

Z- передаточная функция и весовая последовательность цифрового блока.



Предположим, что числовые последовательности на входе и выходе блока связаны рекуррентным уравнением:

$$a_0 \cdot u[n] + a_1 \cdot u[n-1] + \dots + a_N \cdot u[n-N] = b_0 \cdot e[n] + b_1 \cdot e[n-1] + \dots + b_M \cdot e[n-M],$$

$$a_0 \neq 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$u[m] = 0 \quad \text{и} \quad e[m] = 0 \quad \text{при} \quad m < 0, \quad N \geq M$$

Применяем Z-преобразование и получаем:

$$(a_0 + a_1 \cdot z^{-1} + \dots + a_N \cdot z^{-N}) \cdot U(z) = (b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + \dots + b_M \cdot z^{-M}) \cdot E(z)$$

Передаточная функция блока равна отношению Z-преобразований сигналов:

$$\frac{U(z)}{E(z)} = D(z) = \frac{b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + \dots + b_M \cdot z^{-M}}{a_0 + a_1 \cdot z^{-1} + \dots + a_N \cdot z^{-N}} = \frac{b_0 \cdot z^N + \dots + b_M \cdot z^{N-M}}{a_0 \cdot z^N + \dots + a_N},$$

$$U(z) = D(z) \cdot E(z)$$

Согласно теореме о свертке выходная и входная последовательность связаны соотношением:

$$u[n] = \sum_{m=0}^n \chi[n - m] \cdot e[m]$$

Где последовательность $\chi[n]$, которую называют *весовой последовательностью блока*, вычисляется посредством обратного Z-преобразования от передаточной функции:

$$\chi[n] = Z^{-1}[D(z)]$$

Весовая последовательность является сигналом на выходе блока, если на его вход подана единичная дискрета:

$$e[n] = \delta[n], \quad (Z\{\delta[n]\} = 1)$$

Передаточные функции цифрового регулятора, соответствующие типовым законам регулирования.

В аналоговых регуляторах используются следующие типовые законы регулирования:

пропорциональный (П) $u(t) = K_1 \cdot e(t)$

интегральный (И) $u(t) = K_2 \cdot \int_0^t e(\tau) d\tau$

дифференциальный (Д) $u(nT) = K_3 \cdot \frac{d}{dt} e(t)$

Для обозначения цифровых законов регулирования принято использовать те же буквы:

пропорциональный (П) $u(nT) = K_1 \cdot e(nT)$

суммирующий (И) $u(nT) = K_2 \cdot \sum_{m=0}^n e(mT)$

разностный (Д) $u(nT) = K_3 \cdot (e(nT) - e(nT - T))$

Z-передаточная функция цифрового ПИД-регулятора имеет вид:

$$\mathbf{D(z)} = \mathbf{K_1} + \mathbf{K_2} \frac{1}{1 - \mathbf{z^{-1}}} + \mathbf{K_3} (1 - \mathbf{z^{-1}}), \quad \text{где} \quad \mathbf{z} = \mathbf{e^{pT}}$$

Преобразуя к одному знаменателю, получим:

$$\mathbf{D(z)} = \frac{(\mathbf{K_1} + \mathbf{K_2} + \mathbf{K_3}) \cdot \mathbf{z^2} - (\mathbf{K_1} + 2\mathbf{K_3}) \cdot \mathbf{z} + \mathbf{K_3}}{\mathbf{z^2} - \mathbf{z}}$$

Для цифрового ПИ-регулятора Z-передаточная функция равна:

$$\mathbf{D(z)} = \frac{(\mathbf{K_1} + \mathbf{K_2}) \cdot \mathbf{z} - \mathbf{K_1}}{\mathbf{z} - \mathbf{1}} = \mathbf{K_1} \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{z} - \mathbf{1}}{\mathbf{z} - \mathbf{1}}, \quad \text{где} \quad \mathbf{b} = \mathbf{1} + \frac{\mathbf{K_2}}{\mathbf{K_1}} > \mathbf{1}$$

Часто используется другая формула для И закона регулирования:

$$\mathbf{u(nT)} = \mathbf{K_2} \cdot \sum_{\mathbf{m=0}}^{\mathbf{n-1}} \mathbf{e(mT)}$$

Для этой формулы передаточная функция цифрового И-регулятора равна:

$$\frac{1}{\mathbf{z} - \mathbf{1}} \quad \text{или} \quad \frac{\mathbf{z^{-1}}}{\mathbf{1} - \mathbf{z^{-1}}}$$

Z-передаточная функция цифрового ПИД-регулятора будет иметь вид:

$$\mathbf{D(z)} = \frac{(\mathbf{K_1 + K_3}) \cdot \mathbf{z^2} - (\mathbf{K_1 - K_2 + 2K_3}) \cdot \mathbf{z} + \mathbf{K_3}}{\mathbf{z^2 - z}}$$

Z-передаточная функция цифрового ПИ-регулятора примет вид:

$$\mathbf{D(z)} = \mathbf{K_1} + \frac{\mathbf{K_2}}{\mathbf{z - 1}} = \frac{\mathbf{K_1 \cdot z - (K_1 - K_2)}}{\mathbf{z - 1}}$$