Лекция 13

- **Аналитическая механика** – устанавливает общие, единые методы изучения движения и равновесия любых самых сложных материальных систем средствами математического анализа. Для этого вводятся новые понятия и обобщаются старые.
- **Связи** – рассматриваются теперь как некоторые условия, налагаемые на систему, которые должны удовлетворяться в процессе движения системы. Они содержат соотношения (уравнения или неравенства) между координатами, компонентами скоростей и ускорений и, возможно, времени.

Классификация связей: *По интегрируемости:*

Голономные (геометрические) – выражаются конечными уравнениями относительно координат или интегрируемыми дифференциальными уравнениями относительно координат: $\varphi(x_k, y_k, z_k, t) = 0$

Неголономные (кинематические) - выражаются неинтегрируемыми дифференциальными уравнениями относительно координат, т.е. уравнениями, содержащими не только координаты точек системы, но и их производные по времени: $\varphi(x_k, y_k, z_k, \dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k, t) = 0$
Неинтегрируемость состоит в том, что их нельзя привести к виду уравнений голономной связи.

По зависимости от времени:

Склерономные (стационарные) – не зависящие от времени: $\varphi(x_k, y_k, z_k) = 0$
Например, уравнение траектории, полученное для некоторой точки
рассматривается как уравнение склерономной голономной связи:

Реономные (нестационарные) – зависящие от времени. Например

По освобождаемости:

Неосвобождающие (удерживающие или двухсторонние) – описыв
или поверхности, описываемой уравнением. Этому соответствует,

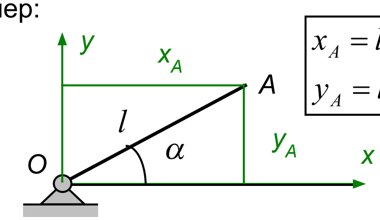
Освобождающие (неудерживающие или односторонние) – выраж
например, гибкая нить или гладкая поверхность.

Если на систему N точек в пространстве наложено m голономных связей, то декартовые координаты всегда могут быть выражены конечными соотношениями:

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= x_1(q_1, q_2, ..., q_n, t); \\ x_2 &= x_2(q_1, q_2, ..., q_n, t); \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots; \\ x_{3N} &= x_1(q_1, q_2, ..., q_n, t). \end{aligned}}$$

Число обобщенных координат равно $n = 3N - m$.

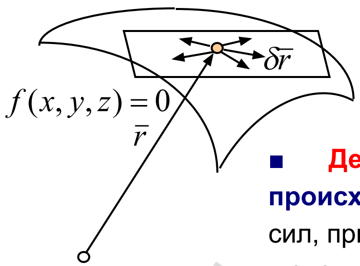
- **Обобщенные координаты** – независимые параметры, однозначно определяющее положение механической системы при ее движении. Обобщенность состоит в том, что они могут иметь различную природу (линейные или угловые перемещения относительно некоторого начального положения или какие-либо другие величины). Общее обозначение – q_i (i = 1,…,n).
- **Число степеней свободы** – число независимых обобщенных координат, через которые можно выразить декартовые координаты всех точек системы. Например:



$$\boxed{\begin{aligned} x_A &= l\cos\alpha; \\ y_A &= l\sin\alpha \end{aligned}}$$

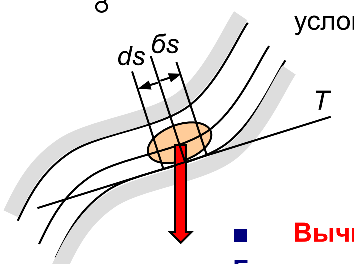
Здесь положение любой точки стержня (например, A) однозначно определяется значением всего *одной* величины – угла α, который является *обобщенной* координатой (q = α). Число степеней свободы равно n = 1.
Уравнение связи для рассматриваемой точки A: $\boxed{x^2 + y^2 = l^2}$

- **Возможные перемещения – бесконечно малые перемещения, допускаемые наложенными на систему связями.**



С точностью до бесконечно малых **приращения радиуса-вектора** лежат в касательной плоскости к поверхности связи и представляют собой **возможные перемещения**. В случае нестационарной голономной связи $f(x,y,z,t) = 0$ возможные перемещения рассматриваются для положения и формы поверхности связи, соответствующих данному моменту времени. **Возможные перемещения не зависят от приложенных к системе сил.**

- **Действительные перемещения – бесконечно малые (элементарные) перемещения, действительно (фактически) происходящие за время *dt*, допускаемые наложенными на систему связями**. Действительные перемещения зависят от сил, приложенных к системе, от вида связей (стационарных, нестационарных, голономных, неголономных) и начальных условий. Таким образом, возможные перемещения являются более общим понятием, чем действительные перемещения.

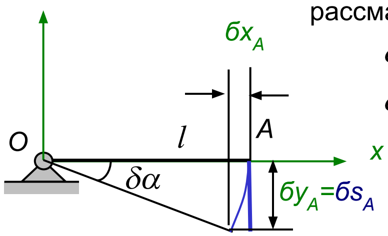


Поскольку вектор положения точки системы можно выразить через обобщенные координаты $\bar{r}_k = \bar{r}_k(q_1, q_2, ..., q_n)$ то возможные перемещения выражаются через приращения обобщенных координат как полный дифференциал:

$$\delta\bar{r}_k = \frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_2}\delta q_2 + ... + \frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_n}\delta q_n \quad \text{или} \quad \boxed{\delta\bar{r}_k = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_i}\delta q_i.}$$

- **Вычисление возможных перемещений:**

Геометрический способ - в силу малости возможных перемещений при повороте твердого тела любая его точка может рассматриваться движущейся не по дуге, а по перпендикуляру к радиусу вращения в сторону угла поворота:

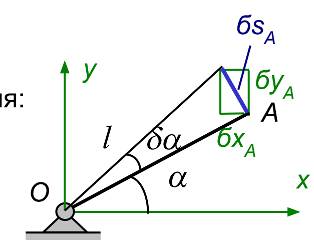


$$\delta x_A = l - l\cos\delta\alpha; \qquad \delta y_A = l\sin\delta\alpha.$$

Для малых углов cosα ≈ 1, sinα ≈ α, тогда:

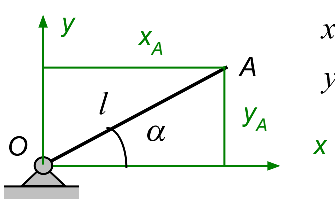
$$\boxed{\delta x_A \approx 0; \quad \delta y_A \approx \delta s_A = l\delta\alpha.}$$

