Направление подготовки

31.05.02 Педиатрия (врач педиатр)

Учебный План утвержден решениями Ученого совета НГМУ

Протокол №3 от 17.04.2018 г.:

Учебная дисциплина

Б1.Б.12 МАТЕМАТИКА

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ
НГМУ

ЛЕКЦИОННОЕ ЗАНЯТИЕ

Тема:

Непрерывные случайные величины и их числовые характеристики.

Основные законы распределения непрерывных случайных величин.

Правило трех сигм.

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ
НГМУ

МАТЕМАТИКА

Рабочая программа дисциплины

(лекционные занятия)

Раздел 1. Теория вероятностей — 8 час

1	Тема-1.1 Введение в теорию вероятностей. Логические операции над множествами. Элементы комбинаторики. Вероятность события - определения, основные свойства и формулы вычисления.	2 час
2	Тема-1.2 Алгебра событий. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Формула полной вероятности и формула Байеса. Формула Бернулли и формула Пуассона.	2 час
3	Тема-1.3 Случайные величины и их числовые характеристики. Основные законы распределения дискретных случайных величин.	2 час
4	Тема-1.4 Непрерывные случайные величины и их числовые характеристики. Основные законы распределения непрерывных случайных величин. Правило трех сигм.	2час

Раздел 2. Математическая статистика — 4 час

5	Тема-2.1 Основные понятия математической статистики. Статистические оценки параметров распределения.	2 час
6	Тема-2.2 Основные понятия теории статистических гипотез. Проверка статистических гипотез. Основы теории корреляции.	2 час

Тема - 1.4

План лекционного занятия

(лекционное занятие)

1	**Непрерывные случайные величины и их числовые характеристики** • Определение НСВ • Плотность распределения (вероятностей) НСВ • Математическое ожидание НСВ • Дисперсия НСВ • Среднее квадратическое отклонение НСВ •Замечания и примеры	30 мин
2	**Основные законы распределения НСВ**	50 мин
3	**Правило трех сигм**	10мин

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ (СВ)

ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ (ДСВ)

НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ (НСВ)

Дискретная случайная величина (ДСВ) – это случайная величина, которая принимает отдельное изолированное, счетное множество значений.

Плотностью распределения вероятностей или **плотностью распределения** *f (x)* непрерывной случайной величины *X* называется производная ее функции распределения:

$$f\,(x) = F\,(x)$$

Теорема. Вероятность того, что непрерывная случайная величина **X** примет значение, принадлежащее интервалу **(a; b),** равна определенному интегралу от плотности распределения, взятому в пределах от a до b:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины *X*, возможные значения которой принадлежат отрезку от *a* до *b*, называют определенный интеграл:

$$M(X) = \int_a^b x \cdot f(x)dx$$

Дисперсией непрерывной случайной величины называют математическое ожидание квадрата ее отклонения.

$$D(X)=\int_a^b \left(x-M(X)\right)^2 f(x)dx$$

Среднее квадратическое отклонение НСВ определяется равенством:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

Замечание 1.

Свойства математического ожидания и дисперсии дискретных случайных величин сохраняются и для непрерывных величин.

Замечание 2.

Для вычисления дисперсии НСВ **X** можно использовать формулу:

$$D(X) = \int_a^b x^2 f(x)dx - (M(X))^2$$

Пример: Найти плотность распределения и числовые характеристики случайной величины X заданной интегральной функцией распределения.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & при \quad x \le 3; \\ \dfrac{x^2-9}{27}, & при \quad 3 < x \le 6; \\ 1, & при \quad x > 6. \end{cases}$$

Решение:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases} 0, & при \quad x\le 3; \\ \dfrac{2}{27}x, & при \quad 3<x\le 6; \\ 0, & при \quad x>6. \end{cases}$$

$$M(X)=\int_3^6 \frac{2x^2}{27}dx=\frac{2}{27}\int_3^6 x^2dx=\frac{2}{27}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_3^6=\frac{2}{81}\cdot(6^3-3^3)=\frac{14}{3}=4\frac{2}{3}$$

$$D(X)=\int_3^6 x^2\cdot\frac{2x}{27}dx-\left(\frac{14}{3}\right)^2=\frac{2}{27}\int_3^6 x^3dx-\left(\frac{14}{3}\right)^2=\frac{13}{18}\approx 0{,}72$$

$$\sigma(X)=\sqrt{0{,}72}\approx 0{,}85$$

Тема - 1.4

План лекционного занятия

(лекционное занятие)

1	**Непрерывные случайные величины и их числовые характеристики**	30 мин
2	**Основные законы распределения НСВ** • Равномерный закон распределения вероятностей • Показательный закон распределения вероятностей • Нормальный закон распределения вероятностей	50 мин
3	**Правило трех сигм**	10мин

При решении задач, которые выдвигает практика, приходится сталкиваться с различными распределениями непрерывных случайных величин.

