Алгоритм Евклида. Линейные диофантовы уравнения с двумя неизвестными

1. Целые числа. Делимость с остатком

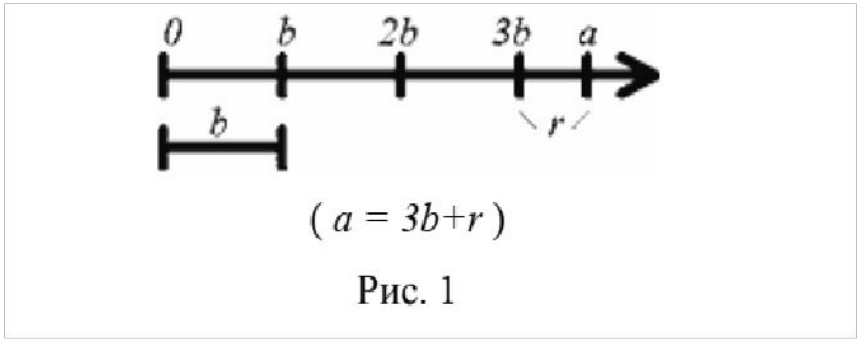
Элементарная теория чисел имеет дело с натуральными числами 1, 2, 3, ... (множество натуральных чисел обозначается символом $\mathbb{N}$) и целыми числами ... , -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... (множество целых чисел обозначается символом $\mathbb{Z}$).

Определение. Пусть $a,b \in \mathbb{Z}$. Число a делится на число b, если найдется такое число $q \in \mathbb{Z}$, что $a = qb$. Синонимы: a кратно b, b - делитель a. Запись: $a \vdots b$ или $b \mid a$.

Пусть $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = c_1 + c_2 + \ldots c_k$ - равенство сумм целых чисел. Если все слагаемые в этом равенстве, кроме одного, кратны b, то и оставшееся слагаемое обязано быть кратным b.

Теорема. Для данного целого отличного от нуля числа b, всякое целое число a единственным образом представимо в виде $a = bq + r$, где $0 \le r < |b|$.

Доказательство. Ясно, что одно представление числа a равенством $a = bq + r$ мы получим, если возьмем bq равным наибольшему кратному числа b, не превосходящему a (см. Рис. 1).



($a = 3b+r$)

Рис. 1

Тогда, очевидно, $0 \le r < |b|$. Докажем единственность такого представления. Пусть $a = bq + r$ и $a = bq_1 + r_1$ - два таких представления. Значит, $0 = a - a = b(q - q_1) + (r - r_1)$. Здесь 0 делится на b; $b(q - q_1)$ делится на b, следовательно, $(r - r_1)$ обязано делиться на b. Так как $0 \le r < |b|$ и $0 \le r_1 < |b|$, то $r - r_1 < b$ и $r - r_1$ делится на b, значит, $r - r_1$ равно нулю, а, значит, и $q - q_1$ равно нулю, т.е. два таких представления совпадают. ■

2. Наибольший общий делитель

Определение. Число $d \in \mathbb{Z}$, делящее одновременно числа $a, b, c, \ldots, k \in \mathbb{Z}$, называется общим делителем этих чисел. Наибольшее d с таким свойством называется наибольшим общим делителем. Обозначение: $d = (a, b, c, \ldots, k)$.

Теорема (Свойство 1). Если $(a,b)=d$, то найдутся такие целые числа u и v, что $d=au+bv$.

Доказательство. Рассмотрим множество $\mathrm{P}=\{au+bv \mid u,v\in\mathbb{Z}\}$. Очевидно, что $\mathrm{P}\subseteq\mathbb{Z}$, а (можно проверить, что P - идеал в $\mathbb{Z}$). Очевидно, что $a,b,0\in\mathrm{P}$. Пусть $x,y\in\mathrm{P}$ и $y\neq 0$. Тогда остаток от деления x на y принадлежит P. Действительно:

$$x=yq+r,0\le r<y,$$

$$r=x-yq=(au_1+bv_1)-(au_2+bv_2)q=a(u_1-u_2q)+b(v_1-v_2q)\in\mathrm{P}.$$

Пусть $d\in\mathrm{P}$ - наименьшее положительное число из P. Тогда a делится на d. В самом деле, $a=dq+r_1,0\le r_1<d,a\in\mathrm{P},d\in\mathrm{P}$, значит, $r_1\in\mathrm{P}$, следовательно, $r_1=0$. Аналогичными рассуждениями получается, что b делится на d, значит, d - общий делитель a на b.

