

Последовательность Фибоначчи.

Парадоксы с площадью.

Загадка чисел

Фибоначчи –

Преимственность
большой игры.

Мы друг для друга
что-то значим,

Пока рождаются
миры.

Леонардо Пизанский

(около 1170 года, Пиза —
около 1250 года, там же) -
первый крупный
математик средневековой
Европы. Наиболее
известен под прозвищем
Фибоначчи.





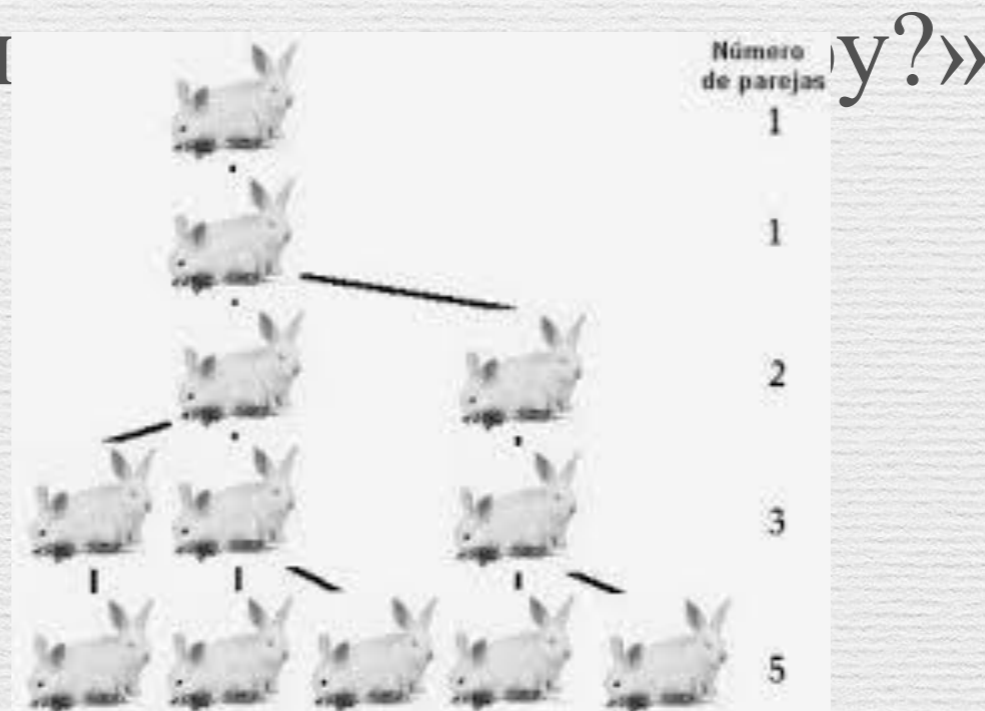
Книга Абака

Эта книга состоит из 15 глав и содержит почти все арифметические и алгебраические сведения того времени, изложенные с исключительной полнотой и глубиной.

