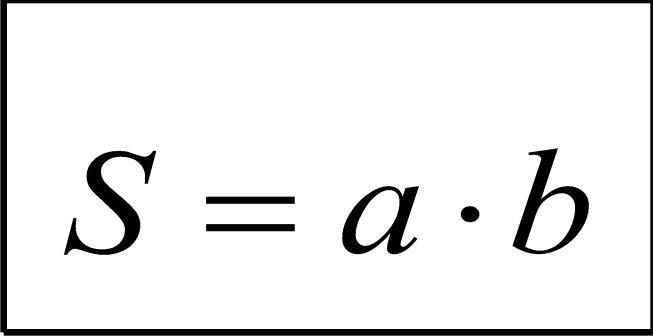


Тема: **Определенный интеграл.  
Его основные свойства.  
Методы вычислений.**

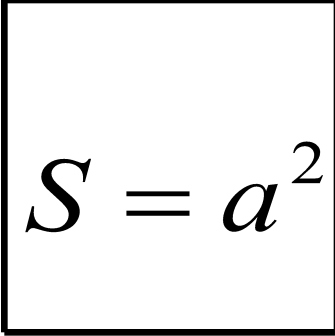
До 17 века:



$S = a \cdot b$

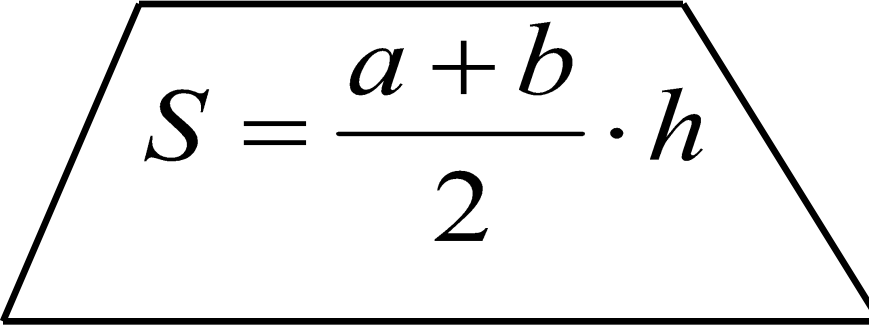
a

b



$S = a^2$

a

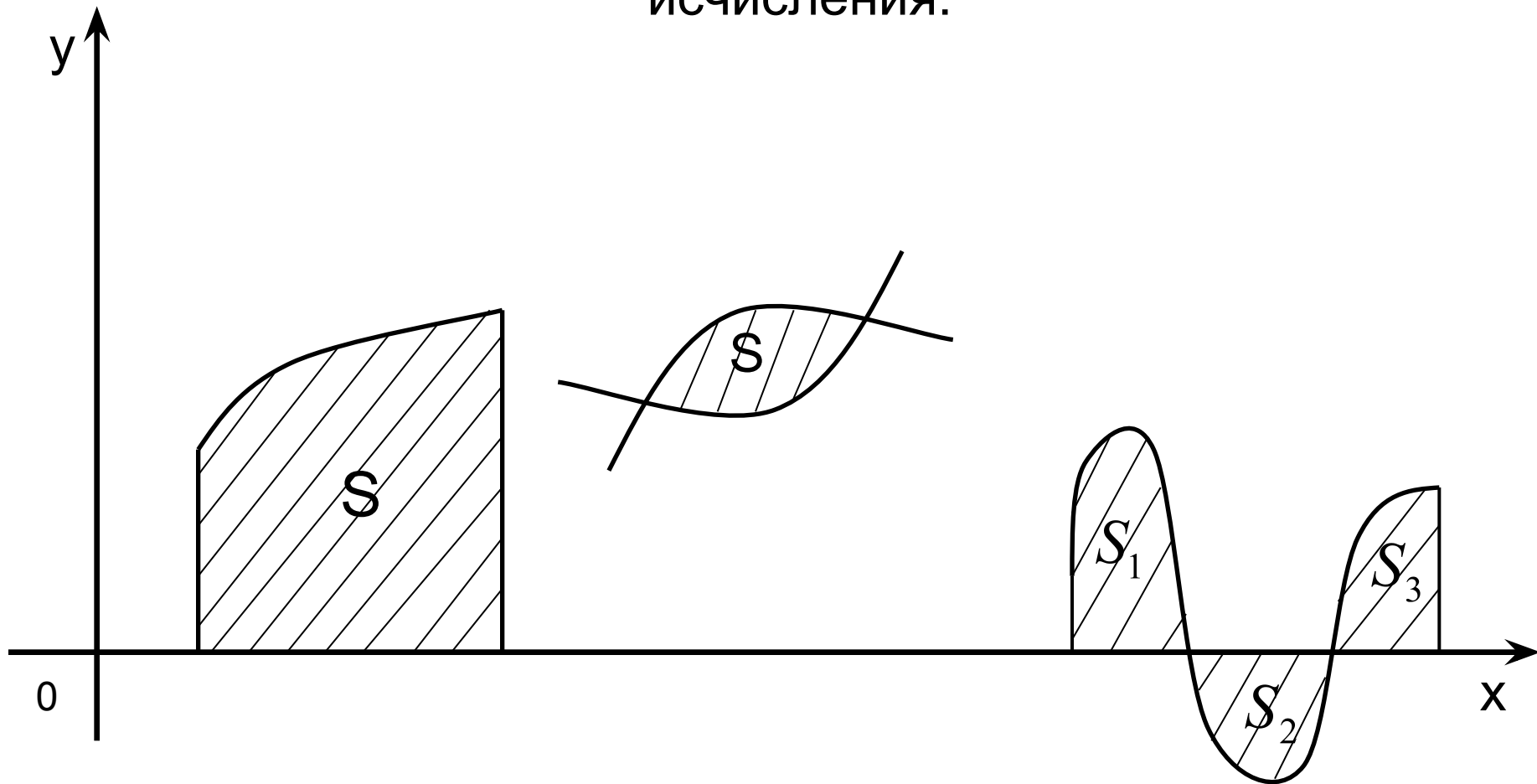


$S = \frac{a + b}{2} \cdot h$