Плотности распределений непрерывных случайных величин называют также **законами распределений**.

Часто встречаются законы равномерного, нормального и показательного распределений.

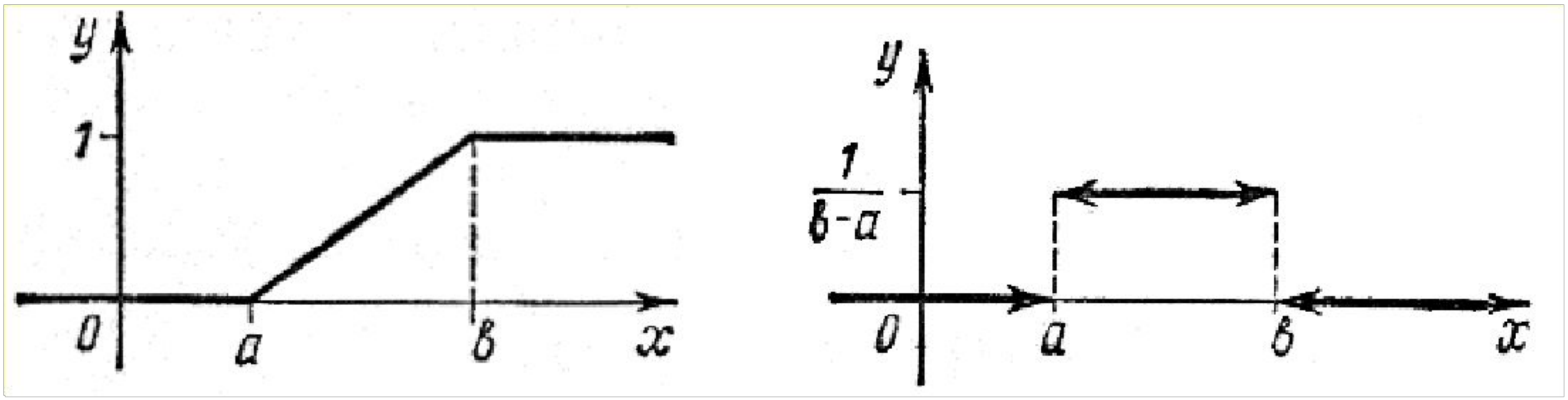
Распределение вероятностей называют **равномерным**, если на интервале, которому принадлежат все возможные значения случайной величины, плотность распределения сохраняет постоянное значение.

НСВ считается равномерно распределенной, если ее плотность вероятности имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le a, \\ \dfrac{1}{b-a}, & \text{если} \quad a < x \le b, \\ 0, & \text{если} \quad x > b. \end{cases}$$

Диаграммы равномерного распределения

Функция распределения F(x) *Кривая распределения f(x)*



Числовые характеристики равномерно распределенной случайной величины находятся по следующим формулам:

$$M(X)=\frac{a+b}{2}$$

$$D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$$

Пример: Случайная величина распределена равномерно в интервале (2;8). Найти ее математическое ожидание и дисперсию.

Решение:

$$M(X) = \frac{2+8}{2} = 5$$

$$D(X) = \frac{(8-2)^2}{12} = 3$$

Показательным (экспоненциальным) называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины ***X***, которое описывается плотностью:

$$f(x)=\begin{cases}0 & при \quad x<0,\\ \lambda e^{-\lambda x} & при \quad x\geq 0.\end{cases}$$

