Информатика

АЛГЕБРА ЛОГИКИ

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ И АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

10 класс

ИЗДАТЕЛЬСТВО БИНОМ

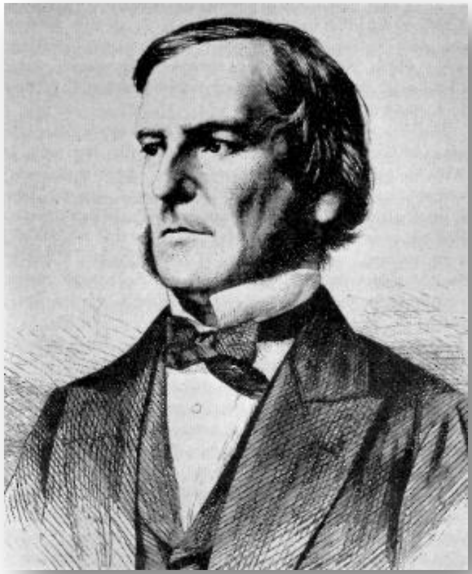
Ключевые слова

- логическое высказывание
- логическая операция
- логическая переменная
- предикат

Алгебра логики

Алгебра логики – раздел математики, изучающий высказывания, рассматриваемые с точки зрения их логических значений (истинности или ложности), и логические операции над ними.

Джордж Буль (1815-1864) – английский математик, основоположник алгебры логики. Изучал логику мышления математическими методами и разработал алгебраические методы решения традиционных логических задач. Долгое время алгебра логики была известна достаточно узкому классу специалистов.

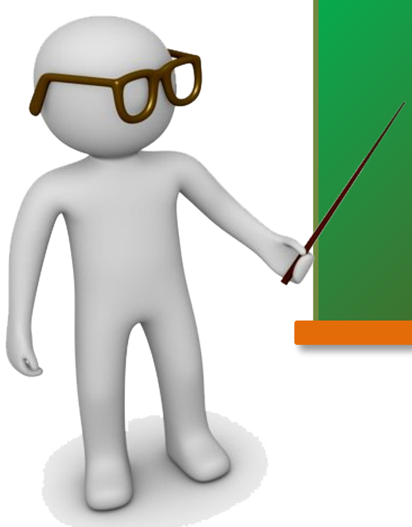


В 1938 году Клод Шеннон применил алгебру логики для описания процесса функционирования релейно-контактных и электронно-ламповых схем.

Высказывания и переменные

Высказывание – это предложение, в отношении которого можно сказать, истинно оно или ложно.

Высказывания, образованные из других высказываний, называются **составными**. Высказывание, никакая часть которого не является высказыванием, называется **элементарным**.



Обоснование истинности или ложности элементарных высказываний не является задачей алгебры логики

Высказывания и переменные

Задание 1. Выберите пословицы которые являются высказываниями.

Ответ

Готовь сани летом, а телегу зимой

Цыплят по осени считают

В зимний холод всякий молод

Труд человека кормит, а лень портит

Добра не смыслишь, так худа не делай

Не сиди сложа руки, так и не будет скуки

Знание да наука на вороту не висят

Береги платье снову, а честь смолоду

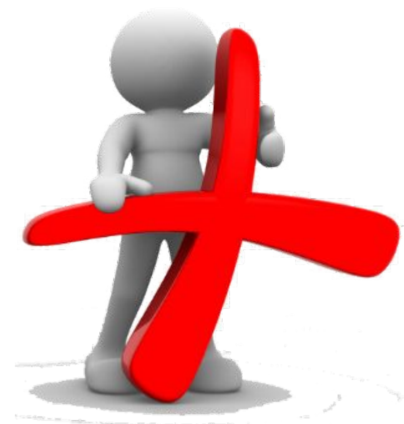
Не в свои сани не садись!

Без труда не вынешь рыбки из пруда

Высказывания и переменные

Логическая переменная – это переменная, которая обозначает любое высказывание и может принимать логические значения «истина» или «ложь».

Истина	Ложь
И	Л
true	false
да	нет
1	0



Истинность или ложность составных высказываний зависит от истинности или ложности образующих их высказываний и определённой трактовки связок (логических операций над высказываниями).

Логические операции

Конъюнкция

Логическое умножение

A	B	A и B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Высказывание истинно тогда и только тогда, когда истинны оба исходных высказывания.

Дизъюнкция

Логическое сложение

A	B	A или B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Высказывание ложно тогда и только тогда, когда ложны оба исходных высказывания.

Отрицание

Инверсия

A	не A
0	1
1	0

Высказыванию ставится в соответствие новое высказывание, значение которого противоположно исходному.

Логические операции

Импликация

Следование

A	B	A → B
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Ложно тогда и только тогда, когда посылка (первое) истинна, а следствие (второе) ложно.

