

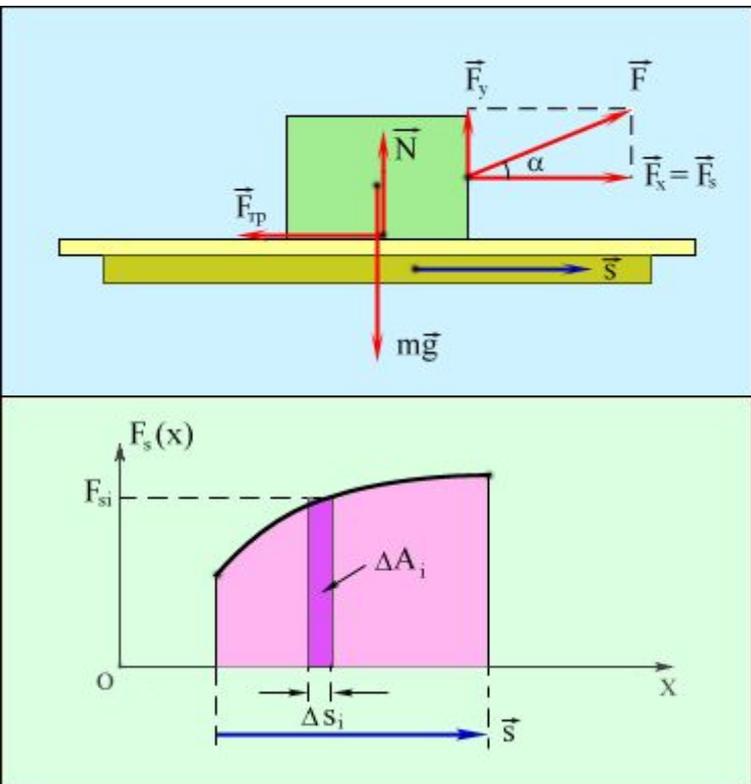
Глава 1. МЕХАНИКА

**Механическая Работа и
Энергия.**

Гармонические колебания.

1. МЕХАНИЧЕСКАЯ РАБОТА

Чтобы количественно охарактеризовать процесс обмена энергией между взаимодействующими телами, в механике вводится понятие **РАБОТЫ СИЛЫ**



При прямолинейном поступательном движении тела под действием постоянной силы работа этой силы на участке пути ΔS равна скалярному произведению векторов силы и перемещения

$$A = (\vec{F} \cdot \Delta \vec{r}) = F \cdot \Delta S \cos \alpha$$

где α – угол между силой \mathbf{F} и направлением перемещения

При криволинейном движении сила может изменяться как по модулю, так и по направлению :

$$\Delta A = \vec{F} d\vec{r} = F \cdot \cos \alpha ds$$

$$A = \int_1^2 F \cdot \cos \alpha ds$$

Единица работы – джоуль (Дж):
1 Дж – работа, совершаемая силой в 1 Н на пути длиной 1 м

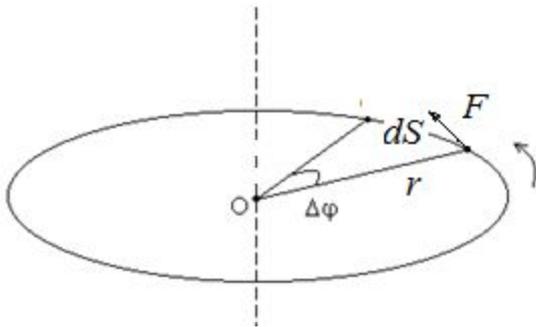
МЕХАНИЧЕСКАЯ РАБОТА

При вращательном движении при повороте тела под действием касательной силы \mathbf{F} на бесконечно малый угол $d\varphi$ точка приложения силы, описывая окружность, проходит путь

$$dS = r d\varphi$$

$$dA = \vec{F} dS = \vec{F} r d\varphi = \vec{M} d\varphi$$

где $M = F \cdot r$ – момент силы



$$A = \int_0^{\varphi} M d\varphi$$

При вращении относительно неподвижной O оси работа внешних сил определяется действием момента этих сил относительно данной оси

Если $M=0$, то сила работы не совершает!

