ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДВУМЕРНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Для системы случайных величин вводятся числовые характеристики, подобные тем, какие были для одной случайной величины. В качестве числовых характеристик системы (X, Y) обычно рассматривают моменты различных порядков. Математическое ожидание и дисперсия двумерной случайной величины служат соответственно средним значением и мерой рассеяния.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ ДВУМЕРНОЙ СВ

Математическим ожиданием двумерной случайной величины (X, Y) называется совокупность двух математических ожиданий $M[X]$ и $M[Y]$, определяемых равенствами: для дискретной двумерной СВ

$$M\left[X\right]=m_x=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_i\cdot p_{ij}=\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot p_{x_i}\,,\quad M\left[Y\right]=m_y=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}y_j\cdot p_{ij}=\sum_{j=1}^{m}y_j\cdot p_{y_j}\,,$$

здесь $p_{ij}=P\left\{X=x_i,Y=y_j\right\},\ p_{x_i}=\sum_{j=1}^{m}p_{ij}\,,\ p_{y_j}=\sum_{i=1}^{n}p_{ij}\,;$

для непрерывной двумерной СВ

$$M\left[X\right]=m_x=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xf(x,y)dydx=\int_{-\infty}^{\infty}xf_1(x)dx\,,\quad M\left[Y\right]=m_y=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}yf(x,y)dydx=\int_{-\infty}^{\infty}yf_2(y)dy\,,$$

здесь $f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f\left(x,y\right)dy\,,\ f_2(y)dx=\int_{-\infty}^{\infty}f\left(x,y\right)dx\,.$

ДИСПЕРСИЯ ДВУМЕРНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Дисперсией двумерной случайной величины (X, Y) называется совокупность двух дисперсий $D[X]$ и $D[Y]$, определяемых равенствами:

для дискретной двумерной СВ

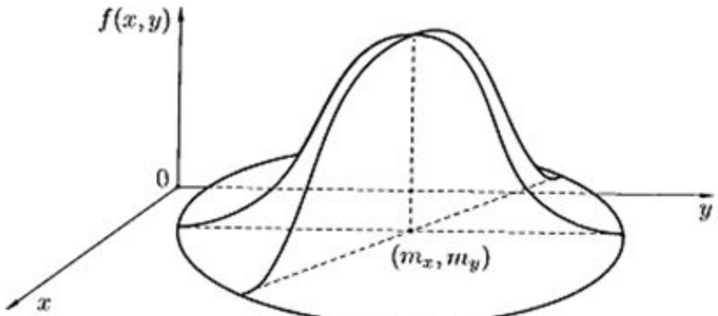
$$D[X]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i-m_x)^2 p_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_i^2 p_{ij}-m_x^2, \qquad D[Y]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(y_j-m_y\right)^2 p_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}y_j^2 p_{ij}-m_y^2;$$

для непрерывной двумерной СВ

$$D[X]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)^2 f(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x,y)dxdy-m_x^2,$$

$$D[Y]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(y-m_y\right)^2 f(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}y^2 f(x,y)dxdy-m_y^2.$$

Точка (m_x, m_y) на плоскости $x0y$ представляет собой характеристику положения случайной точки (X, Y), дисперсия – ее рассеивание (разброс) вокруг точки (m_x, m_y).



МОМЕНТЫ ДВУМЕРНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Математическое ожидание и дисперсия являются частными случаями более общих характеристик СВ – начальных и центральных моментов.

Начальным моментом $\alpha_{k,s}$ **порядка** ***k+s*** двумерной случайной величины (X, Y) называется математическое ожидание произведения k-ой степени СВ X на s-тую степень СВ Y:

$$\alpha_{k,s} = M\left[X^k Y^s\right].$$

Для дискретной двумерной СВ

$$\alpha_{k,s} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i^k y_j^s p_{ij},$$

для непрерывной двумерной СВ

$$\alpha_{k,s} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^k y^s f(x,y) dxdy.$$

В частности:

$$\alpha_{1,0} = M\left[X^1 Y^0\right] = m_x, \qquad \alpha_{0,1} = M\left[X^0 Y^1\right] = m_y;$$

$$\alpha_{2,0} = M\left[X^2 Y^0\right] = M\left[X^2\right], \quad \alpha_{0,2} = M\left[X^0 Y^2\right] = M\left[Y^2\right].$$

Центральным моментом $\mu_{k,s}$ **порядка** ***k+s*** двумерной случайной величины (X, Y) называется математическое ожидание произведения отклонений её составляющих от своих математических ожиданий, возведенных в степени k и s соответственно:

$$\mu_{k,s} = M\left[\left(X - m_x\right)^k \left(Y - m_y\right)^s\right] = M\left[\tilde{X}^k \cdot \tilde{Y}^s\right].$$

Здесь $\tilde{X} = X - m_x$ и $\tilde{Y} = Y - m_y$ – центрированные СВ X и Y.