Пример высказывания:

Если верно списали пример, то получили верный ответ.

A: Пример списали верно

B: Получили верный ответ

В высказывании нет информации о правильности самого решения. Анализировать можно только то, что сказано в высказывании.

Если списали неверно, то ответ может быть любым.

Из ложной посылки можно получить истинное и ложное высказывание, из истинного только истинное.

Логические операции

Строгая дизъюнкция

Исключающая дизъюнкция

A	B	
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Высказывание истинно тогда, когда только одно из двух исходных высказываний истинно.

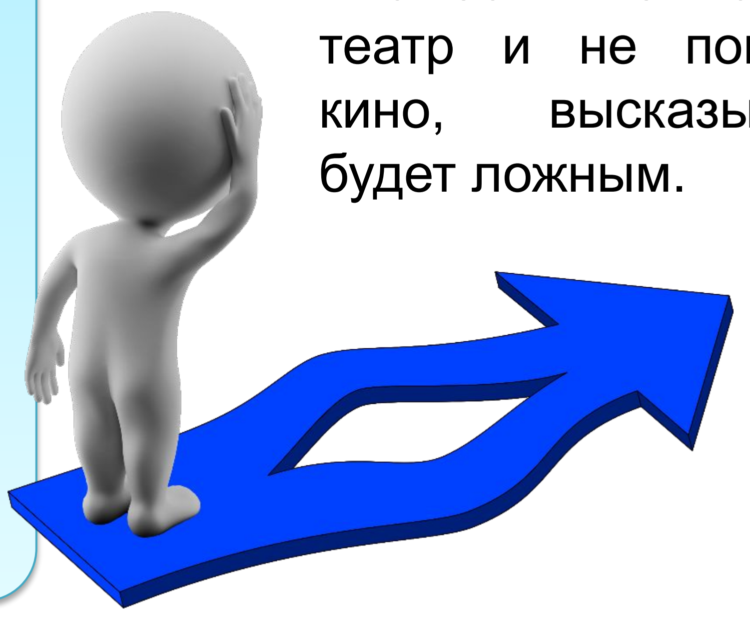
Пример высказывания:

Сегодня мы пойдем либо в театр, либо в кино.

A: Мы пойдем в театр

B: Мы пойдем в кино

Невозможно отправиться в кино и в театр одновременно.



Но если не пойти в театр и не пойти в кино, высказывание будет ложным.

Логические операции

Эквиваленция

Равнозначность

A	B	A ↔ B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Высказывание истинно тогда, когда оба исходных высказывания истинны или оба исходных высказывания ложны.

Пример высказывания:

Аттестат об образовании выдается тогда и только тогда, когда выпускник успешно проходит государственную итоговую аттестацию.

A: Выдается аттестат
B: Успешное прохождение аттестации

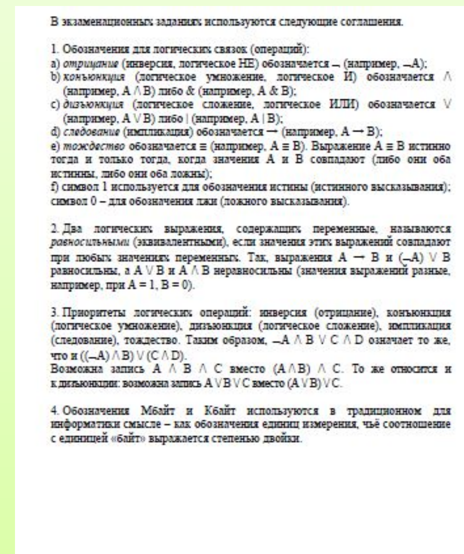
Два события взаимосвязаны. Получение аттестата без успешного прохождения процедуры ЕГЭ невозможно, как невозможно и обратное.

$$A \oplus B = \overline{A \leftrightarrow B}$$

Обозначения логических операций

Операция	Обозначение	Речевой оборот
Отрицание, инверсия, лог. НЕ)		«Н… «не вер… »
Конъюнкция (лог. умножение, лог. И)	A ∧ B, A&B, A · B, AB, A и B, A and B	«… «вм…
Дизъюнкция (лог. сложение, лог. ИЛИ)	A ∨ B, A + B, A | B, A ИЛИ B, A or B	«И…
Строгая дизъюнкция (искл. дизъюнкция, искл. ИЛИ)	A ⊕ B, A xor B	«Ли… »
Импликация (лог. следование)	A → B, A ⇒ B	«… следует», «влечёт»
Эквиваленция (эквивалентность, равнозначность)	A ↔ B, A ⇔ B, A ≡ B	«Эквивалентно», «необходимо и достаточно»

Инструкция ЕГЭ



В экзаменационных заданиях используются следующие соглашения.