Например, для наклонного стержня:



$$\boxed{\delta s_A = l\delta\alpha.} \qquad \boxed{\delta x_A = \delta s_A\sin\alpha = l\sin\alpha\delta\alpha; \quad \delta y_A \approx \delta s_A\cos\alpha = l\cos\alpha\delta\alpha.}$$

Аналитический способ – вычисляется вариация от координат:



$$x_A = l\cos\alpha; \quad y_A = l\sin\alpha \Rightarrow$$

$$\delta x_A = \frac{\partial}{\partial\alpha}(l\cos\alpha)\delta\alpha = -l\sin\alpha\delta\alpha;$$

$$\delta y_A = \frac{\partial}{\partial\alpha}(l\sin\alpha)\delta\alpha = l\cos\alpha\delta\alpha.$$

В отличие от геометрического способа знаки возможного приращения координат получаются автоматически. При использовании геометрического способа в дальнейших вычислениях, например, работы, необходимо учитывать направление полученного приращения (перемещения).

- **Возможная работа силы – элементарная работа силы на том или ином возможном перемещении:** $\boxed{\delta A = \bar{F}\delta\bar{r}.}$

В координатном виде: $\boxed{\delta A = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z.}$ В естественном виде: $\boxed{\delta A = F\delta s\cos(\bar{F}, \delta\bar{r}).}$

Лекция 13 (продолжение – 13.3)

- **Идеальные связи** – **связи, при которых сумма элементарных работ сил реакций связи на любом возможном перемещении равна нулю:**

$$\delta A^R = \sum_{k=1}^{n} \overline{R}_k \delta \overline{r}_k = 0.$$

Примеры идеальных связей: абсолютно гладкая поверхность (при скольжении), абсолютно твердая поверхность (при качении без скольжения). **Любую неидеальную связь можно рассматривать как идеальную, если соответствующие реакции связи (совершающие работу на возможных перемещения) причислить к задаваемым (активным) силам.**

- **Принцип возможных перемещений** – **Для равновесия материальной системы, подчиненной голономным, стационарным, двухсторонним и идеальным связям, необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех активных сил на любом возможном перемещении из предполагаемого положения равновесия равнялось нулю:**

$$\delta A^F = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k \delta \overline{r}_k = 0.$$

Доказательство необходимости: Система находится в равновесии и для каждой точки удовлетворяется уравнение равновесия: $\overline{F}_k + \overline{R}_k = 0.$
Умножим скалярно на вектор возможного перемещения точки и сложим:

$$\sum \overline{F}_k \delta \overline{r}_k + \underbrace{\boxed{\sum \overline{R}_k \delta \overline{r}_k}}_{= 0} = 0. \Rightarrow \delta A^F = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k \delta \overline{r}_k = 0.$$

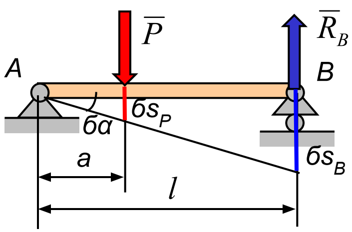
Доказательство достаточности: Дано: $\sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k \delta \overline{r}_k = 0.$
Предположим, что равновесия нет.
Тогда каждая из точек под действием активных сил придет в движение, переместится за
...сматривая эти перемещения,

$$\ldots \sum \overline{F}_k \delta \overline{r}_k + \underbrace{\boxed{\sum \overline{R}_k \delta \overline{r}_k}}_{= 0} > 0.$$

Получили противоречие с исходным равенством.
Значит предположение об отсутствии равновесия неверно.

- **Примеры использования принципа возможных п...**

Пример 1. Определить реакцию балки в правой опоре:



Балка неподвижна и не им... ...бросим связь, реакция которой отыскивается, и за...
Без правой опоры балка м... ...ию R_B причисляем к активным силам. Зададим малое во...
Вычислим возможные пер...
Запишем сумму работ: ... $0.$ $\Rightarrow$

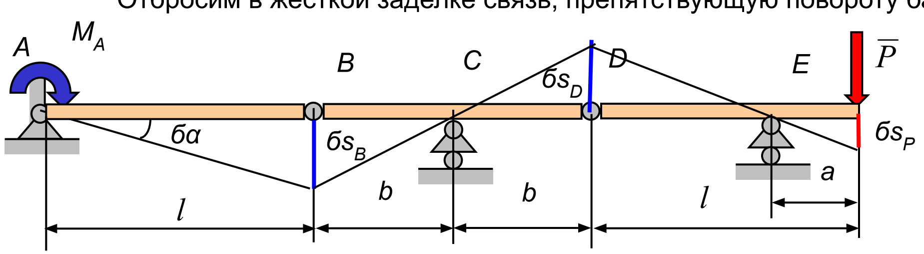
$$R_B = \frac{Pa\delta\alpha}{l\delta\alpha} = \frac{Pa}{l}.$$

Заметим, что
1. для нахождения опорного момента M_A из уравнений статики потребовалось бы решить как минимум три уравнения равновесия;
2. эпюра возможных перемещений пропорциональна линии влияния усилия;
3. если задать возможное перемещение для искомой реакции равным 1, например, $\delta\alpha$ =1, то эпюра перемещений будет полностью тождественна линии влияния поскольку

$$\delta A = M_A \cdot 1 + 1 \cdot \delta s_F(z) = 0; \quad M_A = -\delta s_F(z).$$

Пример 2. Определить опорный момент многопролетной...