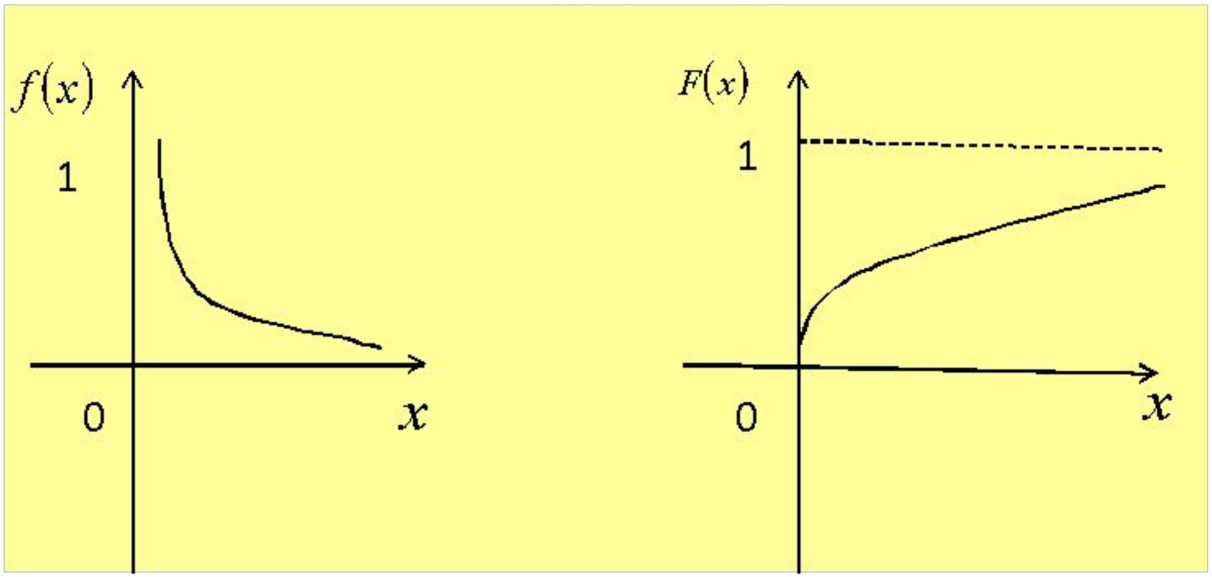
где **?** - постоянная положительная величина.

Показательное распределение определяется одним параметром ?. Это указывает на преимущество показательного распределения по сравнению с распределениями, зависящими от большего числа параметров.

Функция распределения показательного закона имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & npu \quad x<0, \\ 1-e^{-\lambda x} & npu \quad x\geq 0. \end{cases}$$

Графики функций F (x) и f (x)



Вероятность попадания в заданный интервал непрерывной случайной величины *X*, которая распределена по показательному закону, заданному функцией распределения **F(x) = 1 – e^{-?x} (x?0)** вычисляется по формуле:

$$P(a < X < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$$

2. Основные законы распределения НСВ

• Показательный закон распределения

Пример: Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону

$$f(x) = 2e^{-2x} \quad \text{при} \quad x \geq 0 \;;$$
$$f(x) = 0 \quad \text{при} \quad x < 0 \;.$$

Найти вероятность того, что в результате испытания X попадет в интервал *(0,3; 1)*.

Решение: по условию $? = 2,$ тогда

$$P(0,3<x<1) = e^{-(2\cdot 0.3)} - e^{-(2\cdot 1)} = e^{-0.6} - e^{-2} = 0,54881 - 0,13534 \; ? \; 0,41$$

Числовые характеристики непрерывной случайной величины X распределенной по показательному закону вычисляются по формулам:

$$M(X) = \frac{1}{\lambda}$$

$$D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2}} = \frac{1}{\lambda}$$

Пример: Непрерывная случайная величина *X* распределена по показательному закону

f(x) = 5e^-5x^ при x ? 0;

f(x) = 0 при x < 0.

Найти математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение и дисперсию X.