МОЩНОСТЬ



Работа, совершаемая в единицу времени называется **МОЩНОСТЬЮ**

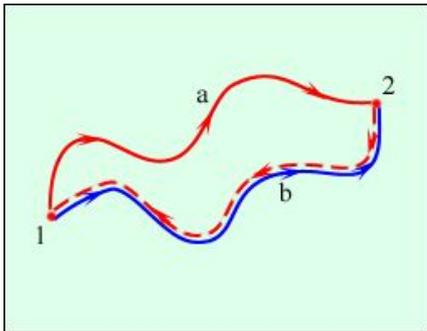
$$P = N = \frac{\Delta A}{\Delta t};$$

$$P \equiv \frac{dA}{dt} = \frac{\vec{F} d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \vec{V} = FV \cos \alpha;$$

$$[Вт] = 1 \frac{Дж}{с} = 1 \quad ;$$

КОНСЕРВАТИВНЫЕ И ДИСППАТИВНЫЕ СИЛЫ

Если работа сил определяется только начальным и конечным положением тел и не зависит от формы пути, то такие силы называются **консервативными (потенциальными)** (н-р: силы тяготения, упругие, т.е. все центральные силы)



$$A_{12a} = A_{12b}; \quad A_{12a} = -A_{21b} \Rightarrow$$

$$A_{12} + A_{21} = 0;$$

Неконсервативные силы называются **диссипативными** (н-р: силы трения, при работе таких сил происходит рассеяние (диссипация) энергии в виде тепла.)

В диссипативных системах механическая энергия постепенно уменьшается за счет преобразования в другие (немеханические) формы энергии

Механическая энергия

кинетическая энергия

МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИЕЙ тела называется скалярная величина, равная **МАКСИМАЛЬНОЙ РАБОТЕ**, которая может быть совершена в данных условиях **[Дж]**

КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИЕЙ называется механическая энергия тела массы m , связанная с перемещением тела в пространстве, т.е. энергия движущегося тела

$$W_k = \frac{mV^2}{2}$$

Работа результирующей силы идет на приращение (изменение) кинетической энергии материальной точки.

$$A = Wk_2 - Wk_1$$

Если **$A > 0$, $Wk_2 > Wk_1$** : кинетическая энергия возрастает **внешние силы** над телом совершают работу

Если **$A < 0$, $Wk_2 < Wk_1$** : кинетическая энергия тела убывает **тело** совершает работу

Механическая энергия

потенциальная энергия

ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИЕЙ называется энергия, обусловленная взаимодействием тел друг с другом на расстоянии. Она определяется не скоростями тел, а их взаимным расположением. **Потенциальная энергия может быть введена только для поля консервативных сил**

Работу в потенциальном поле можно записать в виде разности двух чисел: одно - W_{n1} - будет зависеть от начального положения тела, второе - W_{n2} - от конечного положения тела и **равна убыли потенциальной энергии**

$$A_{12} = W_{n1} - W_{n2}$$

• **Потенциальная энергия** поднятого над поверхностью Земли тела массы m , равна

$$W_{\Pi} = U = mgh$$

• **Потенциальная энергия** растянутой или сжатой пружины

$$W_{\Pi} = U = \frac{kx^2}{2}$$

Механическая энергия

Полная механическая энергия

СУММА кинетической и потенциальной энергий составляет ПОЛНУЮ МЕХАНИЧЕСКУЮ ЭНЕРГИЮ

ПОЛНАЯ МЕХАНИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ изолированной системы определяется взаимным расположением тел, составляющих эту систему, и скоростями их движения.

Убыль потенциальной энергии сопровождается **приростом такого же в точности количества кинетической энергии**, и наоборот

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ :
полная механическая энергия изолированной системы не меняется со временем, если движение такой системы не сопровождается взаимопревращением механической и других видов энергии

Механическая энергия

Закон сохранения механической энергии

Для одной материальной точки, движущейся в поле консервативных сил

$$A_{12} = W_{k2} - W_{k1}$$



$$W_{n1} - W_{n2} = W_{k2} - W_{k1}$$

или

$$A_{12} = W_{n1} - W_{n2}$$

$$W_{k1} + W_{n1} = W_{k2} + W_{n2}$$

Полная энергия ($W = W_n + W_k$) материальной точки в поле консервативных сил остается постоянной, т.е. **сохраняется**

Если в замкнутой системе, кроме консервативных сил действуют **неконсервативные силы** (например, сила трения), то справедлив **ЗАКОН ИЗМЕНЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ**

$$\Delta W = W_2 - W_1 = A_{н.с.}$$

Изменение полной механической энергии замкнутой системы равно работе неконсервативных сил

Колебания

Колебаниями называются процессы, отличающиеся той или иной степенью повторяемости.