Отбросим в жесткой заделке связь, препятствующую повороту балки, и заменим ее парой сил M_A:



Вычислим возможные перемещения:

$$\delta s_B = l\delta\alpha;$$

$$\delta s_D = \delta s_B = l\delta\alpha;$$

$$\delta s_F = \frac{a}{l-a}\delta s_D = \frac{a}{l-a} l\delta\alpha.$$

Запишем сумму работ:

$$\delta A = M_A\delta\alpha + F\delta s_F = 0.$$

$$M_A\delta\alpha + F\frac{a}{l-a} l\delta\alpha = 0.$$

$$M_A = -F\frac{a}{l-a} l.$$

- **Общее уравнение динамики** – Принцип возможных перемещений, дающий общий метод решения задач статики, можно применить к решению задач динамики, а именно:

1. Применить **принцип Даламбера**, сводящий задачу динамики с задаче статики: $\boxed{\bar P_k + \bar R_k + \bar\Phi_k = 0; \quad (k = 1,2,\dots,N)}$

2. Применить **принцип возможных перемещений**, решающий эту статическую задачу:

$$P_k\delta s_k \cos(\bar P_k, \bar{\delta s}_k) + R_k\delta s_k \cos(\bar R_k, \bar{\delta s}_k) + \Phi_k\delta s_k \cos(\bar\Phi_k, \bar{\delta s}_k) = 0; \quad (k = 1,2,\dots,N)$$

Просуммируем по всем точкам:

$$\sum P_k\delta s_k \cos(\bar P_k, \bar{\delta s}_k) + \boxed{\sum R_k\delta s_k \cos(\bar R_k, \bar{\delta s}_k)} + \sum \Phi_k\delta s_k \cos(\bar\Phi_k, \bar{\delta s}_k) = 0.$$

= 0 – для идеальных связей

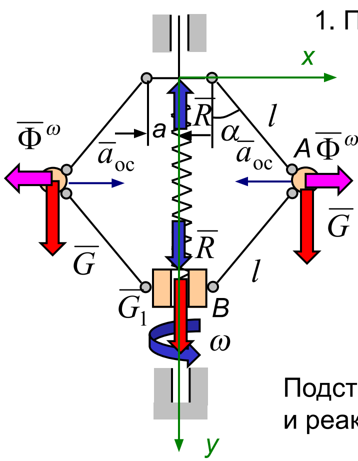
Получим **общее уравнение динамики**: $\boxed{\sum P_k\delta s_k \cos(\bar P_k, \bar{\delta s}_k) + \sum \Phi_k\delta s_k \cos(\bar\Phi_k, \bar{\delta s}_k) = 0.}$

В любой момент времени сумма работ всех задаваемых сил и сил инерции несвободной механической системы с двухсторонними идеальными связями на любом возможном перемещении равна нулю.

Более короткие записи **общего уравнения динамики**: $\boxed{\sum(\bar P_k + \bar\Phi_k)\delta\bar r_k = 0}$ или $\boxed{\sum(\bar P_k - m_k\bar a_k)\delta\bar r_k = 0.}$

Или еще короче: $\boxed{\delta A = 0,}$ где δA – возможная работа всех задаваемых сил и сил инерции на любом возможном перемещении.

Пример. Центробежный регулятор вращается вокруг вертикальной оси с постоянной скоростью. При α = 0 пружина не деформирована. Жесткость пружины *c*. Длина каждого из стержней l. Плечо подвески *a*. Вес каждого из шаров *G*, вес муфты G_1. Определить угловую скорость установившегося вращения для данного угла α.



1. Покажем заданные силы:

2. Добавим силы инерции: $\bar\Phi^\omega = -m\bar a_{oc}; \quad \Phi^\omega = ma_{oc} = \frac{G}{g}\omega^2(a + l\sin\alpha).$

3. Упругая связь (пружина), не являющаяся идеальной (совершает работу на возможных перемещениях), должна быть отброшена и заменена реакцией, которая включается в число заданных сил:

Модуль реакции пружины пропорционален изменению длины (укорочению) пружины:

$$R = c\Delta l = c(2l - 2l\cos\alpha) = 2cl(1 - \cos\alpha).$$

4. Определим проекции возможных перемещений (вариации координат) точек приложения сил:

$$x_A = a + l\sin\alpha; \qquad \delta x_A = l\cos\alpha\delta\alpha;$$
$$y_A = l\cos\alpha; \quad \Rightarrow \quad \delta y_A = -l\sin\alpha\delta\alpha;$$
$$y_B = 2l\cos\alpha. \qquad \delta y_B = -2l\sin\alpha\delta\alpha.$$

5. Составим общее уравнение динамики:

$$\delta A = 2G\delta y_A + (G_1 + R)\delta y_B + 2\Phi^\omega\delta x_A = 0$$

Подставим значения сил инерции и реакции пружины:

$$2G(-l\sin\alpha\delta\alpha) + (G_1 + 2cl(1-\cos\alpha))(-2l\sin\alpha\delta\alpha) + 2\frac{G}{g}\omega^2(a + l\sin\alpha)l\cos\alpha\delta\alpha = 0$$

Отсюда после некоторых сокращений и упрощений:

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{(G + G_1 + 2cl(1-\cos\alpha))g\cdot tg\alpha}{G(a + l\sin\alpha)}}}$$

Лекция 14 (продолжение – 14.2)

- **Обобщенные силы –** следующий шаг к обобщению, а именно, механического действия заданных сил на систему, после введения обобщенных координат (обобщения задания движения системы).

Пусть механическая система имеет s степеней свободы, ее положение определяется s обобщенными координатами $q_1, q_2, \ldots, q_s$.

Сообщим некоторой обобщенной координате q_j бесконечно малое приращения, оставляя остальные обобщенные координаты неизменными, т.е. $\delta q_1 = \delta q_2 = \ldots = \delta q_{j-1} = 0$, $\delta q_j \neq 0$, $\delta q_{j+1} = \ldots = \delta q_s = 0$. В результате все N точек системы получат какие-то бесконечно малые перемещения:

$\delta \bar{s}_{1,j}, \delta \bar{s}_{2,j}, \ldots, \delta \bar{s}_{N,j}$ - совокупность этих перемещений представляет **одно из возможных перемещений** системы.

Элементарная работа всех заданных сил системы на этих перемещениях равна: $\delta A_{qj} = \sum\limits_{k=1}^{N} F_k \delta s_{kj} \cos(\bar{F}_k, \delta \bar{s}_{kj})$.

Поставим в соответствие ко всем заданным силам системы некоторую одну (воображаемую) силу, которая совершает такую же работу на данном возможном (обобщенном) перемещении δq_j, что и все силы системы: $Q_j \delta q_j = \sum\limits_{k=1}^{N} F_k \delta s_{kj} \cos(\bar{F}_k, \delta \bar{s}_{kj})$.

Отсюда величина этой силы определяется как:

$$\boxed{Q_j = \frac{\sum\limits_{k=1}^{N} F_k \delta s_{kj} \cos(\bar{F}_k, \delta \bar{s}_{kj})}{\delta q_j} = \frac{\delta A_{qj}}{\delta q_j}.}$$

-обобщенная сила Q_j, соответствующая обобщенной координате q_j– скалярная величина, равная отношению элементарной работы заданных сил на всех перемещениях системы, вызванных элементарным приращением $\delta q_j \neq 0$ координаты q_j, к величине этого приращения.

