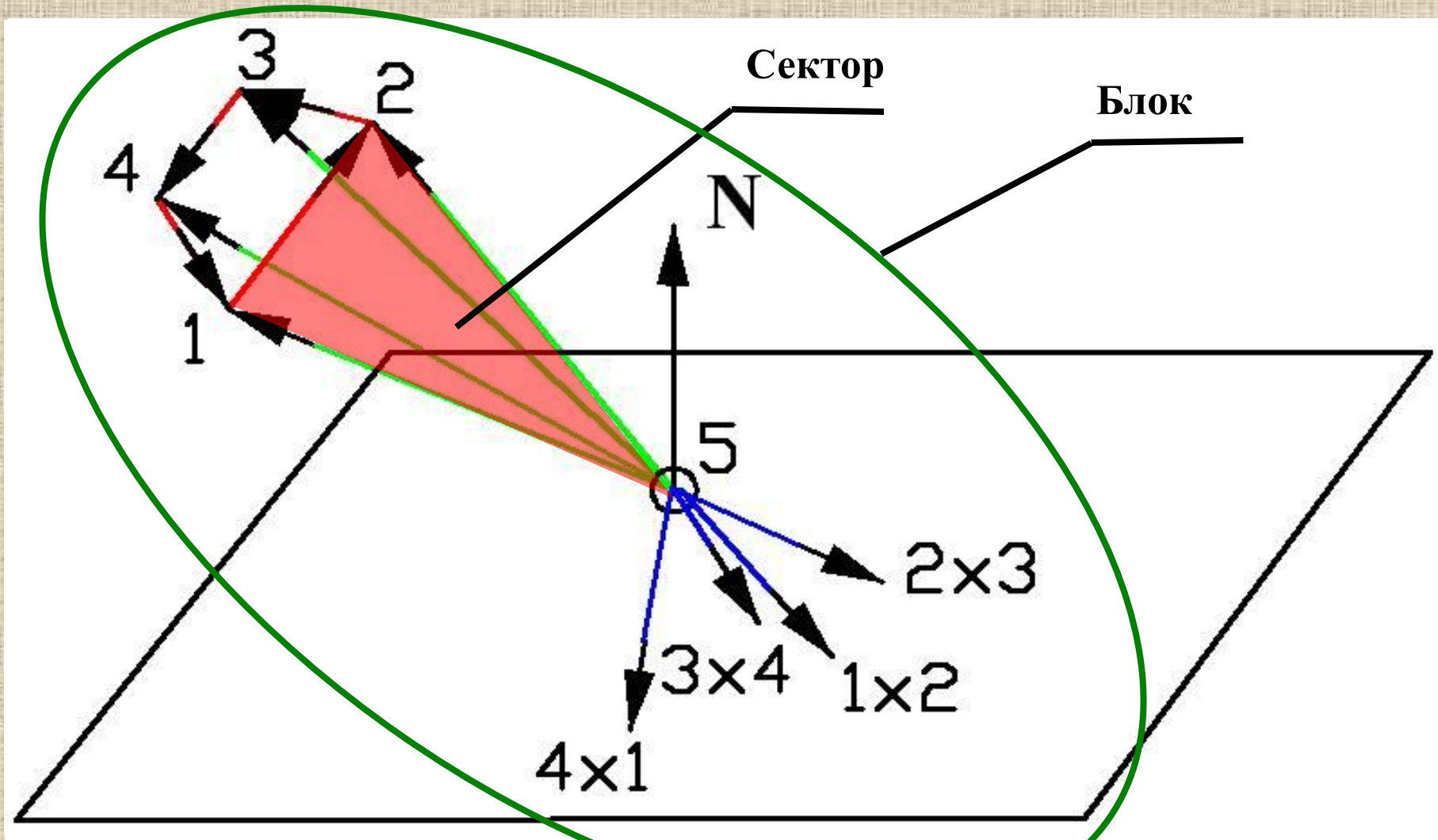
β угол между внешней стороной образующей конической поверхности и расчётной плоскостью



Для многоугольника можно перейти от интеграла к сумме:

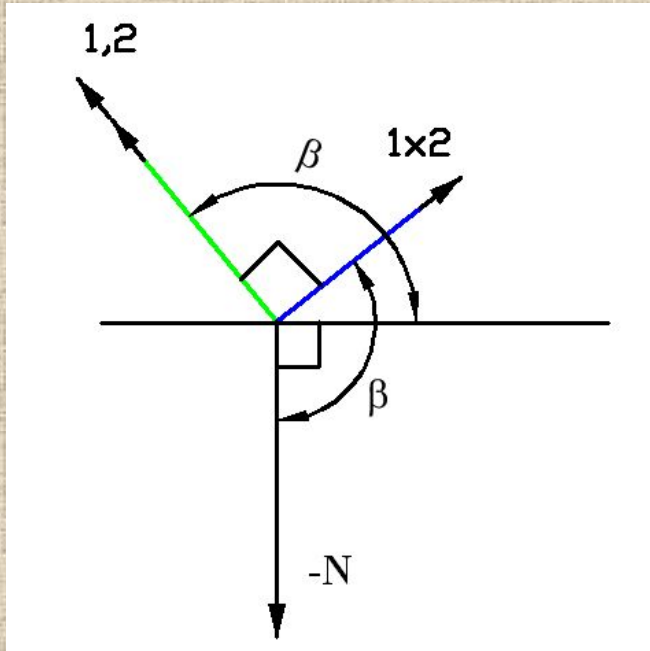
$$E = \frac{L}{2} \sum_{i=1}^N \cos \beta_i \alpha_i$$

Векторный метод расчёта освещённости от равнояркого многоугольника



Расчёт веса сектора

Вид с направления где вектора 1 и 2
сливаются в одну линию



Вес сектора:

$$m = \alpha \cos \beta$$

$$\cos \alpha = \frac{(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2)}{|\mathbf{V}_1| |\mathbf{V}_2|}$$

$$\alpha = \arccos \left(\frac{(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2)}{|\mathbf{V}_1| |\mathbf{V}_2|} \right)$$

$$\cos \beta = \frac{(-\mathbf{N}, \mathbf{V}_1 \mathbf{V}_2)}{|-\mathbf{N}| |\mathbf{V}_1 \mathbf{V}_2|}$$

$$m = \frac{(-\mathbf{N}, \mathbf{V}_1 \mathbf{V}_2)}{|-\mathbf{N}| |\mathbf{V}_1 \mathbf{V}_2|} \arccos \left(\frac{(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2)}{|\mathbf{V}_1| |\mathbf{V}_2|} \right)$$

Расчёт проекции телесного угла (форм-фактора) блока

Форм-фактор блока

$$F = \sum_{i=1}^N m_i \quad F = \sum_{i=1}^N \alpha_i \cos \beta_i$$

$$F = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{(-\mathbf{N}, \mathbf{V}_i \mathbf{V}_{i+1})}{|-\mathbf{N}| |\mathbf{V}_i \mathbf{V}_{i+1}|} \arccos \left(\frac{(\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_{i+1})}{|\mathbf{V}_i| |\mathbf{V}_{i+1}|} \right) +$$
$$+ \frac{(-\mathbf{N}, \mathbf{V}_N \mathbf{V}_1)}{|-\mathbf{N}| |\mathbf{V}_N \mathbf{V}_1|} \arccos \left(\frac{(\mathbf{V}_N, \mathbf{V}_1)}{|\mathbf{V}_N| |\mathbf{V}_1|} \right)$$

Спасибо за внимание!