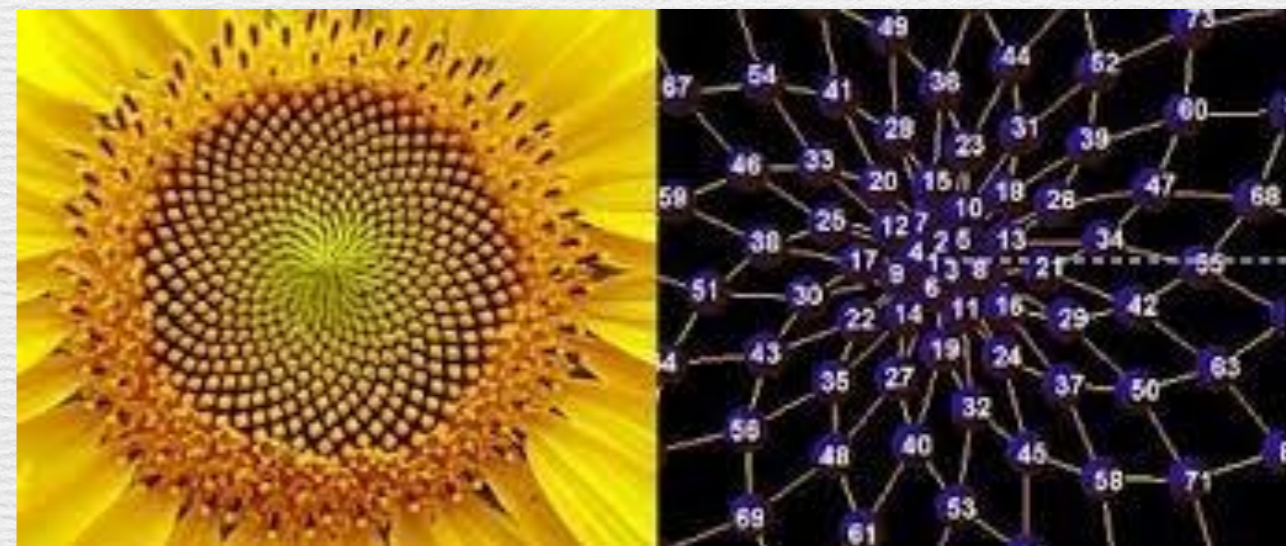
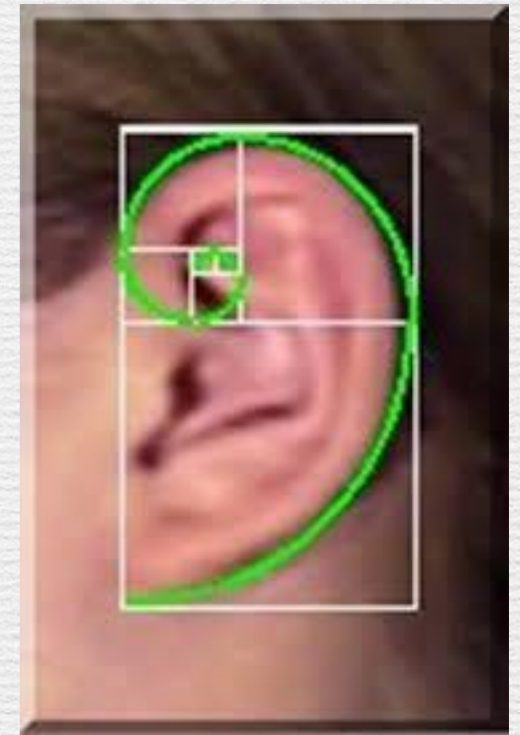
Числовой ряд, носящий сегодня имя Фибоначчи, вырос из проблемы с кроликами, которую Фибоначчи изложил в своей книге «Liber abacci»:

«Человек посадил пару кроликов в загон, окруженный со всех сторон стеной. Сколько пар кроликов за год

может произвести на свет эта пара, если известно, что каждый месяц, начиная со второго, каждая пара кроликов производи



Последовательность Фибоначчи вокруг нас



Задача №1

Найдите количество слов длины 10, состоящих только из букв "а" и "б" и не содержащих в записи двух букв "б" подряд.

Решение

Обозначим за a_n количество слов длины n , состоящих только из букв "а" и "б" и не содержащих в записи двух букв "б" подряд. Таким образом, находим $a_1=2$, $a_2=3$. Покажем, что a_n можно выразить через a_{n-1} и a_{n-2} . Количество слов длины n , не содержащих в записи двух букв "б" подряд и начинающихся с буквы "а", равно a_{n-1} , так как после первой буквы может следовать любое слово длины $n-1$, не содержащее двух "б" подряд. Пусть слово длины n начинается с буквы "б". Если в этом слове нет двух "б" подряд, то вторая буква - "а", а далее может следовать любое слово длины $n-2$, не содержащее двух "б" подряд. Таким образом, количество слов длины n , не содержащих в записи двух букв "б" подряд и начинающихся с буквы "б", равно a_{n-2} . Тем самым, мы показали, что $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Теперь последовательно вычисляем $a_3 = a_2 + a_1 = 3 + 2 = 5$, $a_4 = a_3 + a_2 = 5 + 3 = 8$ и т.д., $a_{10} = a_9 + a_8 = 144$. Заметим, что получающиеся числа a_n - это хорошо известные числа Фибоначчи.