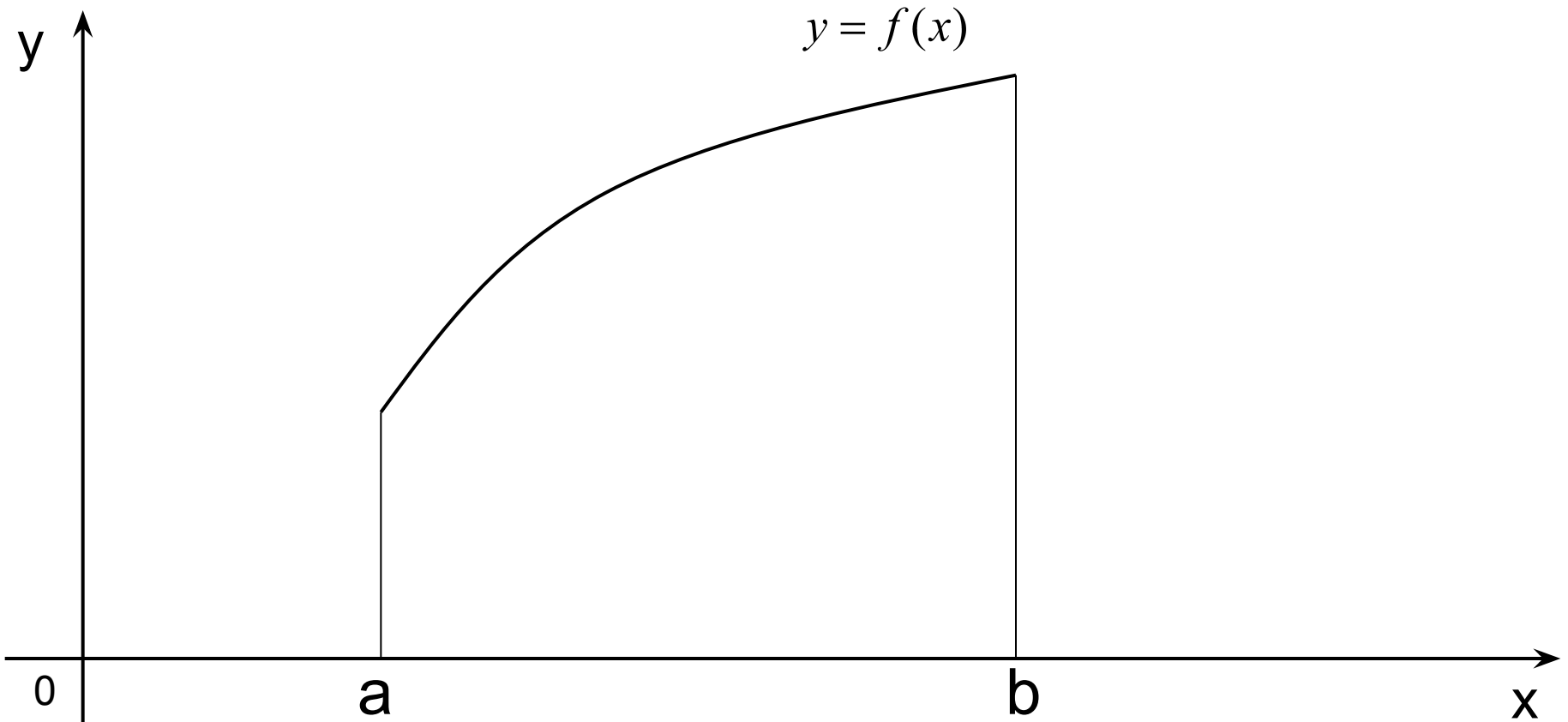
a

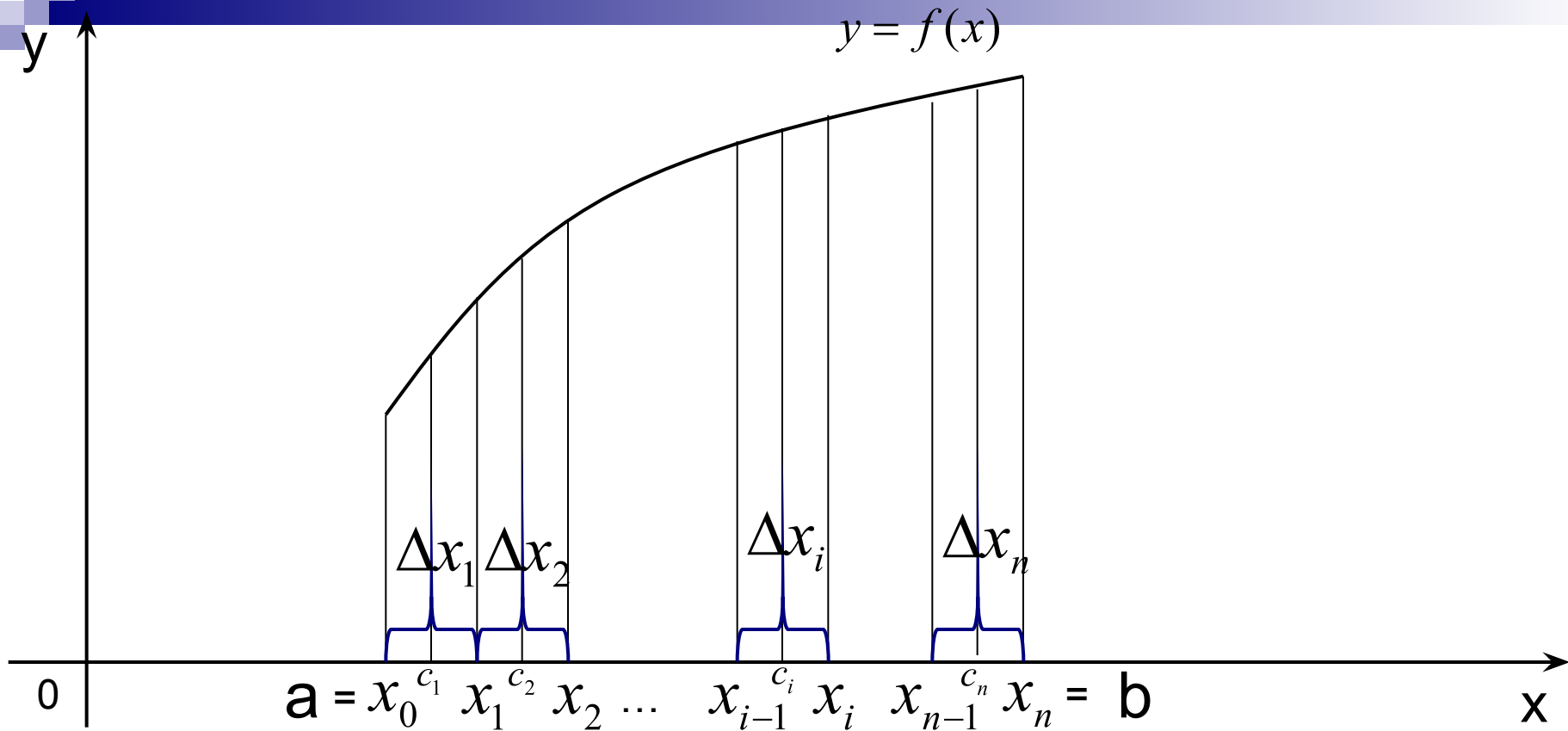
b

С появлением дифференциального и интегрального исчисления:



# Задача о площади криволинейной трапеции.





1. Разобьем  $[a, b]$  на  $n$  равных отрезков точками  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$

В результате получим промежутки:  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_i, \dots, \Delta x_n$

2. На каждом  $\Delta x_i$  выберем произвольную точку  $c_i$

3. Найдем  $f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \dots + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i$  (1)

формула интегральной суммы

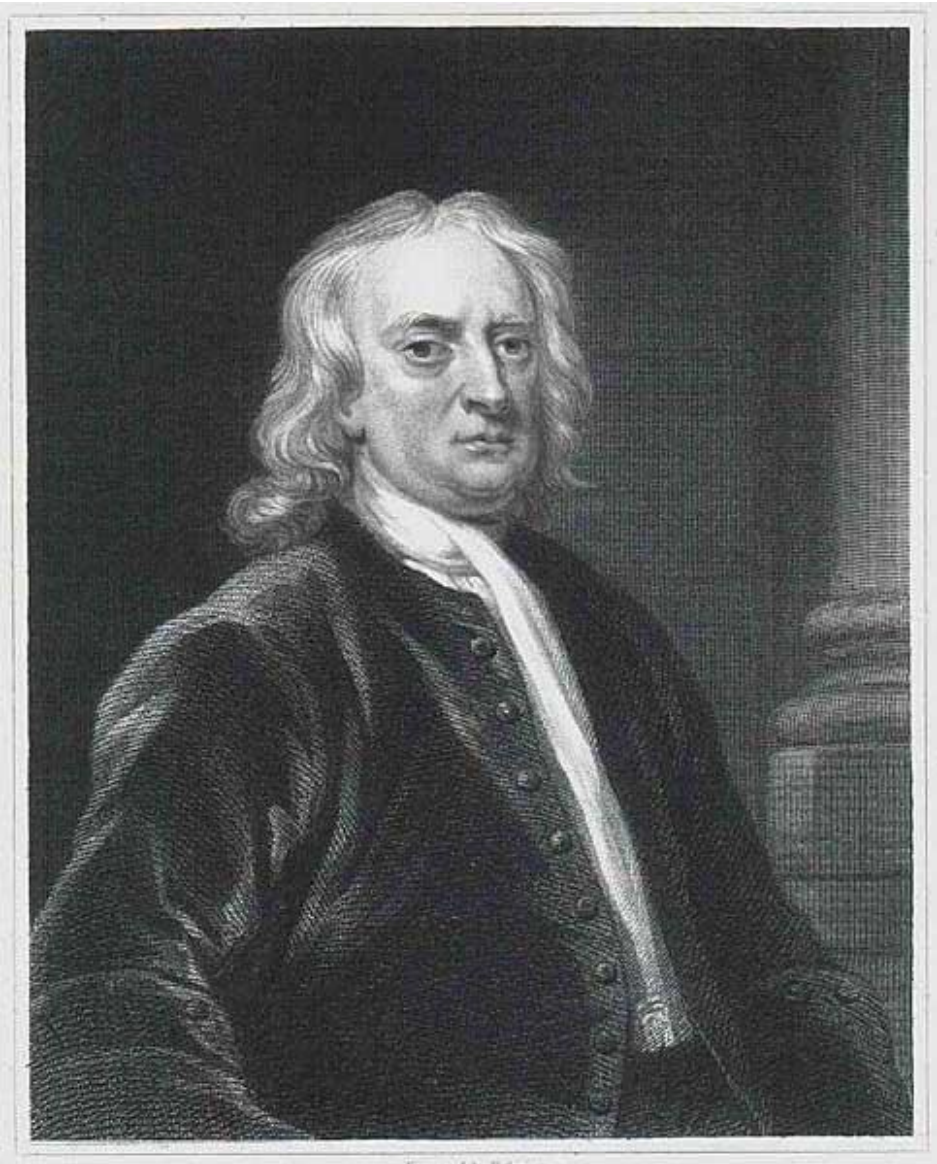
**Опр:** Если при любом разбиении отрезка  $[a, b]$  на части и при любом выборе точек  $c_i$  на каждой части интегральная сумма стремится к одному и тому же пределу, то его называют **определенным интегралом** и обозначают:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} f(c_i) \Delta x_i \quad (2)$$