Центральные моменты дискретной двумерной СВ (X, Y) вычисляются по формуле

$$\mu_{k,s} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(x_i - m_x\right)^k \left(y_j - m_y\right)^s p_{ij} \quad ,$$

а центральные моменты непрерывной двумерной СВ (X, Y) по формуле

$$\mu_{k,s} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(x - m_x\right)^k \left(y - m_y\right)^s f\left(x, y\right) dxdy \; .$$

В частности:

$$\mu_{0,0} = 1, \; \mu_{1,0} = \mu_{0,1} = 0;$$

$$\mu_{2,0} = M\left[\left(X - m_x\right)^2 \left(Y - m_y\right)^0\right] = D\left[X\right], \quad \mu_{0,2} = M\left[\left(X - m_y\right)^0 \left(Y - m_y\right)^2\right] = D\left[Y\right].$$

В приложениях наиболее часто встречаются начальный момент второго порядка $\alpha_{1,1} = M\left[X \cdot Y\right]$ и центральный момент второго порядка

$$\mu_{1,1} = M\left[\left(X - m_x\right)\left(Y - m_y\right)\right] = M\left[\tilde{X} \cdot \tilde{Y}\right].$$

КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ МОМЕНТ (КОВАРИАЦИЯ)

Определение. **Корреляционным моментом или ковариацией двух случайных величин**, образующих двумерную СВ (X, Y), называется математическое ожидание произведения отклонений СВ X и СВ Y от своих математических ожиданий. Обозначается через K_{XY} или $\operatorname{cov}(X,Y)$.

Таким образом, по определению

$$K_{XY} = \operatorname{cov}(X,Y) = M\left[(X-m_x)(Y-m_y)\right] = M\left[\tilde{X}\cdot\tilde{Y}\right].$$

Расчетные формулы для ковариации K_{xy} имеют следующий вид:

$$K_{XY} = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m}(x_i-m_x)(y_j-m_y)\,p_{ij} & \text{– для дискретных СВ}(X,Y); \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)(y-m_y)\,f(x,y)dxdy & \text{– для непрерывных СВ}(X,Y). \end{cases}$$

Ковариацию часто удобно вычислять как математическое ожидание произведения двух СВ минус произведение их математических ожиданий:

$$K_{XY} = M\left[(X-m_x)(Y-m_y)\right] = M\left[XY - Xm_y - Ym_x + m_xm_y\right] =$$
$$= M[XY] - m_yM[X] - m_xM[Y] + m_xm_y = M[XY] - M[X]\cdot M[Y].$$

Формулу для ковариации можно записать и так: $K_{XY} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)\,dxdy - m_xm_y$.

СВОЙСТВА КОВАРИАЦИИ

1. Ковариация симметрична, т.е. $K_{XY}=K_{YX}$. Следует из определения ковариации.

2. Дисперсия СВ есть ковариация её с самой собой. Действительно:

$$K_{XX}=M\left[\left(X-m_x\right)\left(X-m_x\right)\right]=M\left[\left(X-m_x\right)^2\right]=D\left[X\right],$$

$$K_{YY}=M\left[\left(Y-m_y\right)\left(Y-m_y\right)\right]=M\left[\left(Y-m_y\right)^2\right]=D\left[Y\right].$$

3. Ковариация двух независимых случайных величин X и Y равна нулю:

$$K_{XY}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf\left(x,y\right)dxdy-m_xm_y=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xy\,f_1\left(x\right)f_2\left(x\right)dxdy-m_xm_y=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}xf_1\left(x\right)dx\int_{-\infty}^{\infty}yf_2\left(y\right)dy-m_xm_y=m_xm_y-m_xm_y=0.$$