Ответ

144

Задача №2

Условие

- а) Леша поднимается по лестнице из 10 ступенек. За один раз он прыгает вверх либо на одну ступеньку, либо на две ступеньки. Сколькими способами Леша может подняться по лестнице?
- б) При спуске с той же лестницы Леша перепрыгивает через некоторые ступеньки (может даже через все 10). Сколькими способами он может спуститься по этой лестнице?

Решение

а) Обозначим через a_n число способов подняться на лестницу из n ступенек, соблюдая условия задачи. Очевидно, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$.

Пусть Петя запрыгивает на лестницу из $n > 2$ ступенек. Если первый прыжок был на две ступеньки, то ему осталось запрыгнуть на $n - 2$ ступеньки, и число способов закончить подъем равно a_{n-2} . Если же первый прыжок был на одну ступеньку, то число способов закончить подъем равно a_{n-1} . Значит, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

Это равенство позволяет, зная a_1 и a_2 , вычислять последовательно все a_n (при этом будут получаться известные числа Фибоначчи):
 $a_3 = 3$, $a_4 = 5$, $a_5 = 8$, $a_6 = 13$, $a_7 = 21$, $a_8 = 34$, $a_9 = 55$, $a_{10} = 89$.

б) Каждую из 9 ступенек (кроме последней) Петя может либо перепрыгнуть, либо не перепрыгнуть независимо от того, на каких из верхних ступенек он останавливался. Поэтому количество способов спуститься по лестнице равно 29.

Ответ

а) 89 способов; б) 512 способов.

новорожденных пар (а число новорожденных пар

будет таким же, как и было **Задача №3** месяца назад)

В место, огороженное со всех сторон стеной, поместили пару кроликов,

природа которых такова, что любая пара кроликов производит на свет другую

Немало усилий придется приложить, дабы

пару каждый месяц, начиная со второго месяца своего существования.

Сколько пар кроликов будет через год?

разобраться и до конца понять приведенное решение.

Гораздо удобнее для решения этой задачи

воспользоваться следующим методом

Для поиска ответа используется рекуррентная

Золотое сечение

Золотое сечение - высшее проявление совершенства целого и его частей, в науке, искусстве и природе.