Система, совершающая колебания, называется **КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМОЙ (ОСЦИЛЛЯТОРОМ)**

СВОБОДНЫМИ (собственными) колебаниями, называются колебания, которые происходят в отсутствие переменных внешних воздействий на колебательную систему и возникают вследствие какого-либо начального отклонения этой системы от состояния ее устойчивого равновесия.

Колебания называют **ПЕРИОДИЧЕСКИМИ**, если значения всех физических величин, характеризующих колебательную систему и изменяющихся при ее колебаниях, повторяются через равные промежутки времени. (Движение планет вокруг Солнца, движение поршня внутри двигателя внутреннего сгорания и тд)

КОЛЕБАНИЯ

Наименьший промежуток времени T , удовлетворяющий этому условию, называется **ПЕРИОДОМ КОЛЕБАНИЙ**. За период колебаний T система совершает одно полное колебание

ЧАСТОТА периодических колебаний – число полных колебаний, совершающихся за единицу времени

$$\nu = \frac{1}{T}$$

Единица измерения частоты [**с⁻¹** и **Гц**].

Герц – это частота колебаний, период которых равен 1 секунде

Циклическая (круговая) частота колебаний число полных колебаний, совершающихся за 2π единиц времени

$$\omega = 2\pi \cdot \nu = \frac{2\pi}{T} \quad \left[\frac{\text{рад}}{\text{с}} \right]$$

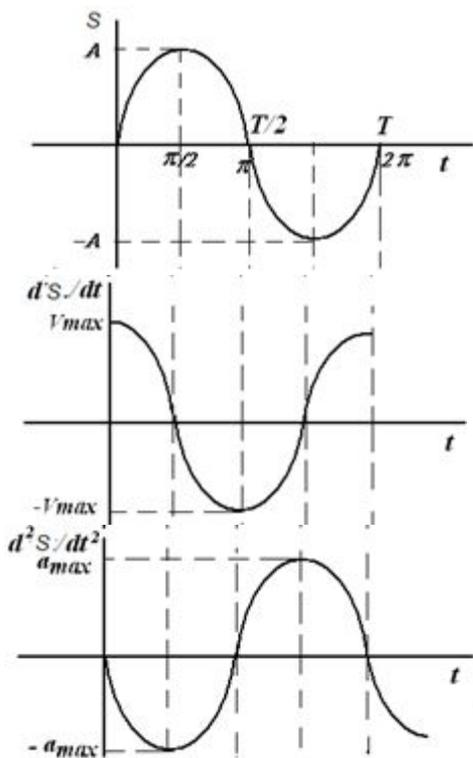
Гармонические колебания

ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ – колебания, при которых колеблющаяся величина изменяется со временем по закону синуса (или косинуса)

$$S(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

A – амплитуда колебаний - максимальное значение колеблющейся величины

$(\omega t + \varphi_0)$ фаза колебаний определяет значение колеблющейся величины в данный момент времени t .



$$S' = S' = \frac{dS}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0) = A\omega \sin\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right)$$

S' имеет смысл скорости. **Скорость** достигает своего максимального значения при $\cos(\omega t + \varphi_0) = 1$.

$\mathbf{v_{max} = A\omega}$. Смещение в этот момент времени равно нулю. Скорость опережает смещение при колебании на $\pi/2$

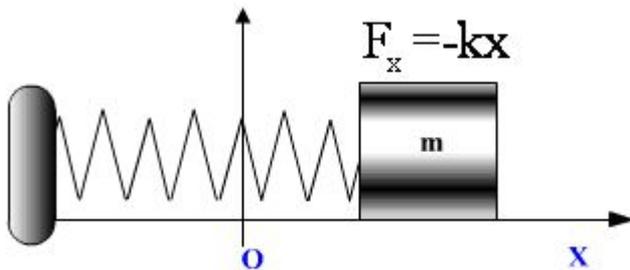
$$S'' = S'' = \frac{d^2S}{dt^2} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) = A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0 + \pi)$$

S'' имеет смысл ускорения. **Ускорение** достигает своего максимального значения при $\sin(\omega t + \varphi_0) = 1$

$\mathbf{a_{max} = A\omega^2}$ направлено в сторону противоположную смещению, т.е. ускорение и смещение изменяются в противофазе (смещены на π).