Теорема: Если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , а функция  $F(x)$  является первообразной для  $f(x)$  на этом отрезке, то справедлива формула:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a) \quad (3)$$

формула Ньютона-Лейбница



И. Ньютон



Г. Лейбниц



$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} f(c_i) \Delta x_i$$

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

# Свойства определенного интеграла:

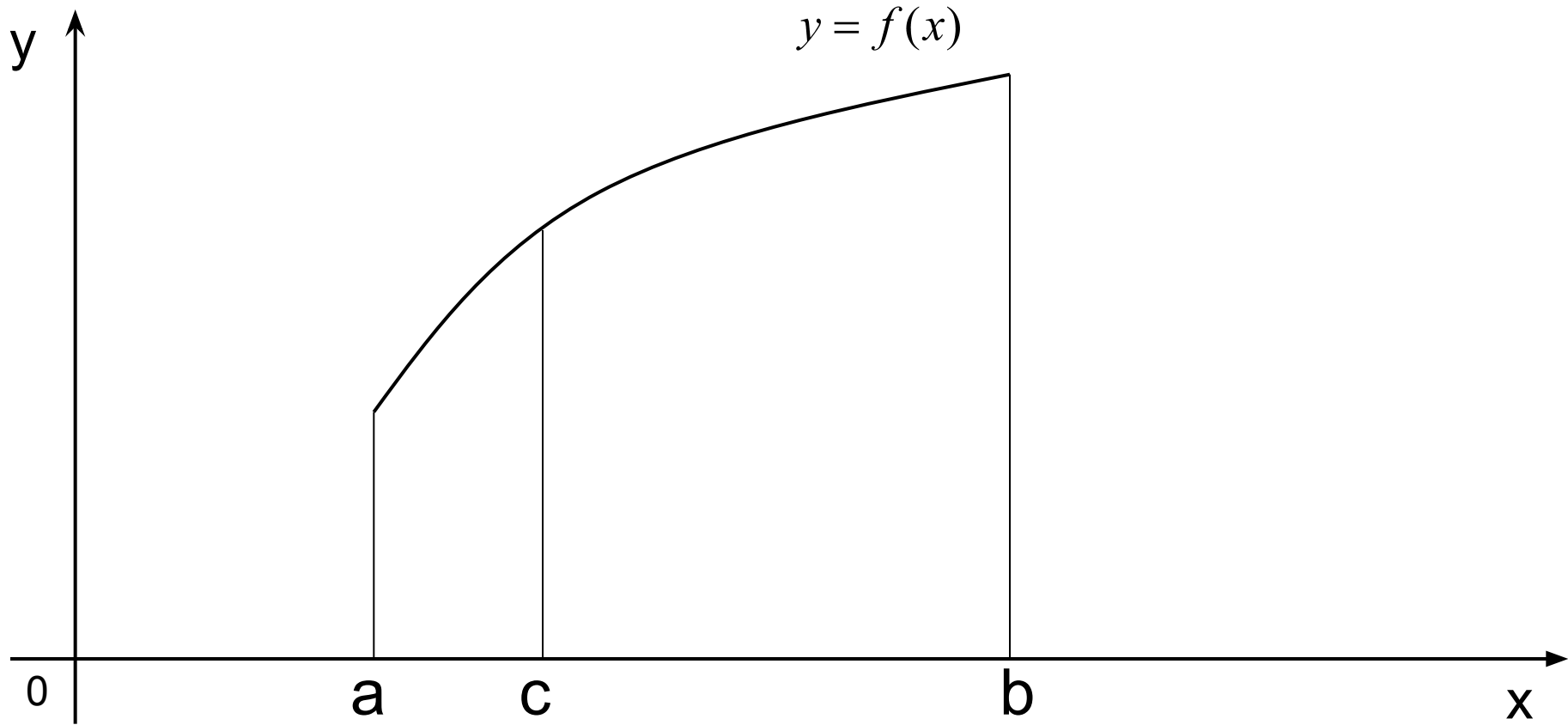
$$1) \int_a^b c \cdot f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx.$$