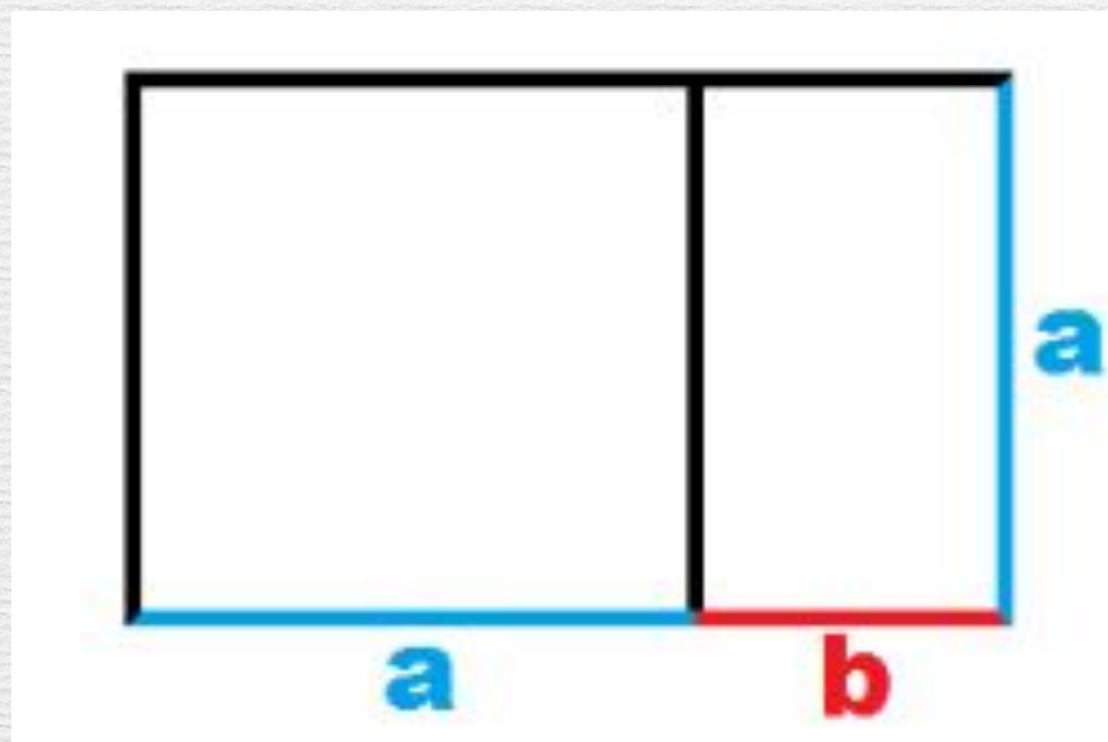
Золотое сечение (золотая пропорция, деление в крайнем и среднем отношении) — соотношение двух величин, равное соотношению их суммы к большей из данных величин.

Если использовать вычисленную величину золотого сечения, — это деление величины на две части — 62 % и 38 %.