1. Размерность этой силы определяется размерностью обобщенной координаты. Например, если q_j есть линейная обобщенная координата, то размерность обобщенной силы $\boldsymbol{Q_j}$ соответствует силе (Н). Если q_j есть угловая обобщенная координата, то размерность обобщенной силы $\boldsymbol{Q_j}$ соответствует паре сил или моменту (Нм).
2. Число обобщенных сил равно числу обобщенных координат. Размерность каждой из обобщенных сил определяется размерностью соответствующей обобщенной координаты.

- **Другие формулы для вычисления обобщенной силы:**

В векторной форме: $\delta A_{qj} = \sum\limits_{k=1}^{N} F_k \delta s_{kj} \cos(\bar{F}_k, \delta \bar{s}_{kj}) = \sum\limits_{k=1}^{N} \bar{F}_k \delta \bar{r}_{kj}$.

Радиус-вектор k-той точки есть функция всех обобщенных координат: $\bar{r}_k = \bar{r}_k(q_1, q_2, \ldots, q_s)$

Вариация радиуса-вектора по обобщенным координатам при $\delta q_1 = \delta q_2 = \ldots = \delta q_{j-1} = 0$, $\delta q_j \neq 0$, $\delta q_{j+1} = \ldots = \delta q_s = 0$:

$$\delta \bar{r}_k = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}\delta q_j + \ldots + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_s}\delta q_s = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}\delta q_j.$$

Отсюда: $\delta A_{qj} = \sum\limits_{k=1}^{N} \bar{F}_k \delta \bar{r}_{kj} = \sum\limits_{k=1}^{N} \bar{F}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}\delta q_j.$ ⇒ $\boxed{Q_j = \sum\limits_{k=1}^{N} \bar{F}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}.}$

В координатной форме: $\boxed{Q_j = \sum\limits_{k=1}^{N} \left(X_k \frac{\partial x_k}{\partial q_j} + Y_k \frac{\partial y_k}{\partial q_j} + Z_k \frac{\partial z_k}{\partial q_j} \right).}$

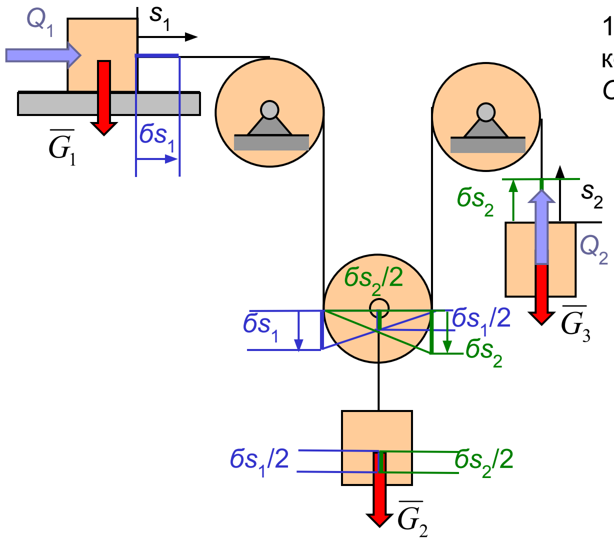
В случае потенциальных сил: $\Pi = \Pi(q_1, q_2, \ldots, q_s)$.

$\boxed{T + \Pi = const.}$ ⇒ $\delta T + \delta \Pi = 0.$ ⇒ $\delta A = \delta T = -\delta \Pi = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}\delta q_j.$ ⇒ $\boxed{Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}.}$

$\boxed{\delta T = \delta A.}$ ⇒

Лекция 14 (продолжение – 14.3)

- **Пример вычисления обобщенных сил –** Для механической системы трех грузов с двумя неподвижными и одним подвижным блоками определить обобщенные силы Q_j.



1. Число обобщенных сил равно числу обобщенных координат. Число обобщенных координат равно количеству степеней свободы, которое можно определить последовательным наложением связей: *Ограничим горизонтальное перемещение груза* 1, грузы 2 и 3 могут вертикально перемещаться.

Ограничим дополнительно вертикальное перемещение, например, груза 3.

Груз 2 перемещаться не может (связи считаем двухсторонними).

Итак, n = 2. Выбираем обобщенные координаты $q_1 = s_1$ и $q_2 = s_2$:

2. Для определения Q_1 задаем произвольное малое перемещение $\delta q_1 = \delta s_1$ ($\delta q_2 = \delta s_2 = 0$).

Вычисляем возможную работу заданных сил: $\delta A_{q1} = G_2 \dfrac{\delta s_1}{2}.$ ⇒ $\boxed{Q_1 = \dfrac{\delta A_{q1}}{\delta q_1} = \dfrac{G_2}{2}.}$

3. Для определения Q_2 задаем произвольное малое перемещение $\delta q_2 = \delta s_2$ ($\delta q_1 = \delta s_1 = 0$).

Вычисляем возможную работу заданных сил: $\delta A_{q2} = G_2 \dfrac{\delta s_2}{2} - G_3 \delta s_2.$ ⇒ $\boxed{Q_2 = \dfrac{\delta A_{q2}}{\delta q_2} = \dfrac{G_2}{2} - G_3.}$

- **Уравнения равновесия в обобщенных силах –** Согласно принципа возможных перемещений при равновесии системы: $\boxed{\delta A = 0.}$

Зададим возможные перемещения точек системы, вызванные бесконечно малыми приращениями всех обобщенных координат:

$$\delta \overline{r}_k = \frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q_2}\delta q_2 \ldots + \frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q_s}\delta q_s = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q_j}\delta q_j.$$

Вычислим возможную работу заданных сил:

$$\delta A = \sum_{k=1}^{N} \overline{F}_k \cdot \delta \overline{r}_k = \sum_{k=1}^{N} \overline{F}_k \cdot \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q_j}\delta q_j.$$

Перегруппируем суммы произведений:

$$\delta A = \sum_{j=1}^{s} \delta q_j \cdot \underbrace{\boxed{\sum_{k=1}^{N} \overline{F}_k \cdot \frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q_j}}}_{Q_j}. \Rightarrow \boxed{\delta A = \sum_{j=1}^{s} \delta q_j \cdot Q_j = 0.}$$

Приращения обобщенных координат произвольны и независимы друг от друга. Поэтому в полученном уравнении все коэффициенты при них (**обобщенные силы**) **должны быть равны нулю**: $\boxed{Q_j = 0, \quad (j = 1, 2, \ldots s).}$ **- условия равновесия сил в обобщенных силах.**