1. Обозначения для логических связок (операций):

a) *отрицание* (инверсия, логическое НЕ) обозначается ¬ (например, ¬A);

b) *конъюнкция* (логическое умножение, логическое И) обозначается ∧ (например, A ∧ B) либо & (например, A & B);

c) *дизъюнкция* (логическое сложение, логическое ИЛИ) обозначается ∨ (например, A ∨ B) либо | (например, A | B);

d) *следование* (импликация) обозначается → (например, A → B);

e) *тождество* обозначается ≡ (например, A ≡ B). Выражение A ≡ B истинно тогда и только тогда, когда значения A и B совпадают (либо они оба истинны, либо они оба ложны);

f) символ 1 используется для обозначения истины (истинного высказывания); символ 0 – для обозначения лжи (ложного высказывания).

2. Два логических выражения, содержащих переменные, называются *равносильными* (эквивалентными), если значения этих выражений совпадают при любых значениях переменных. Так, выражения A → B и (¬A) ∨ B равносильны, а A ∨ B и A ∧ B неравносильны (значения выражений разные, например, при A = 1, B = 0).

3. Приоритеты логических операций: инверсия (отрицание), конъюнкция (логическое умножение), дизъюнкция (логическое сложение), импликация (следование), тождество. Таким образом, ¬A ∧ B ∨ C ∧ D означает то же, что и ((¬A) ∧ B) ∨ (C ∧ D).

Возможна запись A ∧ B ∧ C вместо (A ∧ B) ∧ C. То же относится и к дизъюнкции: возможна запись A ∨ B ∨ C вместо (A ∨ B) ∨ C.

4. Обозначения Мбайт и Кбайт используются в традиционном для информатики смысле – как обозначения единиц измерения, чьё соотношение с единицей «байт» выражается степенью двойки.

Логические выражения

Составное логическое высказывание можно представить в виде логического выражения (формулы), состоящего из логических констант (0, 1), логических переменных, знаков логических операций и скобок.

Для логического выражения справедливо:

- всякая логическая переменная, а также логические константы (0, 1), есть логическое выражение
- если A – логическое выражение, то и $\overline{A}$ – логическое выражение
- если A и B – выражения, то связанные любой бинарной операцией они также представляют собой логическое выражение

Приоритет → Не → И → Или, Либо → Следует, Равносильно

Логические выражения

Задание 2. Проверить, удовлетворяет ли слово ***ОКНО*** логическому условию:

если первая буква гласная или вторая гласная, но не обе вместе, то из того, что последняя буква согласная, следует, что предпоследняя буква гласная.

Решение: Введем условные обозначения:

A_1- первая буква гласная,

A_n- последняя буква гласная,

$\overline{A_1}$ означает, что первая буква согласная.

О	К	Н	О
1	0	0	1

Запишем условие задачи на языке формальной логики:

$$A_1 \oplus A_2 \longrightarrow (\overline{A_n} \longrightarrow A_{n-1})$$

Выполним вычисления.

$$1 \oplus 0 \longrightarrow (\overline{1} \longrightarrow 0)$$

$$1 \longrightarrow (0 \longrightarrow 0)$$

$$1 \longrightarrow 1$$

$$1$$

Ответ: Да

Логические выражения

Задание 3. Приведите пример слова, которое НЕ удовлетворяет логическому условию:

если первая буква гласная или вторая гласная, но не обе вместе, то из того, что последняя буква согласная, следует, что предпоследняя буква гласная.

Решение: Введем условные обозначения:

A_1- первая буква гласная,

A_n- последняя буква гласная,

$\overline{A_1}$ означает, что первая буква согласная.

Запишем условие задачи на языке формальной логики:

$$A_1 \oplus A_2 \longrightarrow (\overline{A_n} \longrightarrow A_{n-1})$$

Выполним преобразования, разбирая выражение с конца.

Р	О	С	Т
1	0	0	0

$$1 \oplus 0 \longrightarrow (\overline{0} \longrightarrow 0)$$

$$1 \longrightarrow (1 \longrightarrow 0)$$

$$1 \longrightarrow 0$$

$$0$$

Ответ: РОСТ

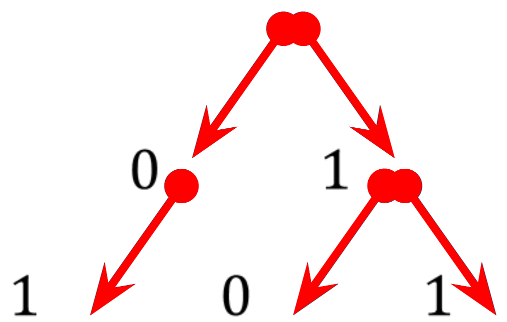
Логические выражения

Задание 4. Сколько решений имеет логическое уравнение:

$$(x_1 \to x_2) \vee (x_3 \equiv x_4) = 1$$

Решение: Введем замену переменных

$$\left.\begin{array}{l} t_1 = x_1 \to x_2 \\ t_2 = x_3 \equiv x_4 \end{array}\right. \Longrightarrow t_1 \vee t_2 = 1$$