Примеры гармонических колебаний

1. Простейшим примером системы, где возникают свободные гармонические колебания, является движение тела под действием силы упругости пружины. **Пружинный маятник (П.М.)** - тело массы m , прикрепленное к пружине жесткостью k , движущееся по горизонтальной поверхности без трения. В этом случае x – растяжение пружины (смещение тела из положения равновесия).



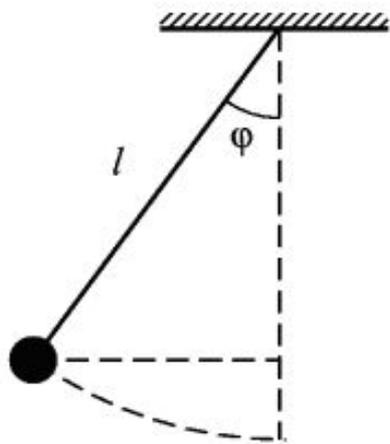
Уравнение второго порядка, описывающее гармонические колебания П.М.:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Собственная частота: $\omega_0^2 = \frac{k}{m} \rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Период: $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$

2. Математическим маятником называют идеализированную систему, состоящую из легкой и нерастяжимой нити, на которой подвешена масса, сосредоточенная в одной точке.



В такой системе при малых углах отклонения нити происходят гармонические колебания. В этом случае собственная частота

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

период

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Энергия колебаний

Полная механическая энергия, которой обладает колебательная система на примере механических прямолинейных гармонических колебаний $E = T + U$

Кинетическая энергия T в произвольный момент времени равна:

$$T = \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Потенциальная энергия U выражается формулой:

$$U = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)$$



$$E = U + T = \frac{kA^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} = const$$

Затухающие колебания. Коэффициент затухания и логарифмический декремент затухания. Энергия гармонических и затухающих колебаний.

При движении тела в среде последняя всегда оказывает сопротивление, стремящееся замедлить движение. При этом энергия движущегося тела, в конце концов, переходит в тепло. В таких случаях говорят, что имеет место **диссипация** энергии. Если движение тела в среде достаточно медленное по сравнению со скоростью внутренних диссипативных процессов, то реакция среды на движение тела в некоторых случаях может быть приближенно описана введением так называемой силы трения, действующей на тело и зависящей лишь от скорости последнего. Такая ситуация возникает, например, при движении тела в вязкой среде, жидкости или газе.

В ряде случаев можно считать, что сила сопротивления пропорциональна величине скорости

$$F_{\text{сопр.}} = -r\dot{x}$$

Уравнение второго закона Ньютона для пружинного маятника в присутствии сил сопротивления имеет вид:

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}$$

Перепишем его следующим образом:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

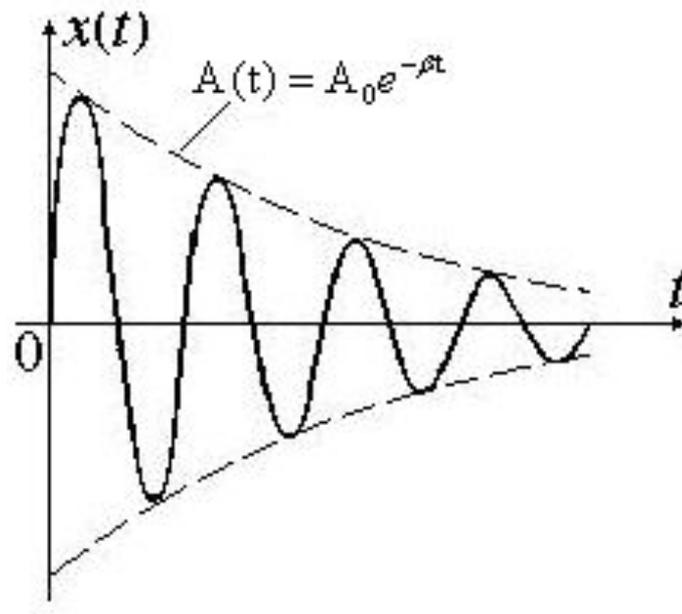
Где применены следующие обозначения:

$$2\beta = \frac{r}{m}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

ω_0 представляет собой ту частоту, с которой совершались бы свободные колебания системы при отсутствии сопротивления среды, т.е. при $r=0$. Наличие сопротивления среды приводит к тому, что размах колебаний уменьшается. Поэтому в зависимости смещения от времени амплитуда колебаний должна изменяться.