В рассмотренном выше примере, для равновесия системы необходимо, чтобы Q_1 и Q_2 равнялись нулю. Видно, что $Q_1 \neq 0$ и равновесия нет. Равновесие этой системы возможно лишь при наличии силы трения определенной величины между грузом 1 и опорной плоскостью. Тогда эта сила войдет в выражение для Q_1 :

$$Q_1 = \frac{\delta A_{q1}}{\delta q_1} = \frac{G_2}{2} - F_{\text{тр}} = \frac{G_2}{2} - fN = \frac{G_2}{2} - fG_1.$$

Теперь уравнения равновесия для данной системы определяют соотношения между силами и имеют вид: $\dfrac{G_2}{2} - fG_1 = 0; \quad \dfrac{G_2}{2} - G_3 = 0.$

Лекция 15

- **Уравнение Лагранжа II рода** – Уравнения представляют собой дифференциальные уравнения движения системы относительно обобщенных координат системы. Воспользуемся общим уравнением динамики: $\boxed{\delta A = 0,}$ где δA – возможная работа всех задаваемых сил и сил инерции на любом возможном перемещении.

1. Зададим возможные перемещения точек системы, вызванные бесконечно малыми приращениями всех обобщенных координат:

$$\delta \bar{r}_k = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_2}\delta q_2 \ldots + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_s}\delta q_s = \sum_{j=1}^{s}\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}\delta q_j .$$

Вычислим возможную работу заданных сил и сил инерции:

$$\delta A = \sum_{k=1}^{N}(\bar{F}_k + \bar{\Phi}_k)\cdot \delta \bar{r}_k = \sum_{k=1}^{N}(\bar{F}_k + \bar{\Phi}_k)\cdot \sum_{j=1}^{s}\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}\delta q_j .$$

Перегруппируем суммы произведений:

$$\delta A = \sum_{j=1}^{s}\delta q_j \cdot \sum_{k=1}^{N}(\bar{F}_k + \bar{\Phi}_k)\cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}$$ или

$$\delta A = \sum_{j=1}^{s}\delta q_j \cdot \Big(\underbrace{\boxed{\sum_{k=1}^{N}\bar{F}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}}}_{Q_j} + \underbrace{\boxed{\sum_{k=1}^{N}\bar{\Phi}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}}}_{Q_j^{\Phi}}\Big). \Rightarrow \boxed{\delta A = \sum_{j=1}^{s}\delta q_j \cdot (Q_j + Q_j^{\Phi}) = 0.}$$

Приращения обобщенных координат произвольны и независимы друг от друга. Поэтому в полученном уравнении все коэффициенты при них (**обобщенные силы**) **должны быть равны нулю**: $\boxed{Q_j + Q_j^{\Phi} = 0, \quad (j = 1,2,\ldots s).}$

- уравнения движения системы, эквивалентные общему уравнению динамики.

2. В обобщенные силы инерции Q_j^{Φ} входят массы и ускорения точек системы. Попытаемся выразить эти силы через скорости точек и в конечном итоге через кинетическую энергию:

$$Q_j^{\Phi} = \sum_{k=1}^{N}\bar{\Phi}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} = -\sum_{k=1}^{N} m_k \bar{a}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} = -\sum_{k=1}^{N} m_k \frac{d\bar{v}_k}{dt}\cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}.$$

Добавим к этому выражению два одинаковых слагаемых разного знака и следующего вида:

$$\sum_{k=1}^{N} m_k \frac{d\bar{r}_k}{dt}\cdot \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial q_j}. \Rightarrow Q_j^{\Phi} = -\boxed{\sum_{k=1}^{N} m_k \frac{d\bar{v}_k}{dt}\cdot \underbrace{\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}}_{\frac{\partial \bar{v}_k}{\partial \dot{q}_k}}} + \boxed{\sum_{k=1}^{N} m_k \underbrace{\frac{d\bar{r}_k}{dt}}_{\bar{v}_k}\cdot \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial q_j}} - \boxed{\sum_{k=1}^{N} m_k \frac{d\bar{r}_k}{dt}\cdot \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial q_j}}.$$

$$\bar{v}_k \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{d\bar{r}_k}{dt}\right) \Rightarrow \bar{v}_k \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}\right), \quad \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} = \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial \dot{q}_k}$$

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) \qquad \frac{\partial T}{\partial q_j}$$

Таким образом: $\boxed{Q_j^{\Phi} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) + \frac{\partial T}{\partial q_j}.}$

Подставим в уравнение движения: $$Q_j - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) + \frac{\partial T}{\partial q_j} = 0.$$

Отсюда: $\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (j = 1,2,\ldots,s).}$ **- уравнения Лагранжа II рода.**

Для консервативных (потенциальных) сил: $\boxed{Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}.} \Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \quad (j = 1,2,\ldots,s).}$

Лекция 15 (продолжение – 15.2)

- **Кинетический потенциал** – функция, определяемая выражением: ***L = T – П* - функция Лагранжа**, где $T = T(q_1, q_2, ..., q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_s, t)$ и $П = П(q_1, q_2, ..., q_s, t)$.

Кинетический потенциал *L* будет также функцией обобщенных координат, обобщенных скоростей и времени: $L = L(q_1, q_2, ..., q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_s, t)$.

Определим кинетическую энергию через кинетический потенциал как ***T = L + П*** и вычислим необходимые частные производные, участвующие в уравнении Лагранжа II рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\boxed{\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}}\right) - \boxed{\frac{\partial T}{\partial q_j}} = Q_j \quad (j = 1,2,...,s). \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \boxed{\frac{\partial П}{\partial q_j}} = \boxed{-\frac{\partial П}{\partial q_j}} \quad (j = 1,2,...,s).$$

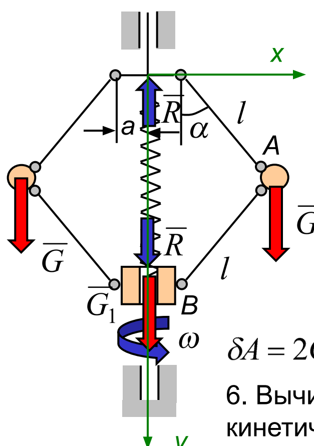
= 0, т.к не зависит от $\dot{q}_j$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \boxed{\frac{\partial П}{\partial \dot{q}_j}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}; \qquad \frac{\partial T}{\partial q_j} = \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial П}{\partial q_j};$$

или

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 1,2,...,s).}$$

Пример 1. Центробежный регулятор вращается вокруг вертикальной оси с постоянной скоростью. При α = 0 пружина не деформирована. Жесткость пружины *с*. Длина каждого из стержней l. Плечо подвески *а*. Вес каждого из шаров *G*, вес муфты G_1. Определить угловую скорость установившегося вращения для данного угла α.