4. Дисперсия суммы (разности) двух случайных величин равна сумме их дисперсий плюс (минус) удвоенная ковариация этих случайных величин:

$$D\left[X\pm Y\right]=D\left[X\right]+D\left[Y\right]\pm 2K_{XY}.$$

Доказательство:

$$D\left[X+Y\right]=M\left\{\left(X+Y\right)-M\left[X+Y\right]\right\}^2=M\left\{\left(X-M\left[X\right]\right)+\left(Y-M\left[Y\right]\right)\right\}^2=$$

$$=M\left\{X-M\left[X\right]\right\}^2+2M\left\{\left(X-M\left[X\right]\right)\left(Y-M\left[Y\right]\right)\right\}+M\left\{Y-M\left[Y\right]\right\}^2=D\left[X\right]+D\left[Y\right]+2K_{XY};$$

$$D\left[X-Y\right]=M\left\{\left(X-Y\right)-M\left[X-Y\right]\right\}^2=M\left\{\left(X-M\left[X\right]\right)-\left(Y-M\left[Y\right]\right)\right\}^2=$$

$$=M\left\{X-M\left[X\right]\right\}^2-2M\left\{\left(X-M\left[X\right]\right)\left(Y-M\left[Y\right]\right)\right\}-M\left\{Y-M\left[Y\right]\right\}^2=D\left[X\right]+D\left[Y\right]-2K_{XY}.$$

5. Ковариация двух случайных величин по абсолютной величине не превосходит произведения их среднеквадратических отклонений: $|K_{XY}| \le \sigma_x \sigma_y$.

Доказательство. Применяя свойство 4 к двум стандартным случайным величинам $\dfrac{X-m_x}{\sigma_x}$ и $\dfrac{Y-m_y}{\sigma_y}$, получим:

$$D\left[\frac{X-m_x}{\sigma_x} \pm \frac{Y-m_y}{\sigma_y}\right] = D\left[\frac{X-m_x}{\sigma_x}\right] + D\left[\frac{Y-m_y}{\sigma_y}\right] \pm$$

$$\pm 2M\left\{\left(\frac{X-m_x}{\sigma_x} - M\left[\frac{X-m_x}{\sigma_x}\right]\right)\left(\frac{Y-m_y}{\sigma_y} - M\left[\frac{Y-m_y}{\sigma_y}\right]\right)\right\} =$$

$$= 1+1 \pm 2M\left[\frac{X-m_x}{\sigma_x} \cdot \frac{Y-m_y}{\sigma_y}\right] = 2 \pm \frac{2}{\sigma_x\sigma_y} M\left[(X-m_x)(Y-m_y)\right] = 2\left(1 \pm \frac{K_{XY}}{\sigma_x\sigma_y}\right).$$

Здесь учтено, что дисперсия стандартной случайной величины равна 1.

Так как дисперсия есть неотрицательная величина, то $2\left(1 \pm \dfrac{K_{XY}}{\sigma_x\sigma_y}\right) \ge 0$. Отсюда следует, что $-\sigma_x\sigma_y \le K_{XY} \le \sigma_x\sigma_y$, т.е. $|K_{XY}| \le \sigma_x\sigma_y$.

КОЭФФИЦИЕНТ КОРРЕЛЯЦИИ

Из свойства 3 следует, что если ковариация не равна нулю, то СВ X и Y зависимы. Случайные величины X и Y в этом случае $\left(K_{XY} \neq 0\right)$ называются ***коррелированными***.

Однако из того, что ковариация равна нулю, не следует независимость СВ X и Y. При равной нулю ковариации, т.е. при $K_{XY} = 0$, СВ X и Y называются ***некоррелированными***. Из независимости случайных величин следует их некоррелированность. Обратное утверждение в общем случае неверно.

Из свойств ковариации можно видеть, что она характеризует и степень зависимости случайных величин, и их рассеяние (разброс) вокруг точки $\left(m_x, m_y\right)$. Размерность ковариации равна произведению размерностей СВ X и Y. В качестве числовой характеристики только зависимости СВ X и Y используется безразмерная величина – коэффициент корреляции.

Определение. **Коэффициентом корреляции двух СВ X и Y** называется отношение их ковариации (корреляционного момента) к произведению их среднеквадратических отклонений:

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\operatorname{cov}\left(X, Y\right)}{\sigma_x \sigma_y}.$$

СВОЙСТВА КОЭФФИЦИЕНТА КОРРЕЛЯЦИИ

1. Коэффициент корреляции по абсолютной величине не превосходит единицы:

$$|r_{XY}| \le 1 \text{ или } -1 \le r_{XY} \le 1.$$

Доказательство. Так как $|K_{XY}| \le \sigma_x \sigma_y$ (свойство 5 ковариации), то

$$|r_{xy}| = \frac{|K_{xy}|}{\sigma_x \sigma_y} \le \frac{\sigma_x \sigma_y}{\sigma_x \sigma_y} = 1.$$

2. Если СВ X и Y независимы, то коэффициент корреляции равен нулю: $r_{XY} = 0$. Это следует из того, что для независимых СВ X и Y $K_{XY} = 0$ (свойство 3 ковариации).

