Кездейсоқ шамалар және олардың берілу тәсілдері

Доцент Аймаханова А.Ш.

Сынау нәтижесінде мүмкін болатын мәндерден алдын-ала белгісіз бір ғана мәнді тәжірбие нәтижесіне байланысты қабылдайтын шаманы кездейсоқ шама деп атаймыз.

Кездейсоқ шамаларды X,Y,Z, бас әріптермен, ал олардың қабылдайтын мәндерін x,y,z кіші әріптермен белгілейміз.

Мысалы, егер X кездейсоқ шамасының қабылдай алатын үш мүмкін мәндері бар болса, онда оларды x_1, x_2, x_3 деп белгілейміз.

Дискретті (үздікті) кездейсоқ шама деп белгілі ықтималдықтары бар жеке, дербес мәндерді қабылдай алатын шаманы айтамыз.

Дискретті кездейсоқ шаманың мүмкін мәндерінің саны ақырлы немесе ақырсыз болуы мүмкін.

Дискретті кездейсоқ шаманың таралу заңы деп оның қабылдай алатын мүмкін мәндері шаманың мен ықтималдықтарының арасындағы сәйкестікті айтамыз.

Оны кестелік түрде, аналитикалық (формула түрінде) және графиктік түрде беруге болады.

Дискретті кездейсоқ таралу заңы кестелік түрде берілсе бірінші жолға мүмкін мәндері, екінші жолға олардың сәйкес ықтималдықтары жазылады:

X	x_1	x_2	...	x_n
P	P_1	P_2	...	P_n

Нормалдау шарты: $$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$.

Дискретті кездейсоқ шаманың математикалық күтімі.

Анықтама: X кездейсоқ шамасының қабылдай алатын барлық мүмкін мәндерімен оның сәйкес ықтималдықтарының көбейтінділерінің қосындысы дискретті **кездейсоқ шаманың математикалық күтімі** деп аталады.

Айталық, X кездейсоқ шамасы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ мәндерін қабылдай алатын болсын, олардың сәйкес ықтималдықтары $p_1, p_2, \ldots, p_n$ тең болсын. Онда X кездейсоқ шамасының математикалық күтімі былай анықталады:

$M(x)=x_1p_1+x_2p_2+\ldots+x_np_n$.

Егер X дискретті кездейсоқ шамасы санаулы жиынның мүмкін мәндерін қабылдаса, онда

$$M(x)=\sum_{i=1}^{n} x_i\, ð_i$$

Математикалық күтімнің қасиеттері

1. Тұрақты шаманың математикалық күтімі өзіне тең, яғни С тұрақты болса: М(С)=С.
2. Тұрақты көбейткішті математикалық күтімнің алдына шығаруға болады:

$$M(CX)=CM(X).$$

3. Егер кездейсоқ шамалар тәуелсіз болса, онда көбейтіндінің математикалық күтімі көбейткіштердің математикалық күтімдерінің көбейтіндісіне тең:

$$M(XY)=M(X)\cdot M(Y)$$

4. Екі кездейсоқ шаманың қосындысының математикалық күтімі, қосылғаштардың математикалық күтімдерінің қосындысына тең:

$$M(X+У)=M(X)+M(У).$$

Кездейсоқ шаманың оның математикалық күтімінен ауытқуы

X-кездейсоқ шама және M(X)- оның математикалық күтімі болсын. Жаңа кездейсоқ шама ретінде X-M(X) айырымын қарастырамыз.

Анықтама: Кездейсоқ шама мен оның математикалық күтімінің айырымы ***ауытқу*** деп аталады.

Ауытқу мынадай таралу заңымен беріледі:

X-M(X)	X_1-M(X)	X_2-M(X)	...	X_n-M(X)
P	P_1	P_2	...	P_n

Теорема: Ауытқудың математикалық күтімі 0-ге тең:

$$M\left[X - M(x)\right] = 0$$

Анықтама: ***Дискретті кездейсоқ шаманың дисперсиясы (шашылуы) деп*** кездейсоқ шаманың математикалық күтімінен ауытқуының квадратының математикалық күтімін айтамыз

$$D(x) = M\left[X - M(x)\right]^2$$

<u>Теорема:</u> Дисперсия X кездейсоқ шамасының квадратының математикалық күтімі мен математикалық күтімнің квадратының айырымына тең:

$$D(x) = M(x^2) - \left[M(x)\right]^2$$

Дисперсияның қасиеттері

1. С тұрақты шамасының дисперсиясы 0-ге тең: D(C)=0.
2. Тұрақты көбейткішті дисперсия таңбасының алдына квадраттап шығаруға болады

$$D(C\tilde{o}) = \tilde{N}^2 D(\tilde{o})$$

3. Егер кездейсоқ шамалар тәуелсіз болса, онда қосындының (айырманың) дисперсиясы дисперсиялардың қосындысына тең:

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$$

Орта квадраттық ауытқу

Кездейсоқ шаманың орта мәнінің маңайындағы мүмкін болатын мәндердің шашылуын бағалау үшін сипаттамалар да қарастырылады. Оған орта квадраттық ауытқу жатады.