1. Система имеет 2 степени свободы (поворот вокруг оси и изменение угла наклона стержней подвески). При установившемся вращении рассматриваем только изменение угла наклона α и выбираем его в качестве обобщенной координаты q = α.

2. Покажем заданные силы:

3. Упругую связь (пружину) заменяем реакцией и включаем ее в число заданных сил:

$$R = c\Delta l = c(2l - 2l\cos\alpha) = 2cl(1 - \cos\alpha).$$

4. Определим проекции возможных перемещений (вариации координат) точек приложения сил:

$$x_A = a + l\sin\alpha; \quad y_A = l\cos\alpha; \quad y_B = 2l\cos\alpha. \Rightarrow \delta x_A = l\cos\alpha\delta\alpha; \quad \delta y_A = -l\sin\alpha\delta\alpha; \quad \delta y_B = -2l\sin\alpha\delta\alpha.$$

5. Определим обобщенную силу Q:

$$\delta A = 2G\delta y_A + (G_1 + R)\delta y_B = -2Gl\sin\alpha\delta\alpha - (G_1 + R)2l\sin\alpha\delta\alpha = -2(G + G_1 + R)l\sin\alpha\delta\alpha$$

$$\boxed{Q = \frac{\delta A}{\delta\alpha} = -2(G + G_1 + R)l\sin\alpha.}$$

6. Вычислим кинетическую энергию:

$$T = 2\frac{G}{g}\frac{v^2}{2} = \frac{G}{g}[\omega(a + l\sin\alpha)]^2. \Rightarrow \boxed{\frac{\partial T}{\partial\alpha} = \frac{G}{g}\omega^2 2(a + l\sin\alpha)l\cos\alpha.} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial T}{\partial\dot{\alpha}} = 0; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\alpha}}\right) = 0.}$$

Составляем уравнение Лагранжа II рода:

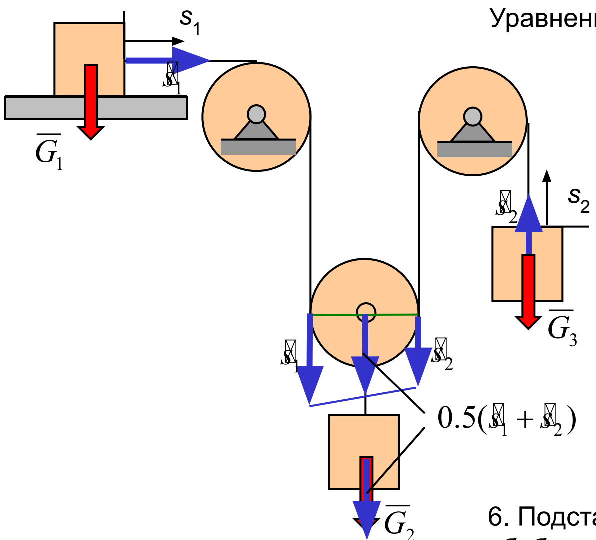
$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\alpha}}\right) - \frac{\partial T}{\partial\alpha} = Q.} \Rightarrow 0 - \frac{G}{g}2\omega^2(a + l\sin\alpha)l\cos\alpha = -2(G + G_1 + R)l\sin\alpha.$$

После подстановки *R* находим ω:

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{(G + G_1 + 2cl(1 - \cos\alpha))g \cdot tg\alpha}{G(a + l\sin\alpha)}}}$$

Лекция 15 (продолжение – 15.3)

Пример 2. Для механической системы трех грузов с двумя неподвижными и одним подвижным блоками определить ускорения грузов.



1. Система имеет 2 степени свободы (см. пример вычисления обобщенных сил Лекция 14, стр.19). Уравнения Лагранжа имеют следующий вид при выборе обобщенных координат $q_1 = s_1$ и $q_2 = s_2$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot s_1}\right)-\frac{\partial T}{\partial s_1}=Q_1;\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot s_2}\right)-\frac{\partial T}{\partial s_2}=Q_2.$$

2. Обобщенные силы Q_1, Q_2 были вычислены в примере:

$$Q_1=\frac{\delta A_{s1}}{\delta s_1}=\frac{G_2}{2}.\qquad Q_2=\frac{\delta A_{s2}}{\delta s_2}=\frac{G_2}{2}-G_3.$$

3. Вычислим кинетическую энергию:

$$T=T_1+T_2+T_3=\frac{G_1\dot s_1^2}{2g}+\frac{G_2[0.5(\dot s_1+\dot s_2)]^2}{2g}+\frac{G_3\dot s_2^2}{2g}.$$

4. Вычислим частные производные кинетической энергии:

$$\frac{\partial T}{\partial s_1}=0;\quad \frac{\partial T}{\partial s_2}=0.\qquad \frac{\partial T}{\partial \dot s_1}=\frac{G_1}{g}\dot s_1+\frac{G_2}{4g}(\dot s_1+\dot s_2).\qquad \frac{\partial T}{\partial \dot s_2}=\frac{G_2}{4g}(\dot s_1+\dot s_2)+\frac{G_3}{g}\dot s_2.$$

5. Вычислим производные по времени:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot s_1}\right)=\frac{G_1}{g}\ddot s_1+\frac{G_2}{4g}(\ddot s_1+\ddot s_2).\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot s_2}\right)=\frac{G_2}{4g}(\ddot s_1+\ddot s_2)+\frac{G_3}{g}\ddot s_2.$$

6. Подставим полученные выражения и обобщенные силы в уравнения Лагранжа:

$$\frac{G_1}{g}\ddot s_1+\frac{G_2}{4g}(\ddot s_1+\ddot s_2)=\frac{G_2}{2}.\qquad \frac{G_2}{4g}(\ddot s_1+\ddot s_2)+\frac{G_3}{g}\ddot s_2=\frac{G_2}{2}-G_3.$$

Или: $$(4G_1+G_2)\ddot s_1+G_2\ddot s_2=2gG_2.\qquad G_2\ddot s_1+(G_2+4G_3)\ddot s_2=2g(G_2-2G_3).$$