Далее, раз $d\in\mathrm{P}$, то $d=au_0+bv_0$. Если теперь d_1 - общий делитель a и b, то $d_1\mid(au_0+bv_0)$, т.е. $d_1\mid d$. Значит, $d\ge d_1$ и d - наибольший общий делитель. ■

Теорема (свойство 2). Для любых целых чисел a и k, справедливо: $(a,ka)=a$; $(1,a)=1$.

Теорема (свойство 3). Если $a=bq+c$, то совокупность общих делителей a и b совпадает с совокупностью общих делителей b и c, в частности, $(a,b)=(b,c)$.

Доказательство. Пусть $d\mid a$, $d\mid b$, тогда $d\mid c$. Пусть $d\mid c$, $d\mid b$, тогда $d\mid a$.■

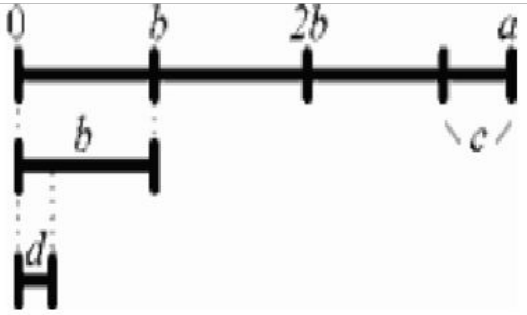


Рис. 2

Если d целое число раз укладывается в a на b, то, очевидно, что d обязано целое число раз уложиться и в c.

Теорема (свойство 4). Пусть a,b и m - произвольные целые числа. Тогда $(am,bm)=m(a,b)$.

Доказательство. Если d - наибольший общий делитель чисел a и b, $dm \mid am$ и $dm \mid bm$, т.е. dm - делитель am и bm. Покажем, что dm - наибольший общий делитель этих чисел. Поскольку d - наибольший общий делитель чисел a и b, то согласно свойству 1, для некоторых целых чисел u и v выполнено равенство $d=au+bv$. Умножив это равенство на m, получим равенство: $dm=amu+bmv$.

Видно, что если некоторое число s делит одновременно am и bm, то s обязано делить и dm, т.е. $s \le dm$, следовательно, dm - наибольший общий делитель. ■

Теорема (свойство 5). Пусть s - делитель a и b. Тогда: $\left(\frac{a}{s},\frac{b}{s}\right)=\frac{(a,b)}{s}$.

Теорема (свойство 6). Если $(a,b)=1$, то $(ac,b)=(c,b)$.

Доказательство. Пусть $(c,b)=d$. Имеем: $d\,|\,b$, $d\,|\,c$, следовательно, $d\,|\,ac$, т.е. d - делитель ac и b. Пусть теперь $(ac,b)=s$. Имеем: $s\,|\,b$, $s\,|\,ac$, s - делитель b, т.е. либо $s=1$, либо s не делит a. Это означает, что $s\,|\,c$, значит $s\,|\,d$. Итак, d и s делятся друг на друга, т.е. $d=s$. ■

3. Взаимно простые числа

Определение. Целые числа a и b называются взаимно простыми, если $(a,b)=1$.

Вспоминая свойство 1 из предыдущего пункта, можно заметить, что два числа a и b являются взаимно простыми тогда и только тогда, когда найдутся целые числа u и v такие, что $au+bv=1$.

4. Алгоритм Евклида

Алгоритмом Евклида мы называем совокупность последовательных действий, позволяющих найти наибольший общий делитель двух натуральных чисел.

Теорема 7. Если $a = bq + c$, то $(a,b) = (b,c)$.

Для отыскания (a,b) при $a > b$ применяется алгоритм Евклида, основанный на теореме 7.

Алгоритм Евклида состоит в получении равенств вида:

$$
\begin{array}{ll}
a = bq_0 + r_1 & 0 < r_1 < b \\
b = r_1 q_1 + r_2 & 0 < r_2 < r_1 \\
r = r_2 q_2 + r_3 & 0 < r_3 < r_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
r_{n-2} = r_{n-1} q_{n-1} + r_n & 0 < r_n < r_{n-1} \\
r_{n-1} = r_n q_n &
\end{array}
$$

Тогда $(a,b) = r_n$ - последнему не равному нулю остатку алгоритма Евклида.

Пример 1. Найти с помощью алгоритма Евклида (2004, 1941).

Решение. $2004 = 1941 \cdot 1 + 63$

$1941 = 63 \cdot 30 + 51$

$53 = 51 \cdot 1 + 12$

$51 = 12 \cdot 4 + 3$

$12 = 3 \cdot 4$

Итак, $(2004, 1941) = 3$.

