Одномерная оптимизация.

Методы дихотомии, золотого сечения, Ньютона, секущих.

Оптимизация

Оптимизация (от лат. «optimus»-наилучший) – поиск наилучшего варианта, при наличии множества альтернативных.

Задача для решения методом оптимизации состоит в минимизации вещественнозначной функции $f(x)$ N-ного аргумента x, компоненты которого удовлетворяют системе ограничений в виде уравнений $H_k(x)=0$, $k=1, 2,\ldots,m$ или неравенств $g_j(x)\geq 0$, $j=m+1,\ldots s$.

Задачи без ограничений с N=1 называются задачами одномерной оптимизации

Методы одномерной оптимизации

Методы последовательного поиска (методы интервалов)

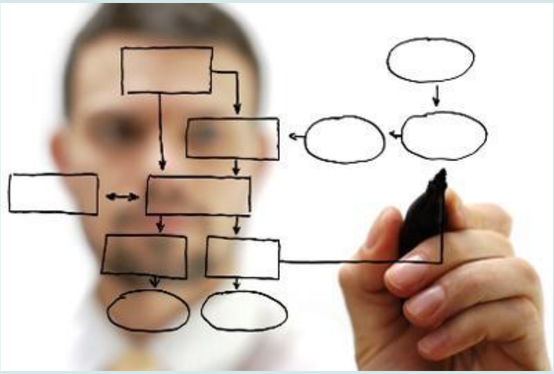
- метод дихотомии
- метод деления пополам
- метод золотого сечения
- метод Фибоначчи

Методы аппроксимации

- метод Пауэла

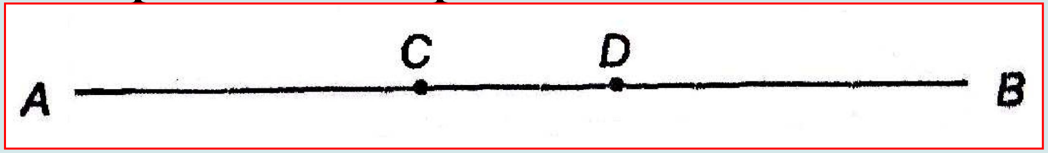
Методы с использованием информации о производной функции

- метод средней точки
- метод Ньютона
- метод секущих
- метод кубической аппроксимации



Метод золотого сечения

- Отрезок AB разделен точкой D в пропорции золотого сечения, если отношение всей длины отрезка к длине большей его части равно отношению длины большей его части к длине меньшей, т.е. $\frac{AB}{AD} = \frac{AD}{DB}$
- Пусть длина AB = 1, а AD = x. Тогда, $\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$ откуда x = $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Понятно, что больший отрезок можно было бы отложить не от левого, а от правого конца отрезка. Тогда получили бы точку золотого сечения C, симметричную т. D относительно центра, и AC = $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Точку C называют первой, а D второй точкой золотого сечения. Эти точки обладают замечательными свойствами.
- Рисунок - Первая и вторая точка золотого сечения



Алгоритм

- На первой итерации принимаем $a_1 = a$, $b_1 = b$ и вычисляем $c_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}(b_1 - a_1) + a_1$, $d_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}(b_1 - a_1) + a_1$.
- Далее, получив значения функции f в точках c_1 и d_1 , сравниваем их.
- Если $f(c_1) \le f(d_1)$, то $a_2 = a_1$, $b_2 = d_1$, $d_2 = c_1$, $c_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}(b_2 - a_2) + a_2$
- Если же $f(c_1) > f(d_1)$, то $a_2 = c_1$, $b_2 = b_1$, $c_2 = d_1$, $d_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}(b_2 - a_2) + a_2$.

- Далее сравниваем $f(c_2)$ с $f(d_2)$, определяя новые значения a_3 , b_3 , и т.д. до тех пор, пока не выполнится $\varepsilon_i = \frac{b_i - a_i}{2} \le \varepsilon$, где ε – требуемая точность.
- На каждой итерации длина локализующего отрезка уменьшается в $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ раз, следовательно $\varepsilon = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{i-1}(b - a)$.

Пример расчёта методом золотого сечения

Рассмотрим функцию $f(x) = x + \frac{2}{x}$, a = 0.5, b = 3.5 и найдем точку минимума с погрешностью ε=0.5.

1) $a_1 = 0.5$, $b_1 = 3.5$,

$$c_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}(3{,}5 - 0{,}5) + 0{,}5 = 1{,}646,$$

$$d_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}(3{,}5 - 0{,}5) + 0{,}5 = 2{,}354,$$

$$f(c_1) = 2{,}861 < f(d_1) = 3{,}204;$$

2) $a_2 = a_1 = 0.5$, $b_2 = d_1 = 2.354$, $d_2 = c_1 = 1.646$,

$$c_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}(2{,}354 - 0{,}5) + 0{,}5 = 1{,}208,$$

$$\varepsilon_2 = \frac{2{,}354 - 0{,}5}{2} = 0{,}927 > 0{,}5$$ поэтому продолжаем

$f(c_2) = 2{,}864, \quad f(d_2) = f(c_1) = 2{,}861,$

$f(c_2) > f(d_2);$

3) $a_3 = c_2 = 1.208, \ b_3 = b_2 = 2.354, \ c_3 = d_2 = 1.646,$

$$d_3 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}(2{,}354 - 1{,}208) + 1{,}208 = 1{,}916,$$

$\varepsilon_2 = \frac{2{,}354-1{,}208}{2} = 0{,}573 > 0{,}5$ поэтому продолжаем

$f(c_3) = f(d_2) = 2{,}861, \quad f(d_3) = 2{,}96,$

$f(c_3) < f(d_3);$

4) $a_4 = a_3 = 1.208, b_4 = d_3 = 1.916, d_4 = c_3 = 1.646,$

$$c_4 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}(1{,}916 - 1{,}208) + 1{,}208 = 1{,}478,$$

$\varepsilon_2 = \frac{1{,}916 - 1{,}208}{2} = 0{,}354 < 0{,}5$ т.е. это последняя итерация

Принимаем $x_m = \frac{1{,}916 + 1{,}208}{2} = 1{,}562.$