Неизвестные (независимые) ускорения:

$$\ddot s_1=\frac{D_1}{D};\qquad D=\begin{vmatrix}4G_1+G_2 & G_2\\ G_2 & G_2+4G_3\end{vmatrix}=(4G_1+G_2)(G_2+4G_3)-G_2^2.$$

$$\ddot s_2=\frac{D_2}{D}.\qquad D_1=\begin{vmatrix}2gG_2 & G_2\\ 2g(G_2-2G_3) & G_2+4G_3\end{vmatrix}=2gG_2(G_2+4G_3)-2g(G_2-2G_3)G_2=12G_2G_3g.$$

$$D_2=\begin{vmatrix}4G_1+G_2 & 2gG_2\\ G_2 & 2g(G_2-2G_3)\end{vmatrix}=(4G_1+G_2)\big(2g(G_2-2G_3)\big)-2gG_2^2=2(4G_1G_2-8G_1G_3-2G_2G_3)g.$$

При равенстве масс M_1=M_3=M, как например, в задаче М. 48.26 [2]:

$$D=8G(2G+G_2).\qquad \ddot s_1=a_1=\frac{3G_2g}{2(2G+G_2)}.\qquad \frac{\ddot s_1+\ddot s_2}{2}=a_3=\frac{(G_2-G)g}{2G+G_2}.$$

$$D_1=12G_2Gg.$$

$$D_2=4G(G_2-4G)g.\qquad \ddot s_2=a_2=\frac{(G_2-4G)g}{2(2G+G_2)}.$$

Лекция 15 (продолжение – 15.4, дополнительный материал)

- **Вариационный принцип Гамильтона-Остроградского** – устанавливает, какому соотношению удовлетворяет действительное движение механической системы в некотором интервале времени в отличие от всех иных возможных движений (перемещений) – кривых сравнения.

Кривая сравнения соответствует движению, допускаемому существующими связями, бесконечно близкому к действительному.

Общее уравнение динамики имеет вид: $\boxed{\sum(\bar{P}_k - m_k \bar{a}_k)\delta\bar{r}_k = 0.}$ или $\boxed{\sum \bar{P}_k \delta\bar{r}_k} + \boxed{\sum(-m_k \bar{a}_k)\delta\bar{r}_k} = 0.$

бА   бТ – d(…)/dt

Первое слагаемое – работа задаваемых сил на возможном перемещении системы (бА).

(uv)'=u'v+uv' или -u'v=-(uv)'+uv'

Попробуем представить второе слагаемое в виде совокупности членов, содержащих скорости и в конечном счете кинетическую энергию:

$$\sum(-m_k \bar{a}_k)\delta\bar{r}_k = \sum(-m_k \frac{d\bar{v}_k}{dt})\delta\bar{r}_k = -\sum \frac{d}{dt}(m_k \bar{v}_k \cdot \delta\bar{r}_k) + \sum(m_k \bar{v}_k)\boxed{\frac{d\delta\bar{r}_k}{dt}}.$$

$$\frac{d\delta\bar{r}_k}{dt} = \delta\frac{d\bar{r}_k}{dt} = \delta\bar{v}_k. \quad \Rightarrow \quad \sum(-m_k \bar{a}_k)\delta\bar{r}_k = -\frac{d}{dt}\sum(m_k \bar{v}_k \cdot \delta\bar{r}_k) + \boxed{\sum(m_k \bar{v}_k)\cdot\delta\bar{v}_k.}$$

$$\delta\sum\frac{m_k \bar{v}_k \cdot \bar{v}_k}{2} = \delta T.$$

Таким образом, общее уравнение динамики принимает вид: $\boxed{\delta A + \delta T = \frac{d}{dt}\sum(m_k \bar{v}_k \cdot \delta\bar{r}_k)}$

Введем подобно импульсу действия силы интеграл вида

$\boxed{S = \int_{t_1}^{t_2} L dt}$ **- действие по Гамильтону.**

Тогда получаем вариационный принцип Гамильтона-Остроградского в другой форме: $\boxed{\delta S = 0.}$

-Только для действительного движения консервативной системы с голономными, двухсторонними и идеальными связями для данных условий

$$\delta\bar{r}_k(t_1) = 0; \quad \delta\bar{r}_k(t_2) = 0.$$

вариация интеграла *S* по рассматриваемому интервалу времени равна нулю или действие по Гамильтону имеет стационарное значение.

$$\int_{t_1}^{t_2}(\delta A + \delta T)dt = \int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\sum(m_k \bar{v}_k \cdot \delta\bar{r}_k)dt = \sum m_k \bar{v}_k \cdot \delta\bar{r}_k\Big|_{t_1}^{t_2} = \sum m_k \bar{v}_k(t_2)\cdot\underbrace{\boxed{\delta\bar{r}_k(t_2)}}_{=0} - \sum m_k \bar{v}_k(t_1)\cdot\underbrace{\boxed{\delta\bar{r}_k(t_1)}}_{=0}$$

Отсюда получаем вариационный принцип Гамильтона-Остроградского: $\boxed{\int_{t_1}^{t_2}(\delta A + \delta T)dt = 0}$

-Только для действительного движения системы с голономными, двухсторонними и идеальными связями для данных условий

$$\delta\bar{r}_k(t_1) = 0; \quad \delta\bar{r}_k(t_2) = 0.$$

интеграл по рассматриваемому интервалу времени суммы вариаций работы заданных сил и кинетической энергии равен нулю.

В случае потенциальных (консервативных) сил: $\delta A = -\delta \Pi.$

$$\int_{t_1}^{t_2}(-\delta\Pi + \delta T)dt = \int_{t_1}^{t_2}\delta(T - \Pi)dt = \int_{t_1}^{t_2}\delta L dt = 0$$ где, *L* = *T* – *П* - функция Лагранжа.