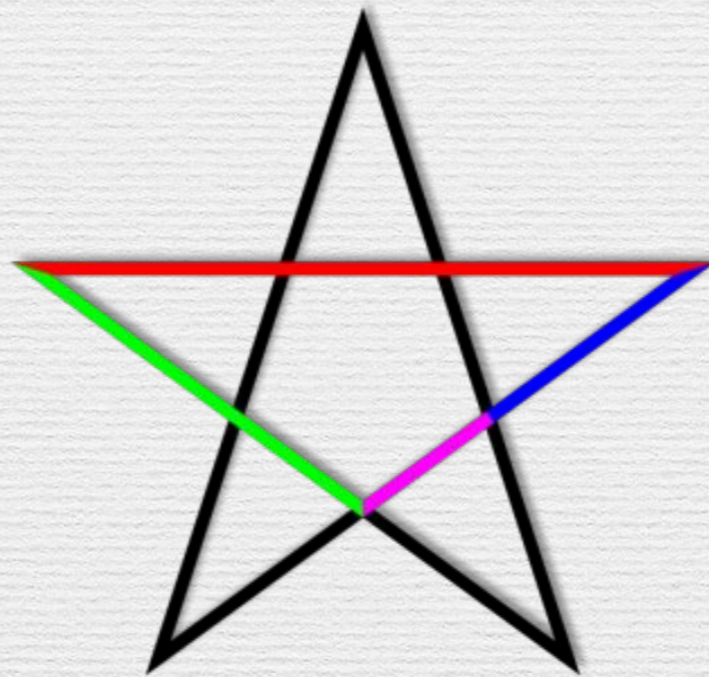
$$\varphi = 1,61803398874989\dots$$

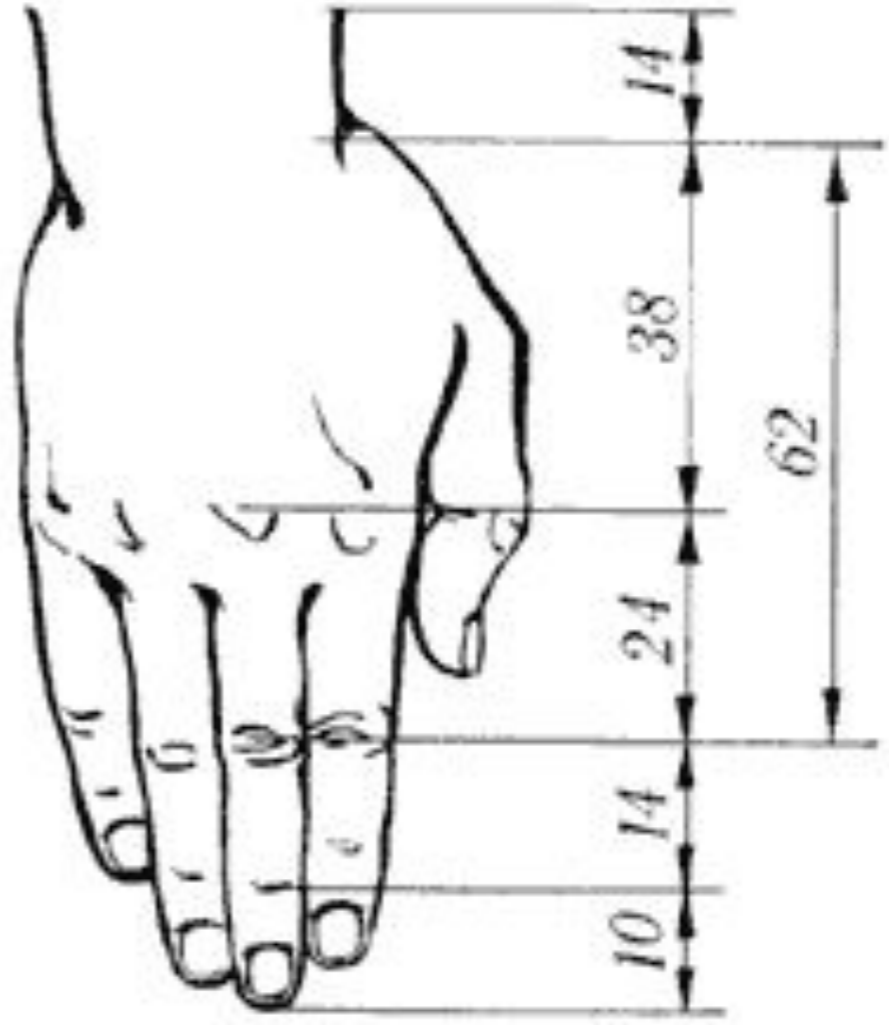
С математической точки зрения, отношение большей части к меньшей в золотом сечении выражается квадратичной иррациональностью.

Отрезав квадрат от прямоугольника, построенного по принципу золотого сечения, мы получаем новый, уменьшенный прямоугольник с тем же отношением сторон.



В правильной пятиконечной звезде каждый отрезок делится пересекающим его отрезком в золотом сечении (на приведённом рисунке отношения красного отрезка к зелёному, зелёного к синему и синего к пурпурному равны). Кроме того, отношение красного отрезка к расстоянию между соседними вершинами звезды (которое равно зелёному отрезку), также равно.





Мистер Рэнди и его необыкновенные ковры.