$1 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 14$

Ответ: 14

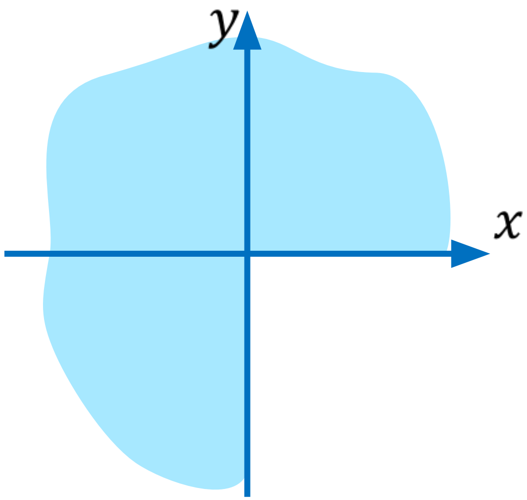
Предикаты и множества истинности

Предикат – это утверждение, содержащее одну или несколько переменных.

Предикаты позволяют задать множество, не перечисляя всех его элементов.

Предикат $P(x) = (x < 0)$ описывает множество отрицательных чисел.

Какое множество на координатной плоскости задает предикат $P(x) = (x \leq 0) \vee (y \geq 0)$?



Ответ

Самое главное

Высказывание – это предложение, в отношении которого можно сказать, истинно оно или ложно. Высказывания, образованные из других высказываний, называются составными. Высказывание, никакая часть которого не является высказыванием, называется элементарным.

Истинность или ложность составных высказываний зависит от истинности или ложности образующих их высказываний и логических операций над высказываниями.

Логическая операция полностью может быть описана таблицей истинности, указывающей, какие значения принимает составное высказывание при всех возможных значениях образующих его элементарных высказываний.

Самое главное

0	1
1	0

0	0	0	0	1	0	1
0	1	0	1	1	1	0
1	0	0	1	0	1	0
1	1	1	1	1	0	1

Приоритет операций: отрицание; конъюнкция; дизъюнкция и строгая дизъюнкция; импликация и эквиваленция.

Операции одного приоритета выполняются в порядке их следования, слева направо. Скобки меняют порядок выполнения операций.

Предикат – это утверждение, содержащее одну или несколько переменных. Из имеющихся предикатов с помощью логических операций можно строить новые предикаты.

Вопросы и задания

1. Выбрать два противоположных высказывания:
   - Среди учеников деревни Сосновка только один добирается до школы на автобусе
   - Все ученики деревни Сосновка добираются до школы на автобусе
   - Никто из учеников деревни Сосновка не добирается до школы на автобусе
   - В деревне Сосновка есть хотя бы один ученик, который до школы добирается не на автобусе

Ответ

2. Вычислить:
   - $(A \& 0) \vee 1 =$
   - $\overline{A \rightarrow A} \vee 0 =$
   - $(1 \oplus 1) \rightarrow A =$

Ответ

Вопросы и задания

3. Сколько точек с целочисленными координатами удовлетворяют условию:

$$(|x| > x)\&(|y| \geq y)\&(|x| + |y| < 2) = 1$$

Решение

$$(x < 0)\&(|x| + |y| < 2) = 1$$

$$(x = -1)\&(|y| < 1) = 1$$

$$(x = -1)\&(y = 0) = 1$$

Ответ: 1

4. Сколько решений имеет логическое уравнение:

$$(x_1 \equiv x_2)\&(x_3 \oplus x_4)\&(x_5 \vee x_6) = 1$$

Ответ

Информационные источники

- https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/6/6c/George_Boole.jpg/267px-George_Boole.jpg
- http://start2finish.org/wp-content/uploads/2015/02/photodune-9850340-symbol-s.jpg
- http://i.piccy.info/i7/c329fe9c30f528069f625349057186a0/1-2-550/47021940/013_010.jpg
- http://i.мастерская-психолога.рф/u/70/9dbf66933a11e3a4cc8e8087cd4527/-/%D0%B2%D1%8B%D0%B1%D0%BE%D1%80%20%D0%BF%D1%83%D1%82%D0%B8.jpg
- http://www.thegameengineer.com/blog/wp-content/uploads/2014/02/dreamstime_s_21174065.jpg