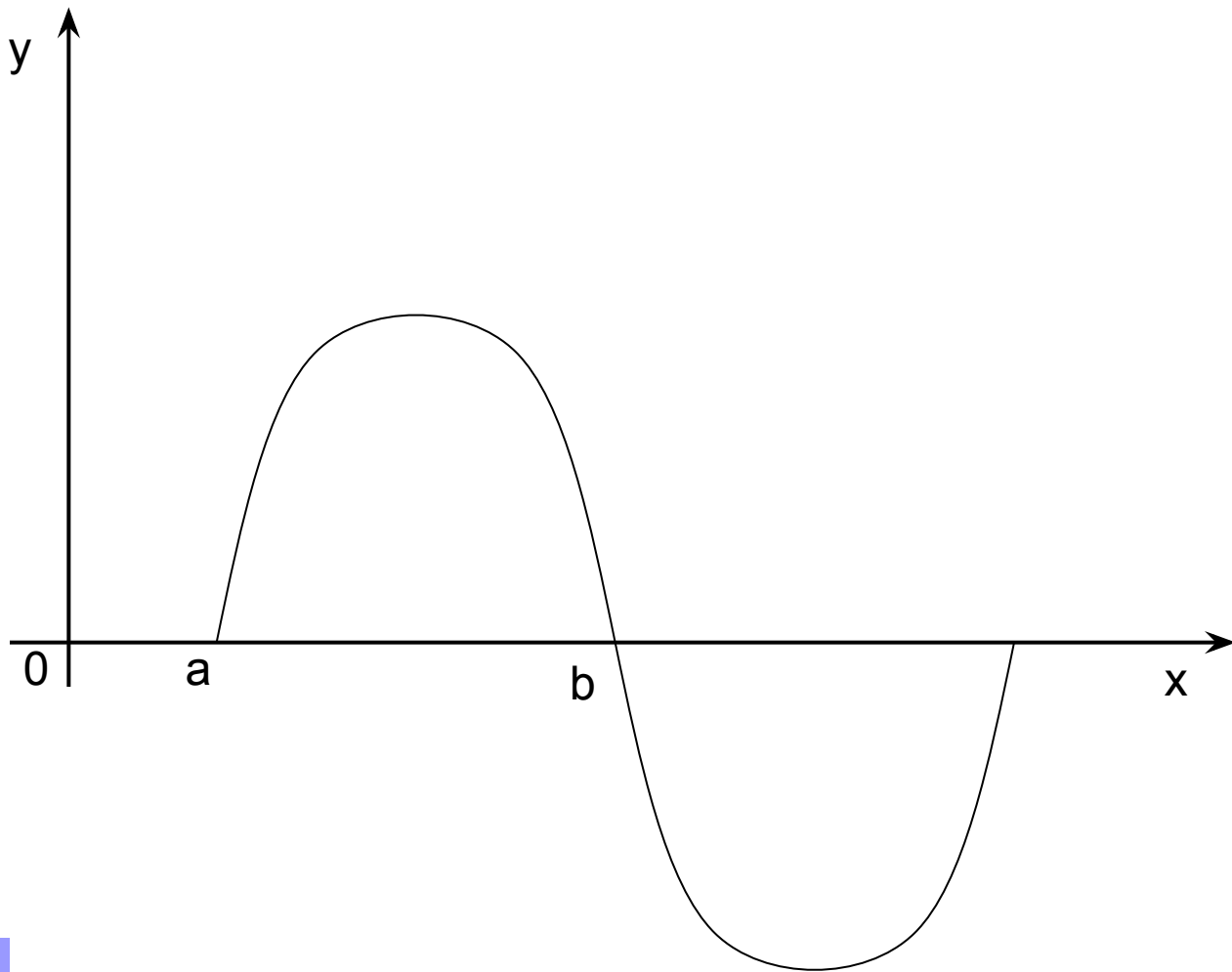
$$2) \int_a^b (f(x) + \varphi(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b \varphi(x) dx.$$

$$3) \text{ Если } a < c < b, \text{ то } \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

$$4) \text{ Если } f(x) > 0, x \in [a, b], \text{ то } \int_a^b f(x) dx > 0.$$

$$5) \text{ Если } f(x) > \varphi(x) \text{ для всех } x \in [a, b], \text{ то } \int_a^b f(x) dx > \int_a^b \varphi(x) dx.$$





$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Пример:

$$\begin{aligned}\int_1^4 (x^3 + 2x)dx &= \int_1^4 x^3 dx + \int_1^4 2x dx = \frac{x^4}{4}\Big|_1^4 + 2 \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_1^4 = \frac{x^4}{4}\Big|_1^4 + x^2\Big|_1^4 = \\ &= \left(\frac{4^4}{4} - \frac{1^4}{4}\right) + (4^2 - 1^2) = \left(\frac{256}{4} - \frac{1}{4}\right) + (16 - 1) = \frac{255}{4} + 15 = 78,75\end{aligned}$$