Анықтама: Х кездейсоқ шамасының ***орта квадраттық ауытқуы*** деп дисперсияның квадрат түбірін айтамыз:

$$\sigma(x) = \sqrt{D(x)}$$

Таралу функциясы

Х кездейсоқ шамасының сан осінде х-тің сол жағында жататын мәндерді қабылдайтын ықтималдықты анықтайтын функциясын таралу функциясы деп атайды, яғни $$F(x) = p(X\langle x)$$

Кейде "Таралу функциясы"(терминінің) орнына "Интегралдық функция" деген термин де қолданылады.

Таралу функциясының қасиеттері

Таралу функциясының мәндері [0; 1] аралығында жатады;

F(x)-кемімейтін функция, егер $x_2 > x_1$ болса, онда , теңсіздігі орындалады.

Салдар 1: Х кездейсоқ шамасы *(а,в)* аралығында жататын мәндерді қабылдау ықтималдығы таралу функциясының осы аралықтағы өсімшесіне тең, яғни

Салдар 2: Үздіксіз Х кездейсоқ шамасының анықталған бір ғана мәнге ие болу ықтималдығы 0-ге тең.

Салдар 3: Егер кездейсоқ шаманың мүмкін мәндері *(а; в)* аралығында жатса, онда

1) $F(x)=0$, егер $x \leq a$

2) $F(x)=1,$ егер $x \geq b$

Келесі шектік қатынастар орындалады

$$\lim_{x\to-\infty} F(x)=0 \qquad \lim_{x\to\infty} F(x)=1$$

Таралу функциясының графигі

Таралу функциясының графигі *y=0, y=1(*1-ші қасиеті*)* түзүлерімен шектелген жолақта орналасқан. X (a; b) интервалында өскенде, кездейсоқ шаманың барлық мүмкін мәндерінің графигі ‘’жоғары көтеріледі’’.

Егер $x \le a$ болса, графиктің ординатасы 0-ге тең;

Егер $x \ge b$ болса, графиктің ординатасы 1-ге тең.

Биномиалдық таралу

n тәуелсіз сынақ жүргізілсін, әрбір сынақ нәтижесінде А оқиғасы пайда болуы мүмкін немесе пайда болмауы мүмкін. Әрбір тәжірбиеде оқиғаның пайда болу ықтималдығы тұрақты және р-ға тең (сәйкесінше оқиғаның пайда болмау ықтималдығы q=1-p) .
Х дискретті кездейсоқ шамасын А оқиғасының осы жүргізілген сынақтағы саны деп қарастыралық.

Х шамасының таралу заңын табайық.
А оқиғасы пайда болмауы мүмкін немесе 1 рет, 2 рет,..., немесе *n* рет пайда болуы мүмкін. Яғни х-тің мүмкін мәндері мынандай: $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$,..., $x_{n+1}=n$. Осы мүмкін мәндерінің сәйкес ықтималдықтарын табу үшін Бернулли формуласын қолданамыз:

$$P_n(k) = C^k{}_n p^k q^{n-k} \qquad (*)$$

мұнда к=0, 1, 2,..., n.

Биномиалдық заңды кесте түрінде жазамыз:

X	n	$n-1$	...	k	...	0
P	P^n	$C^{n-1}_n p^{n-1} q$	...	$C^k_n p^k q^{n-k}$	...	q^n

Пуассон таралуы:

Егер n тым үлкен болса, онда Лапластың асимптоталық формуласы қолданылады. Егер оқиға ықтималдығы ($p \leq 0.1$) болса, онда Бернулли формуласы жарамсыз. Осы жағдайларда (n тым үлкен, р аз) Пуассонның асимптоталық формуласы қолданылады.

Мынандай есеп қоямыз: оқиға ықтималдығы өте аз, сынақтың саны өте үлкен болған жағдайда оқиғаның к рет пайда болу ықтималдығын табу керек.

np көбейтіндісі тұрақты шама деп қарастырамыз, яғни $np=\lambda$.