3. Если СВ X и Y связаны линейной зависимостью, т.е. $Y = aX + b$, $a \ne 0$, то модуль коэффициента корреляции равен единице, $|r_{XY}| = 1$, причем $r_{XY} = 1$ при $a > 0$, и $r_{XY} = -1$ при $a < 0$.

Доказательство. Предварительно заметим, что $M[Y] = M[aX + b] = am_x + b$.

По определению ковариации получаем:

$$K_{XY} = M\left[(X - m_x)(Y - m_y)\right] = M\left[(X - m_x)(aX + b - am_x - b)\right] =$$

$$= M\left[aX^2 - am_x X - am_x X + am_x^2\right] = aM\left[(X - m_x)^2\right] = aD[X]$$

Так как $D[Y] = D[aX + b] = a^2 D[X]$, то

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{K_{xy}}{\sqrt{D[X]}\sqrt{D[Y]}} = \frac{aD[X]}{\sqrt{D[X]} \cdot |a| \cdot \sqrt{D[X]}} = \frac{a}{|a|} = \begin{cases} 1, & \text{при } a > 0, \\ -1, & \text{при } a < 0. \end{cases}$$

СВОЙСТВА КОЭФФИЦИЕНТА КОРРЕЛЯЦИИ

4. Если коэффициент корреляции по абсолютной величине равен единице, т.е. $|r_{XY}|=1$, то СВ X и Y связаны линейной функциональной зависимостью.

Доказательство. Пусть $r_{XY}=1$. Тогда из выражения для дисперсии разности двух стандартных случайных величин (см. доказательство свойства 5 ковариации)

$$D\left[\frac{X-m_x}{\sigma_x}-\frac{Y-m_y}{\sigma_y}\right]=2\left(1-\frac{K_{XY}}{\sigma_x\sigma_y}\right)$$

получаем $D\left[\frac{X-m_x}{\sigma_x}-\frac{Y-m_y}{\sigma_y}\right]=0$, т.е. $\frac{X-m_x}{\sigma_x}-\frac{Y-m_y}{\sigma_y}=c$ – постоянная.

Но $c=M[c]=M\left[\frac{X-m_x}{\sigma_x}-\frac{Y-m_y}{\sigma_y}\right]=M\left[\frac{X-m_x}{\sigma_x}\right]-M\left[\frac{Y-m_y}{\sigma_y}\right]=0-0=0$.

Значит, $\frac{X-m_x}{\sigma_x}=\frac{Y-m_y}{\sigma_y}$, и $Y=\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X-m_x)+m_y$.

При $r_{XY}=-1$ получим $Y=-\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X-m_x)+m_y$.

Таким образом, при $r_{XY}=\pm1$ СВ X и Y связаны линейной функциональной зависимостью.

СВОЙСТВА КОЭФФИЦИЕНТА КОРРЕЛЯЦИИ

Итак:

1) для независимых СВ коэффициент корреляции равен нулю: $r_{XY} = 0$; равенство нулю коэффициента корреляции означает их некоррелированность, но не независимость;

2) для линейно связанных СВ модуль коэффициента корреляции равен единице: $|r_{XY}| = 1$; в остальных случаях коэффициент корреляции принимает значения из интервала (-1, 1): $-1 < r_{XY} < 1$;

3) говорят, что СВ связаны положительной корреляцией, если $r_{XY} > 0$ и отрицательной корреляцией, если $r_{XY} < 0$;

4) чем ближе модуль коэффициента корреляции к единице, тем больше оснований считать, что СВ связаны линейной зависимостью.

Корреляционные моменты и дисперсии двумерной СВ (X, Y) обычно задаются корреляционной матрицей:

$$\begin{bmatrix} K_{XX} & K_{XY} \\ K_{YX} & K_{YY} \end{bmatrix} \text{ или } \begin{bmatrix} D[X] & K_{XY} \\ K_{YX} & D[Y] \end{bmatrix}.$$

Матрицы симметричны, так как $K_{YX} = K_{XY}$.

Для двумерных СВ (X, Y) помимо совместных законов распределения определяются и условные законы распределения. Эти законы распределения обладают всеми свойствами безусловных законов и по ним с использованием известных формулам (после замены в них безусловных законов на условные) могут быть вычислены числовые характеристики, которые называются условными.

Определение. **Условным математическим ожиданием** одной из СВ, входящих в систему (X, Y) называется её математическое ожидание, вычисляемое при условии, что другая СВ приняла определенное значение (или попала в заданный интервал).

Обозначения: $M\left[Y/X=x\right]$ или $M\left[Y/x\right]$ и $M\left[X/y\right]$.