Лекция 15 (продолжение – 15.5, дополнительный материал)

- **Вывод уравнения Лагранжа из вариационного принципа Гамильтона-Остроградского** – установленный принцип Гамильтона-Остроградского позволяет получить уравнение Лагранжа II рода:

Вариационный принцип Гамильтона-Остроградского: $\boxed{\int_{t_1}^{t_2}(\delta A + \delta T)dt = 0}$

Возможная работа, выраженная через обобщенные силы: $\boxed{\delta A = \sum_{j=1}^{s} Q_j \cdot \delta q_j.}$

Вариация кинетической энергии $T = T(q_1, q_2, ..., q_s, \dot q_1, \dot q_2, ..., \dot q_s, t)$ в каждый момент времени:

$$\delta T = \sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial T}{\partial q_j}\delta q_j + \frac{\partial T}{\partial \dot q_j}\delta \dot q_j\right).$$

Подставим вариации работы и кинетической энергии в принцип Гамильтона-Остроградского:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\sum_{j=1}^{s} Q_j \cdot \delta q_j + \sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial T}{\partial q_j}\delta q_j + \frac{\partial T}{\partial \dot q_j}\delta \dot q_j\right)\right)dt = 0$$

или

$$\sum_{j=1}^{s}\int_{t_1}^{t_2} Q_j \cdot \delta q_j dt + \sum_{j=1}^{s}\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial T}{\partial q_j}\delta q_j + \boxed{\frac{\partial T}{\partial \dot q_j}\boxed{\delta \dot q_j}}\right)dt = 0.$$

$$\boxed{\delta\frac{dq_j}{dt}} \Rightarrow \frac{d\delta q_j}{dt}$$

Проинтегрируем члены с вариацией обобщенной скорости по частям:

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial T}{\partial \dot q_j}\delta \dot q_j dt} = \int_{t_1}^{t_2}\underbrace{\frac{\partial T}{\partial \dot q_j}}_{U}\underbrace{d\delta q_j}_{dV} = \underbrace{\left[\underbrace{\frac{\partial T}{\partial \dot q_j}}_{U}\underbrace{\delta q_j}_{V}\right]_{t_1}^{t_2}}_{=0} - \int_{t_1}^{t_2}\underbrace{\delta q_j}_{V}\underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_j}\right)dt}_{dU}.$$

На границах интервала $\delta q_j = 0$

Таким образом, принцип Гамильтона-Остроградского принимает вид:

$$\sum_{j=1}^{s}\int_{t_1}^{t_2} Q_j \cdot \delta q_j dt + \sum_{j=1}^{s}\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial T}{\partial q_j}\delta q_j - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_j}\right)\delta q_j\right)dt = 0.$$

или

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum_{j=1}^{s}\left[Q_j + \frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_j}\right)\right]\delta q_j dt = 0.$$

Равенство нулю подынтегральной функции должно выполняться при любых значения вариации обобщенной координаты. Следовательно, для каждой из обобщенных координат коэффициенты при вариациях должны быть равны нулю:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (j = 1, 2, ..., s).}$$

- **Понятие об устойчивости равновесия механической системы** – Состояние покоя (равновесия) механической системы в консервативном (потенциальном) поле может быть устойчивым, неустойчивым и безразличным:

Устойчивое – если система, выведенная из положения равновесия, возвращается в это положение и совершает колебания около него.

Неустойчивое – если система, выведенная из положения равновесия при сколь угодно малом отклонении от него, не возвращается в положение равновесия и не совершает колебания около него.

Безразличное - если система, выведенная из положения равновесия, занимает новое положение равновесия.

Лекция 15 (продолжение – 15.6, дополнительный материал)

- **Уравнения равновесия в обобщенных координатах (в обобщенных силах):** $\boxed{Q_j = 0, \quad (j = 1,2,\ldots s).}$

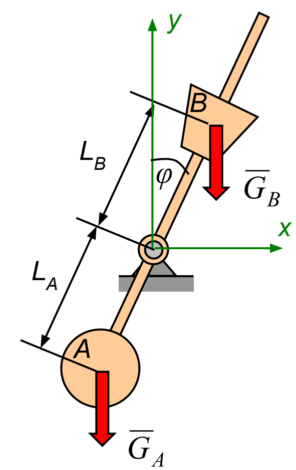
По определению обобщенной силы для консервативной системы: $\boxed{Q_j = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial q_j}.}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\dfrac{\partial \Pi}{\partial q_j} = 0.}$

Отсюда следует, что **положению равновесия (покоя) консервативной системы соответствуют экстремальные значения потенциальной энергии системы**. При этом по обращению в нуль частной производной потенциальной энергии нельзя судить об устойчивости состояния покоя (равновесия) в этих положения системы. Условие устойчивости состояния покоя устанавливается критерием Лагранжа-Дирихле: **Те положения покоя консервативной системы, в которых потенциальная энергия достигает минимума, являются ее устойчивыми состояниями покоя:**

$\boxed{\dfrac{\partial^2 \Pi}{\partial q_j^2} > 0.}$ - условие минимума потенциальной энергии.

Если **вторая производная потенциальной энергии меньше нуля**, то это соответствует случаю **неустойчивого положения равновесия**.
Если вторая производная потенциальной энергии равна нулю, то она не может служить критерием минимума потенциальной энергии и для решения вопроса об устойчивости положения равновесия необходимо последовательно исследовать знаки производных более высокого порядка:
Если **первая по порядку, ненулевая производная потенциальной энергии, имеет четный порядок и больше нуля**, то это соответствует минимуму потенциальной энергии (**положение равновесия устойчивое**).
Если **первая по порядку, ненулевая производная потенциальной энергии, имеет нечетный порядок**, то потенциальная энергия не имеет экстремума (нет ни минимума, ни максимума), соответствует **безразличному состоянию равновесия**.

Пример. Метроном представляет собой маятник с двумя грузами: *A* – неподвижный, весом G_A, *B* – перемещаемый, весом G_B. Определить условия устойчивого и неустойчивого положения равновесия.



Выберем в качестве обобщенной координаты угол отклонения стержня метронома от вертикали, φ:

Потенциальная энергия системы грузов: $\Pi = G_A y_A + G_B y_B = G_A(-L_A\cos\varphi) + G_B L_B \cos\varphi = (G_B L_B - G_A L_A)\cos\varphi.$

Условие равновесия системы грузов: $\dfrac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = (G_B L_B - G_A L_A)\sin\varphi = 0.$ $\Rightarrow$ $G_B L_B - G_A L_A = 0. \quad (a)$
$\Rightarrow$ $\sin\varphi = 0. \quad (b)$

Исследуем устойчивость равновесия системы грузов при выполнении условий (*a*) и (*b*): $\dfrac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = -(G_B L_B - G_A L_A)\cos\varphi.$

При выполнении условия (*a*) ($G_A L_A = G_B L_B$) вторая производная, как и все последующие, обращается в нуль.
Это соответствует **безразличному состоянию равновесия**.

Если $G_A L_A > G_B L_B$ и $\varphi = 0$ вторая производная оказывается больше нуля и это соответствует **устойчивому состоянию равновесия**.

Если $G_A L_A > G_B L_B$ и $\varphi = 180^\circ$ вторая производная оказывается меньше нуля и это соответствует **неустойчивому состоянию равновесия**.