Решение: по условию ? = 5, тогда

$$M(X)=\sigma(X)=\frac{1}{\lambda}\Rightarrow M(X)=\sigma(X)=\frac{1}{5}=0{,}2$$

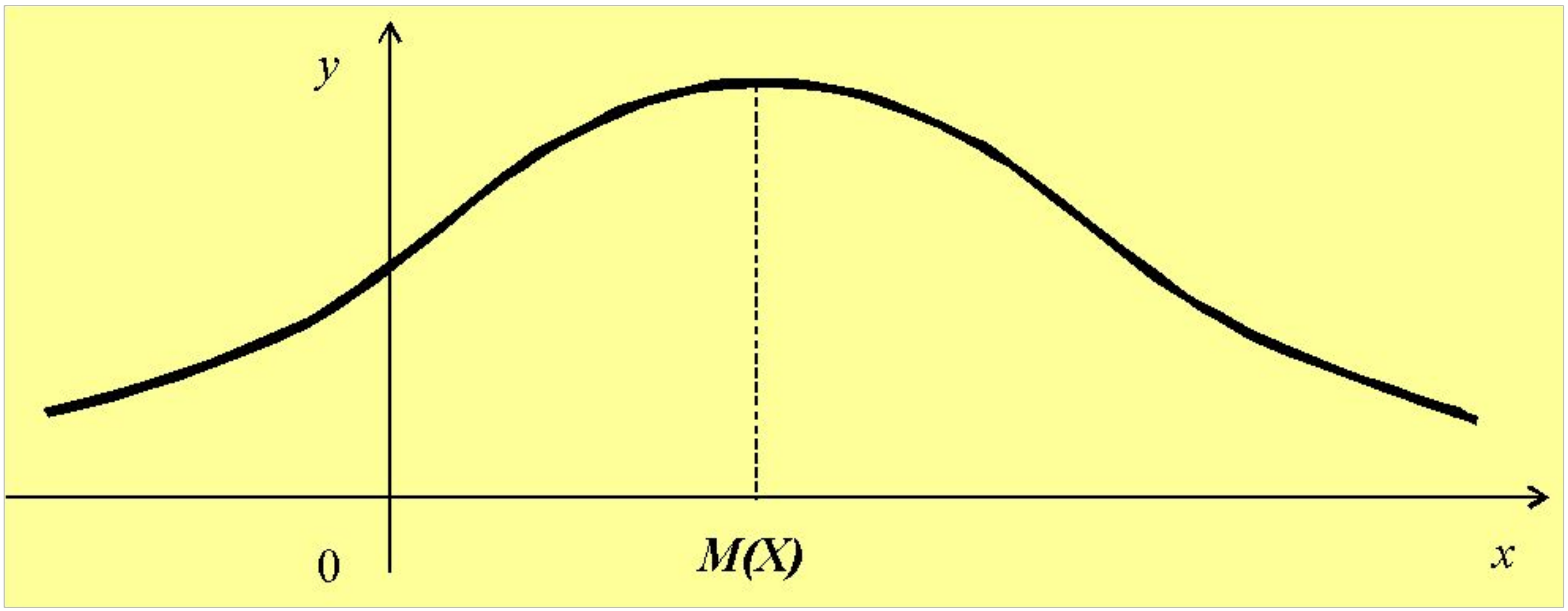
$$D(X)=\frac{1}{\lambda^2}\Rightarrow D(X)=\frac{1}{5^2}=\frac{1}{25}=0{,}04$$

Нормальным называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины, которое описывается плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

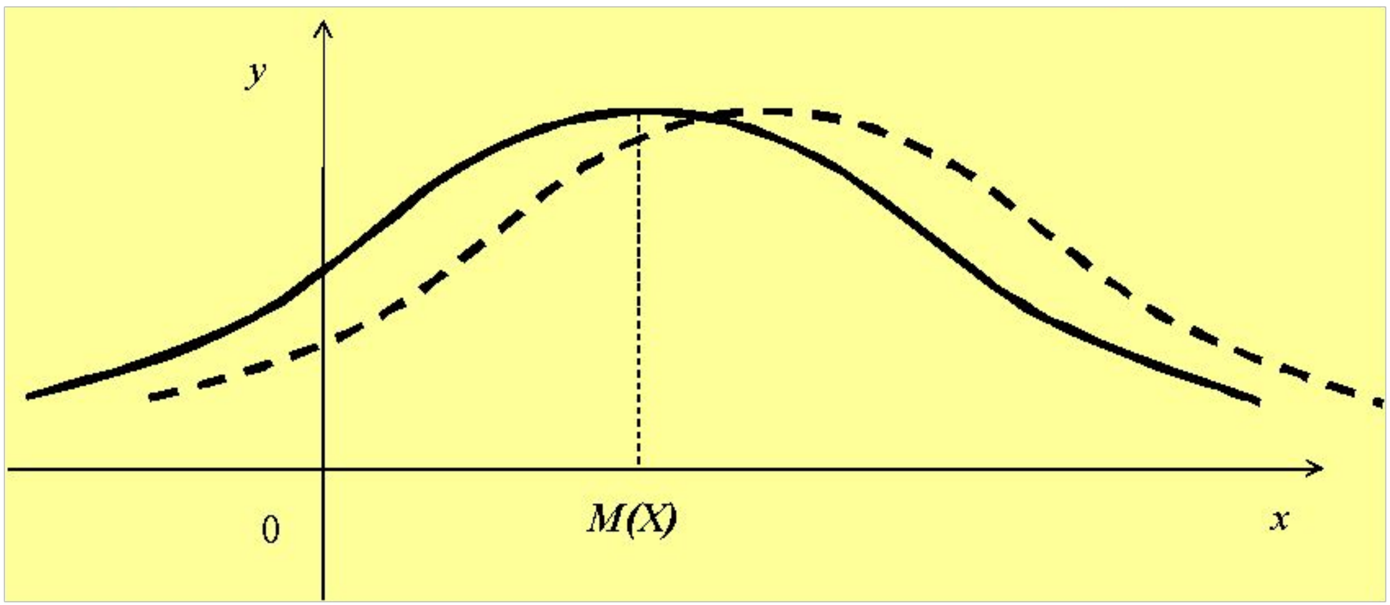
Нормальное распределение определяется двумя параметрами ? и
Достаточно знать эти параметры, чтобы задать нормальное распределение.