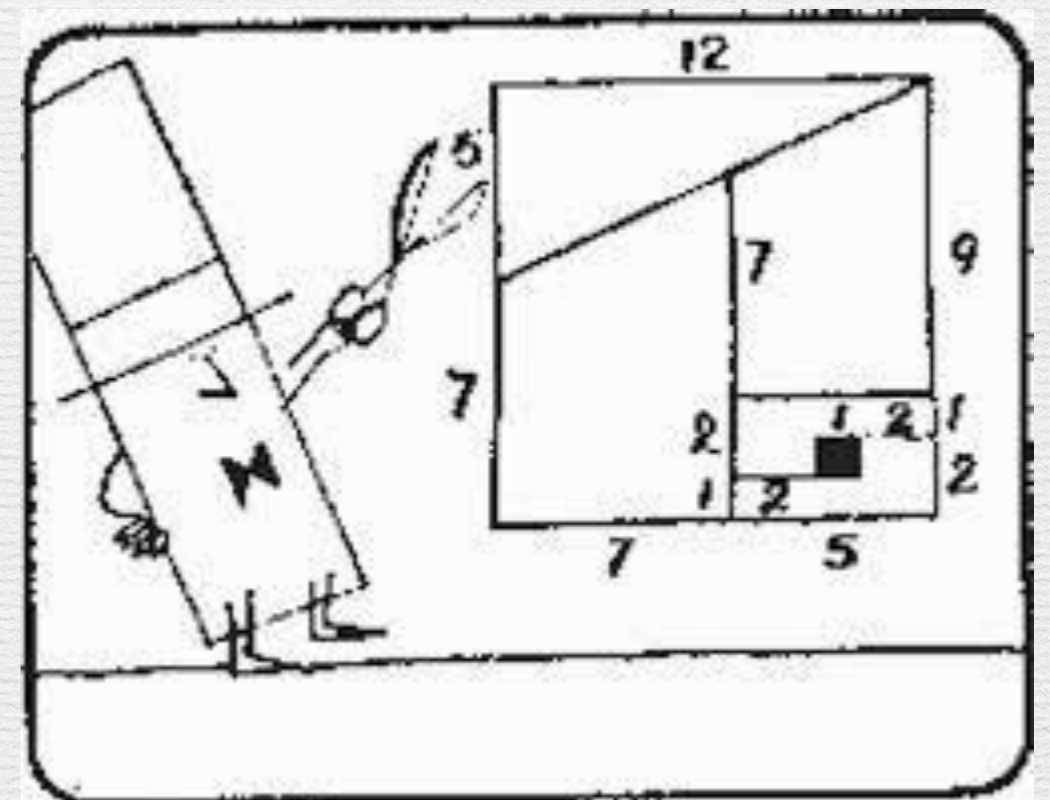
Через несколько месяцев мистер Рэнди снова пришел к Омару. На этот раз он принес с собой ковер размером 12×12 дм².

М-р Рэнди. Мой дорогой Омар! Случилась беда: электрообогреватель опрокинулся на ковер и прожег в нем дырку. Разрезав ковер на части и сшив их по-другому, вы сможете легко скрыть этот изъян.

Оставив сомнения, Омар последовал инструкциям мистера Рэнди. Сшив части прежнего ковра, он получил ковер размером 12×12 дм². Дыра бесследно исчезла!

Омар. Как вам удалось это сделать, мистер Рэнди? Откуда вы взяли недостававший квадратный дециметр, чтобы заделать дыру?

Могут ли два одинаковых квадрата иметь различную площадь? Во втором парадоксе с коврами мистера Рэнди недостающая площадь имеет правдоподобное объяснение: это дырка, прожженная в ковре. В отличие от предыдущего парадокса все части примыкают без зазоров, и ни одна часть не перекрывает другую. Куда же исчезает недостающий квадрат со стороной 1?



Парадоксы с площадью

А что, если начертить на листе в клеточку прямоугольник и, разрезав его на части, составить из них квадрат?