При небольшой силе трения полученное выше дифференциальное уравнение имеет следующее решение:

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0)$$



В соответствии с видом функции движение системы можно рассматривать как гармонические колебания частоты ω с амплитудой, изменяющейся во времени по закону:

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}$$

Скорость затухания колебаний определяется величиной

$$\beta = \frac{r}{2m} \quad \text{-коэффициент затухания.}$$

Коэффициент затухания обратен по величине тому промежутку времени, за который амплитуда уменьшается в e раз. Период затухающих колебаний равен:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

Вынужденные колебания. Резонанс

При затухающих колебаниях энергия системы расходуется на преодоление сопротивления среды. Если восполнять эту убыль энергии, колебания станут незатухающими. Пополнение энергии системы может осуществляться за счет толчков извне, однако эти толчки должны сообщаться системе в такт с ее колебаниями, иначе они могут уменьшить колебания системы и даже прекратить их совсем.

Можно сделать так, чтобы колеблющаяся система сама управляла внешним воздействием, обеспечивая согласованность сообщаемых ей толчков со своим движением. Такая система называется *автоколебательной*, а совершаемые ею незатухающие колебания – *автоколебаниями*.

Если колебательная система подвергается воздействию внешней периодической силы, то возникают так называемые **вынужденные колебания**, имеющие незатухающий характер.

Вынужденные колебания следует отличать от автоколебаний. В случае автоколебаний в системе предполагается специальный механизм, который в такт с собственными колебаниями "поставляет" в систему небольшие порции энергии из некоторого резервуара энергии. Тем самым поддерживаются собственные колебания, которые не затухают. В случае автоколебаний система как бы сама себя подталкивает. В случае вынужденных колебаний система подталкивается посторонней силой. Особый интерес представляет случай, когда внешняя сила, изменяющаяся по гармоническому закону с частотой ω , воздействует на колебательную систему, способную совершать собственные колебания на некоторой частоте ω_0 . Если свободные колебания происходят на частоте ω_0 , которая определяется параметрами системы, то установившиеся вынужденные колебания всегда происходят на частоте ω внешней силы.

Уравнение для вынужденных колебаний имеет следующий вид:

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos((\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2})t + \varphi') + \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \cos\left(\omega t - \arctg \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

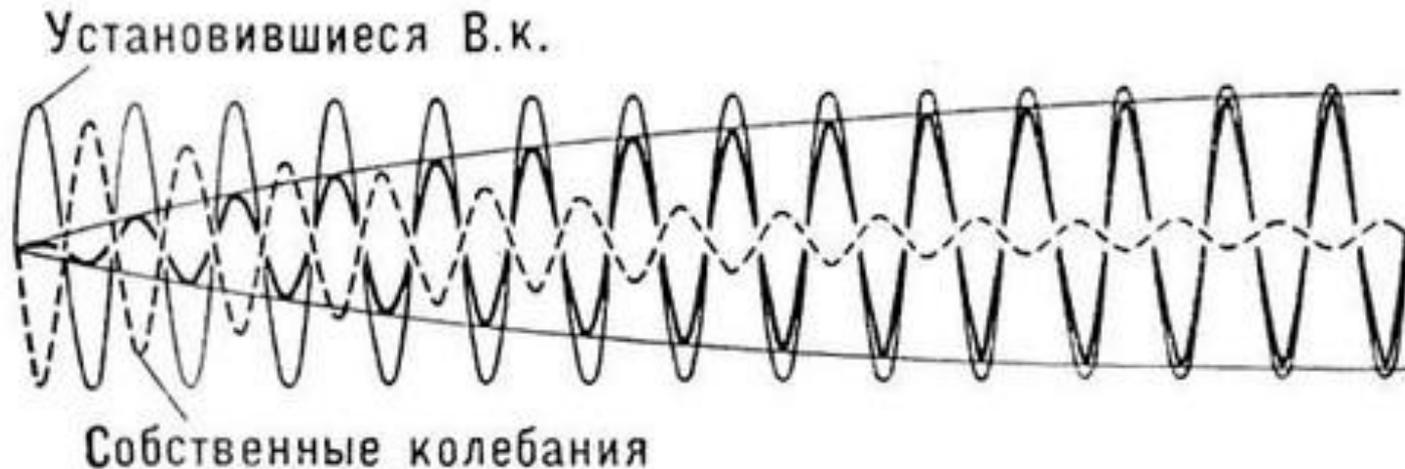
Первое слагаемое в правой части этой формулы представляет свободные колебания их частота ω определяется внутренними свойствами системы, а амплитуда A_0 и фаза φ' — начальными условиями и внешними воздействиями.