График плотности нормального распределения называют **кривой Гаусса**.



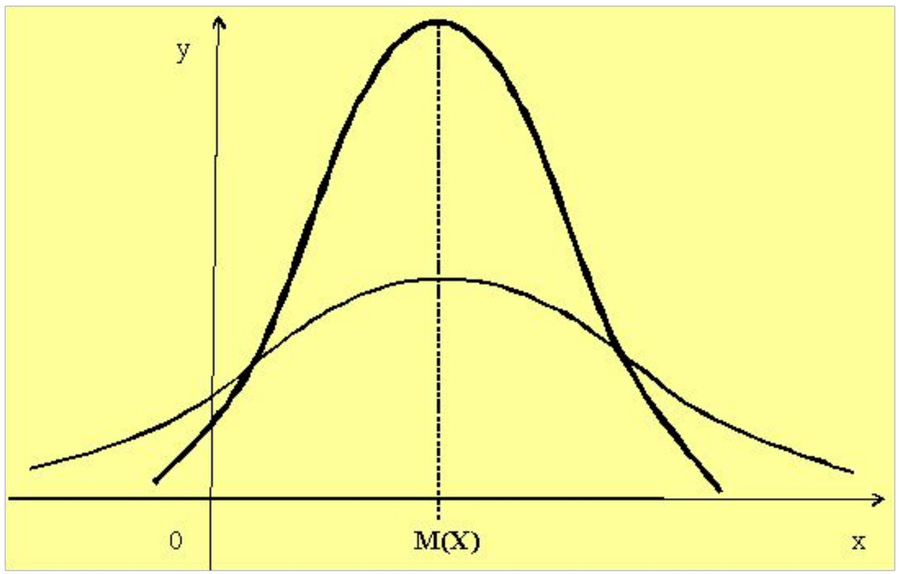
Изменение величины параметра ? не изменяет формы нормальной кривой (кривой Гаусса), а приводит лишь к ее сдвигу вдоль оси абсцисс:

- *вправо, если математическое ожидание возрастает*
- *влево, если математическое ожидание убывает.*



С возрастанием среднего квадратического отклонения максимальная ордината нормальной кривой убывает, а сама кривая становится более пологой, т.е. сжимается к оси абсцисс.

При убывании среднего квадратического отклонения нормальная кривая становится более «островершинной» и растягивается в положительном направлении оси ординат.



При математическом ожидании равном нулю и среднем квадратическом отклонении равном единице нормальную кривую называют **нормированной**.

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Пусть случайная величина распределена по нормальному закону. Тогда вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу , равна:

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx$$

В результате преобразований и использования функции Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

окончательно получим:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$$

Пример: Случайная величина X распределена по нормальному закону с математическим ожиданием равным 40 и средним квадратическим отклонением 30 . Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (20;70).

Решение:

$$P(20 < X < 70) = \Phi\left(\frac{70-40}{30}\right) - \Phi\left(\frac{20-40}{30}\right) =$$

$$= \Phi(1) + \Phi\left(\frac{2}{3}\right) = 0{,}3413 + 0{,}2486 = 0{,}5899$$

Существует необходимость вычислить вероятность того, что отклонение нормально распределенной случайной величины по абсолютной величине меньше заданного положительного числа , т. е. найти вероятность осуществления неравенства

$$|X - a| < \delta$$

$$P\left(|X - a| < \delta\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

Пример: Случайная величина распределена нормально

$$M(X)=20;\sigma(X)=10$$

Найти вероятность того, что отклонение по абсолютной величине будет меньше трех.

Решение: По условию задачи ? = 20; = 10; = 3. Тогда

$$P(|X-20|<3)=2\varPhi\left(\frac{3}{10}\right)=$$

$$=2\varPhi(0{,}3)=2\cdot 0{,}1179=0{,}2358$$

Тема - 1.4
План лекционного занятия

(лекционное занятие)

1	**Непрерывные случайные величины и их числовые характеристики**	30 мин
2	**Основные законы распределения НСВ**	50 мин
3	**Правило трех сигм**	10мин

Правило трех сигм: Если случайная величина имеет нормальный закон распределения с параметрами **?** и

то практически достоверно (вероятность 0,9973), что ее значения заключены в интервале

$$(a - 3\sigma\ ;\ a + 3\sigma)$$

На практике правило трех сигм применяют так: если распределение изучаемой величины неизвестно, но условие, указанное в правиле выполняется, то есть основание предполагать, что изучаемая величина распределена нормально.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