Әртүрлі сынақта оқиғаның пайда болу ықтималдығы, n-нің әртүрлі мәндерінде өзгеріссіз қалады. Осылайша

$$P_n(k) = \lambda^k e^{-\lambda} \big/ k!$$

Бұл формула (n *үлкен*) және (p аз) сирек оқиғалар үшін Пуассонның таралу заңы деп аталады.

Қалыпты таралу заңы

Таралуы қалыпты таралу деп аталады, үздіксіз кездейсоқ шаманың таралу тығыздығы

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{{-(x-a)^2}/{2\sigma}}$$

формуласымен сипатталсын.

Қалыпты таралу 2 параметр бойынша анықталады: a және σ. Қалыпты таралуды беру үшін осы параметрлерді білу жеткілікті.

Бұл параметрлер:

a - математикалық күтім, σ- қалыпты таралудың орта квадраттық ауытқуы.

Қалыпты таралудың математикалық күтімі а- параметріне тең:

$$M(X)=a$$

Үздіксіз кездейсоқ шаманың ықтималдықтарының таралу тығыздығы

Анықтама: Х кездейсоқ шамасының таралу функциясы F(x)-тің туындысы бар болса, онда F(x) туындысын Х шамасының ықтималдықтар таралу тығыздығы деп атайды және оны былай белгілейді: $f(x) = F'(x)$

Таралу тығыздығы үшін таралу функциясы алғашқы функция болып табылады.

Теорема: Х кездейсоқ шамасының *(а,в)* интервалындағы мәнге ие болу ықтималдығы шектері *а*-дан *в*-ға дейінгі алынған таралу тығыздығының анықталған интегралына тең:

$$P(a < x < b) = \int_a^b f(x)dx$$

Үздіксіз кездейсоқ шамалардың сандық сипаттамалары

X үздіксіз кездейсоқ шамасы *f(x)* таралу тығыздығымен берілсін.

Мүмкін мәндері [*a,в*] кесіндісінде жататын X үздіксіз кездейсоқ шамасының математикалық күтімі деп:

$$M(x) = \int_a^b xf(x)dx$$

анықталған интегралды айтамыз.

Барлық мүмкін мәндері Ох осінде жатса, онда

$$M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

Анықтама: Үздіксіз кездейсоқ шаманың дисперсиясы оның ауытқуының квадратының математикалық күтіміне тең:

$$D(x) = \int_a^b \left[x - M(x)\right]^2 f(x)dx$$

немесе

$$D(x) = \int_a^b x^2 f(x)dx - \left[M(x)\right]^2.$$

Егер X-тің қабылдайтын мүмкін мәндері X осінің бойында жатса, онда

$$D(x) = \int_{-x}^{x} \left[x - M(x)\right]^2 f(x)dx.$$

тең болады.

Үздіксіз кездейсоқ шамасының орта квадраттық ауытқуы дискретті кездейсоқ шаманың орта квадраттық ауытқуы сияқты анықталады,

$$\sigma(x) = \sqrt{D(x)}$$

Қалыпты кездейсоқ шаманың берілген аралыққа түсу ықтималдығы

Егер Х кездейсоқ шамасы $f(x)$ таралу тығыздығымен берілсе, онда Х-тің (α,β) аралығында жататын барлық мәндерді қабылдау ықтималдығы:

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

Х кездейсоқ шамасы қалыпты таралу заңы бойынша берілсін. Х-тің онда (α,β) аралығында жататын мәндерді қабылдау ықтималдығы мынаған тең:

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{\beta}^{\alpha} e^{-(x-a)^2 / (2\sigma)^2} dx$$

Лаплас функциясын енгізсек $\Phi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{x} e^{-x^2/2} dz$

нәтижесінде $P(\alpha < X < \beta) = \Phi(\frac{\beta - a}{\sigma}) - \Phi(\frac{\alpha - a}{\sigma})$

Негізгі әдебиеттер:

- Сағынтаев С.С., Сағынтаева С.А. Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика элементтері. Қарағанды, 1999.
- Бектаев К. Ықтималдықтар теориясы мен математикалық статистикаң. Алматы. «Рауан». 1991.
- Морозов В.Ю. Основы высшей математики и статистики. Москва. Медицина. 2001.
- Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М., «Высшая школа», 2001.
- Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистики. М., "Высшая школа", 2001.
- Ремизов А.Н., Исакова Н.Х. Сборник задач по медицинской и биологической физике. Москва. "Высшая школа" 1987

Қосымша әдебиеттер:

- Қазешов А.Қ. және т.б. Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика бойынша есептер шығару. –Алматы, 1996.

НАЗАРЛАРЫҢЫЗҒА РАХМЕТ