Второе слагаемое, называемое *вынужденными колебаниями*, обусловлено наличием внешней (вынуждающей) силы.

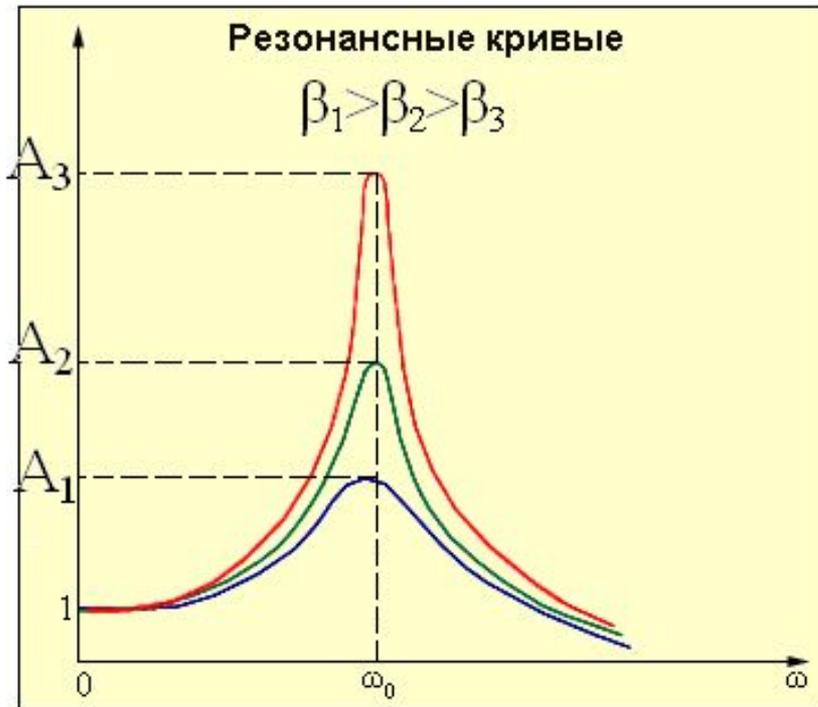
Первое слагаемое в этом выражении играет заметную роль только в начальной стадии процесса, при так называемом установлении колебаний.

С течением времени из-за экспоненциального множителя роль первого слагаемого все больше уменьшается, и по прошествии достаточного времени им можно пренебречь, сохраняя лишь второе слагаемое.

$$x(t) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \cos\left(\omega t - \arctg \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$



Резонанс



Зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы приводит к тому, что при некоторой определенной для данной системы частоте амплитуда колебаний достигает максимального значения. Колебательная система оказывается особенно отзывчивой на действие вынуждающей силы при этой частоте. Это явление называется **резонансом**, соответствующая частота – **резонансной частотой**.

Выражение для
резонансной частоты

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

В отсутствие трения амплитуда вынужденных колебаний при резонансе должна неограниченно возрастать. В реальных условиях амплитуда установившихся вынужденных колебаний определяется условием: работа внешней силы в течение периода колебаний должна равняться потерям механической энергии за то же время из-за трения. Чем меньше трение (т. е. чем выше добротность Q колебательной системы), тем больше амплитуда вынужденных колебаний при резонансе. У колебательных систем с не очень высокой добротностью (< 10) резонансная частота несколько смещается в сторону низких частот