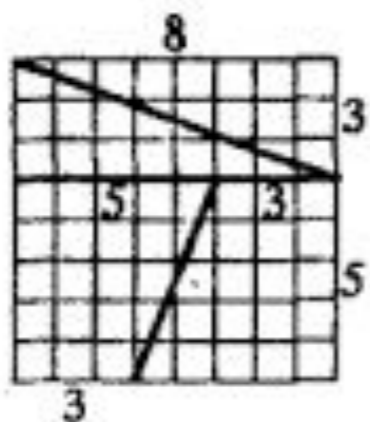


Рис. 7

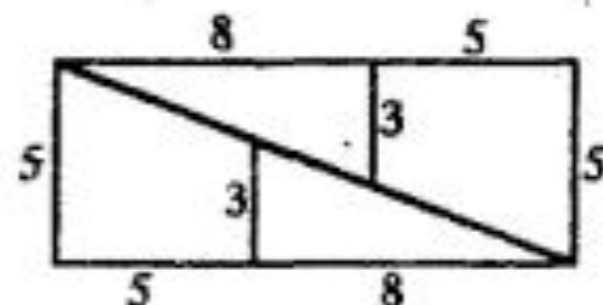
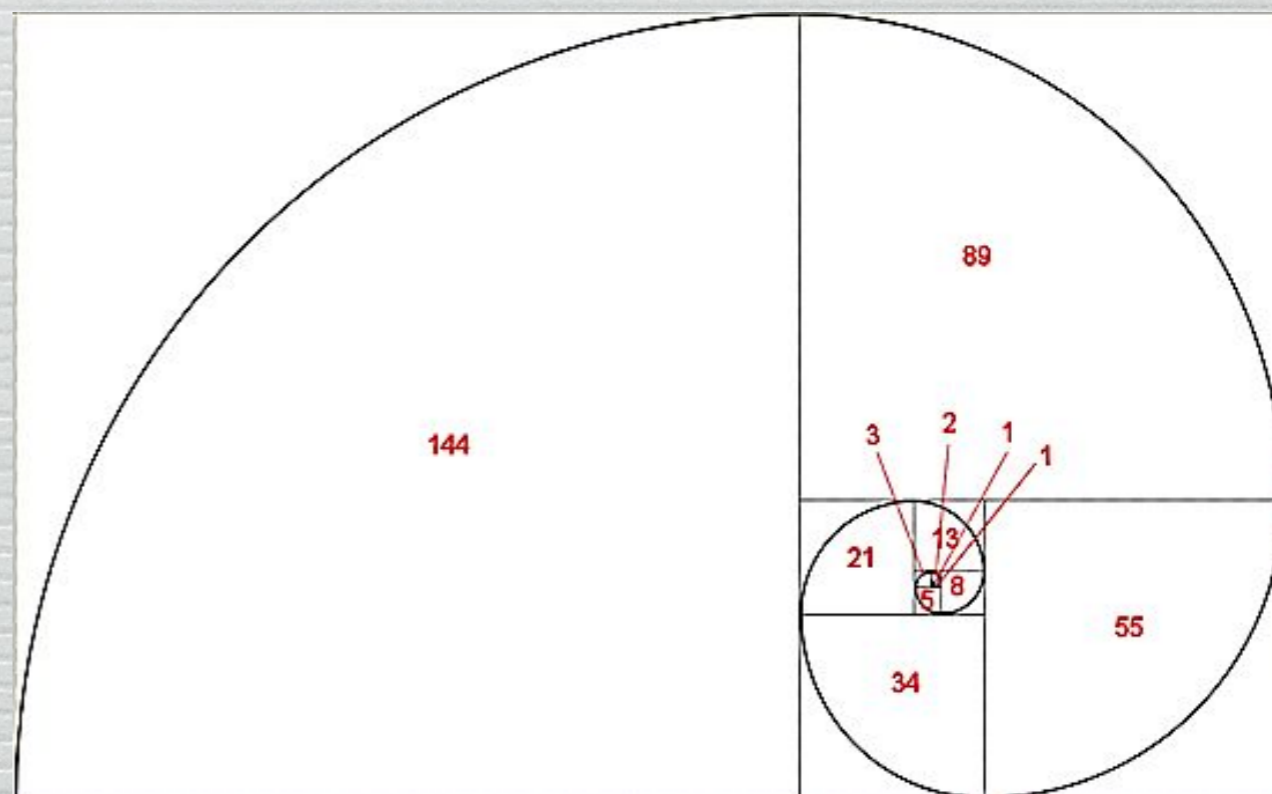
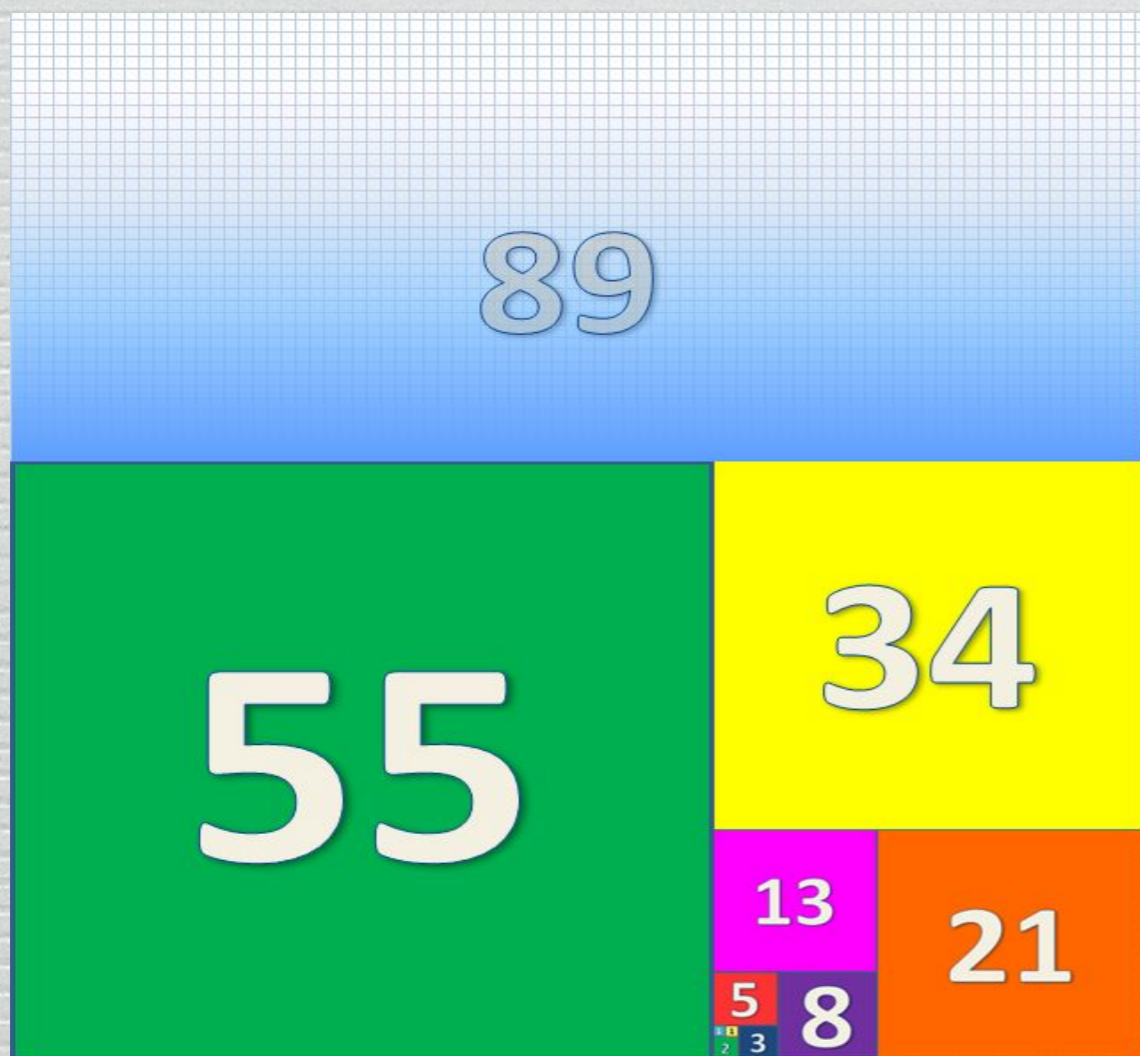


Рис. 8

Построение фигур, стороны которых связаны с числами из последовательности.



Анхель де Куатье пишет: «Странная, загадочная, необъяснимая вещь: эта божественная пропорция мистическим образом сопутствует всему живому. Неживая природа не знает, что такое «золотое сечение».

Загадка чисел Фибоначчи –
Преимственность большой
игры.



Мы друг для друга
значим,

Пока рождаются миры.