Формулы для вычисления условного математического ожидания

для дискретных СВ:

$$M\left[Y/x_i\right]=\sum_{j=1}^{m} y_j p\left(y_j/x_i\right), \qquad M\left[X/y_j\right]=\sum_{i=1}^{n} x_i p\left(x_i/y_j\right),$$

где $p\left(y_j/x_i\right)=P\left\{Y=y_j/X=x_i\right\}$, $p\left(x_i/y_j\right)=P\left\{X=x_i/Y=y_j\right\}$;

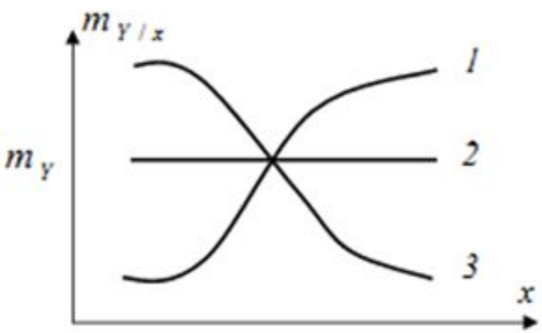
для непрерывных СВ:

$$M\left[Y/x\right]=\int_{-\infty}^{\infty} y\cdot f\left(y/x\right)dy, \qquad M\left[X/y\right]=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f\left(x/y\right)dx,$$

где $f\left(y/x\right)$ и $f\left(x/y\right)$ – условные плотности распределения СВ Y и X.

Условное математическое ожидание СВ Y при заданном значении СВ $X = x$, рассматриваемое как функция x, т.е. $M[Y/x] = \varphi(x)$, называется ***функцией регрессии*** или просто ***регрессией*** Y на x. Аналогично, $M[X/y] = \varphi(y)$ – регрессия X на y.

Графики этих функций называются соответственно ***линиями*** (или кривыми) ***регрессии*** Y на x и X на y. Если обе функции регрессии Y на x и X на y линейны, то говорят, что СВ X и Y связаны линейной корреляционной зависимостью.



На рисунке линия регрессии 1 указывает, что между СВ X и Y имеется положительная корреляционная зависимость: при увеличении значения x более вероятны большие значения Y (среднее значение Y увеличивается), т.е. $K_{XY} > 0$ и $r_{XY} > 0$. Линия регрессии 2 показывает, что величины СВ X и Y независимы, а линия регрессии 3 – что между СВ X и Y существует отрицательная корреляционная зависимость, т.е. $K_{XY} < 0$ и $r_{XY} < 0$.

ДВУМЕРНОЕ НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

В практических приложениях теории вероятностей наиболее часто используется нормальное (гауссовское) распределение двумерной СВ.

Определение. Двумерная СВ (X, Y) называется распределенной по нормальному закону, если её совместная плотность распределения имеет вид

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\left(1-r^2\right)}\left[\frac{\left(x-m_x\right)^2}{\sigma_x^2}-\frac{2r\left(x-m_x\right)\left(y-m_y\right)}{\sigma_x\sigma_y}+\frac{\left(y-m_y\right)^2}{\sigma_y^2}\right]\right\},$$

где m_x, m_y, σ_x, σ_y, $r=r_{XY}$ – параметры этого распределения.

Можно доказать, что m_x и m_y – математические ожидания СВ X и СВ Y, σ_x и σ_y – их среднеквадратические отклонения (σ_x^2 и σ_y^2 – соответственно дисперсии), а $r=r_{XY}$ – коэффициент корреляции СВ X и Y.

Если компоненты двумерной нормально распределенной СВ некоррелированы $\left(r_{XY}=0\right)$, то совместная плотность распределения СВ (X, Y) принимает вид

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{\left(x-m_x\right)^2}{2\sigma_x^2}+\frac{\left(y-m_y\right)^2}{\sigma_y^2}\right]\right\}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}\exp\left[-\frac{\left(x-m_x\right)^2}{2\sigma_x^2}\right]\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y}\exp\left[-\frac{\left(y-m_y\right)^2}{2\sigma_y^2}\right],$$

т.е. $f(x,y)=f_1(x)f_2(y)$, где $f_1(x)$, $f_2(y)$ – плотности распределения СВ X и СВ Y.

Отсюда следует вывод: некоррелированные нормально распределенные случайные величины являются также и независимыми. Справедливо и обратное утверждение: если нормально распределенные случайные величины независимы, то они и некоррелированы.

Таким образом, **для нормально распределенных случайных величин термины «независимость» и «некоррелированность» эквивалентны**.

В геометрической интерпретации совместная двумерная нормальная плотность $f(x,y)$ представляет собой холмообразную поверхность, вершина которой находится над точкой (m_x, m_y) плоскости $x0y$.