Пример 2. Найти с помощью алгоритма Евклида (525, 231).

Решение. Ниже приводится запись деления уголком, и каждый раз то, что было в уголке, т.е. делитель, приписывается к остатку от деления с левой стороны, а остаток, как новый делитель, берется в уголок:

Запись того же самого в виде цепочки равенств:

$$525 = 231 \cdot 2 + 63$$
$$231 = 63 \cdot 3 + 42$$
$$63 = 42 \cdot 1 + 21$$
$$42 = 21 \cdot 2$$

Таким образом, (525, 231) = 21. Линейное представление наибольшего общего делителя:

$$21 = 63 - 42 \cdot 1 = 63 - (231 - 63 \cdot 3) \cdot 1 =$$
$$= 525 - 231 \cdot 2 - (231 - (525 - 231 \cdot 2) \cdot 3) =$$
$$= 525 \cdot 4 - 231 \cdot 9,$$

следовательно, $u = 4$ и $v = -9$.

4. Линейные диофантовы уравнения с двумя неизвестными

Диофантовыми называются уравнения вида

$$ax + by = c,$$

где a, b, c – целые числа. При этом решения ищутся в целых числах.

Пусть требуется решить линейное диофантово уравнение:

$$ax + by = c,$$

где $a, b, c \in \mathbb{Z}$; a и b - не нули.

Пусть $(a, b) = d$. Тогда $a = a_1 d$; $b = b_1 d$ и уравнение выглядит так:

$$a_1 d \cdot x + b_1 d \cdot y = c, \text{ т.е. } d(a_1 x + b_1 y) = c.$$

Ясно, у такого уравнения решение существует только тогда, когда $d \mid c$. Пусть d делит c. Поделим обе части уравнения на d и всюду далее будем считать $(a, b) = 1$.

Случай 1. Пусть $c = 0$, уравнение имеет вид $ax + by = 0$ - «однородное диофантово уравнение». Далее, получаем $x = -\frac{b}{a}y$.

Так как x должен быть целым числом, то $y = at$, где t - произвольное целое число (параметр). Значит $x = -bt$ и решениями однородного диофантова уравнения $ax + by = 0$ являются все пары вида $\{-bt, at\}$, где $t = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$ Множество всех таких пар называется общим решением однородного диофантова уравнения, любая же конкретная пара из этого множества называется частным решением.

Случай 2. Пусть $c \neq 0$. Этот случай закрывается следующей теоремой.

Теорема. Пусть $(a,b)=1$, $\{x_0, y_0\}$ - частное решение диофантова уравнения $ax+by=c$. Тогда его общее решение задается формулами:

$$\begin{cases} x = x_0 - bt \\ y = y_0 + at. \end{cases}$$

Доказательство. То, что правые части указанных в формулировке теоремы равенств действительно являются решениями, проверяется их непосредственной подстановкой в исходное уравнение. Покажем, что любое решение уравнения $ax+by=c$ имеет именно такой вид, какой указан в формулировке теоремы. Пусть $\{x^*, y^*\}$ - какое-нибудь решение уравнения $ax+by=c$. Тогда $ax^*+by^*=c$, но ведь и $ax_0+by_0=c$. Вычтем из первого равенства второе и получим:

$$a(x^*-x_0)+b(y^*-y_0)=0$$

- однородное уравнение. Далее, воспользуемся случаем 1, пишем сразу общее решение: $x^*-x_0=-bt$, $y^*-y_0=at$, откуда получаем:

$$\begin{cases} x^* = x_0 - bt \\ y^* = y_0 + at. \end{cases}$$

Пример 3. Решить в целых числах уравнение $7x+12y=43$.

Решение. Воспользуемся алгоритмом Евклида:

$$12 = 7 \cdot 1 + 5$$
$$7 = 5 \cdot 1 + 2$$
$$5 = 2 \cdot 2 + 1$$
$$2 = 1 \cdot 2$$

Значит, наибольший общий делитель 7 и 12 равен 1, а его линейное выражение следующее:

$$1 = 5 - 2 \cdot 2 = 5 - (7 - 5) \cdot 2 = (12 - 7) - (7 - (12 - 7) \cdot 2) = 12 \cdot 3 + 7 \cdot (-5),$$

т.е. $u=-5$, $v=3$. Частное решение:

$$x_0 = uc = -5 \cdot 43 = -215$$
$$y_0 = vc = 3 \cdot 43 = 129.$$

Общее решение диофантового уравнения:

$$x = -215 - 12t$$
$$y = 129 + 7t.$$

легко видеть, что при $t=-18$, получаются $x=1$, $y=3$.