РАНХиГС
РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА И ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ ПРИ ПРЕЗИДЕНТЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ИГСУ
РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА И ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ ПРИ ПРЕЗИДЕНТЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Основы математического анализа

Зарубежное регионоведение

1 курс

Сафонова Татьяна Евгеньевна, к.ф.-м.н., доцент

РАНХиГС
Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации

Литературв

- Дискретная математика.Курс лекций / И.А. Палий. М.: Эксмо, 2008.
- Дискретная математика. Курс лекций и практических занятий/ С.Д. Шапорев. СПб.:БХВ-Петербург, 2007.
- Учебно-методическое пособие по математике. Математическая логика. Дискретная математика. Линейная алгебра / Под ред. А.Н. Данчула. М.: Изд-во РАГС, 2004.
- Кремер Н.Ш. Высшая математика для бакалавриата экономических специальностей. М.: Юрайт, 2014.

РАНХиГС
РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА
И ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ
ПРИ ПРЕЗИДЕНТЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Элементы линейной алгебры

Алгебра матриц

Матрица

- ***Матрица А размера m×n*** *– таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов.*
- $\boldsymbol{A_{mn}}$

- *Элемент матрицы А, находящийся в i-ой строке и j-ом столбце –* $\boldsymbol{a_{ij}}$.
- $A_{m\,n}=[a_{ij}]_{m\,n}$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Матрица, в которой имеется только одна строка, – **вектор-строка**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

- Матрица, в которой есть только один столбец, – **вектор-столбец**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

Квадратная матрица

- Матрица, в которой число строк равно числу столбцов, – **квадратная матрица n-го порядка**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Диагональная матрица

- **Диагональная матрица** – квадратная матрица, у которой все элементы, не принадлежащие главной диагонали, равны нулю
- **Главня диагональ матрицы** – множество ее элементов, у которых номер строки равен номеру столбца

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Единичная матрица

- **Единичная матрица** –диагональная матрица, у которой все элементы, принадлежащие главной диагонали, равны единице

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

- **Верхней (нижней) треугольной матрицей** называется квадратная матрица произвольного порядка, все элементы которой, стоящие под (над) главной диагональю, равны нулю.
- **Нулевой матрицей** называется матрица произвольного порядка, все элементы которой равны нулю.

ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ

Транспонирование матрицы

- Результат транспонирования матрицы размера $m \times n$ – матрица размера $n \times m$, столбцы которой являются строками исходной матрицы и записаны в том же порядке.
- $B = A^T$ $\qquad [b_{ij}]_{n\,m} = [a_{ji}]_{m\,n}$

Умножение матрицы на число

- Результат умножения матрицы размера m×n на число λ – матрица того же размера, все элементы которой равны соответствующим элементам исходной матрицы, умноженным на это число.
$$\boldsymbol{B_{mn} = \lambda A_{mn}} \qquad \boldsymbol{[b_{ij}]_{mn} = [\lambda a_{ij}]_{mn}}$$

РАНХиГС
РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА И ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ ПРИ ПРЕЗИДЕНТЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Сложение матриц

- *Результат сложения двух матриц одинакового размера $m\times n$ – матрица того же размера, все элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц-слагаемых.* $\boldsymbol{C_{mn} = A_{mn} + B_{mn}}$ $\boldsymbol{[c_{ij}]_{mn} = [a_{ij} + b_{ij}]_{mn}}$

РАНХиГС
РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА И ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ ПРИ ПРЕЗИДЕНТЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Вычитание матриц

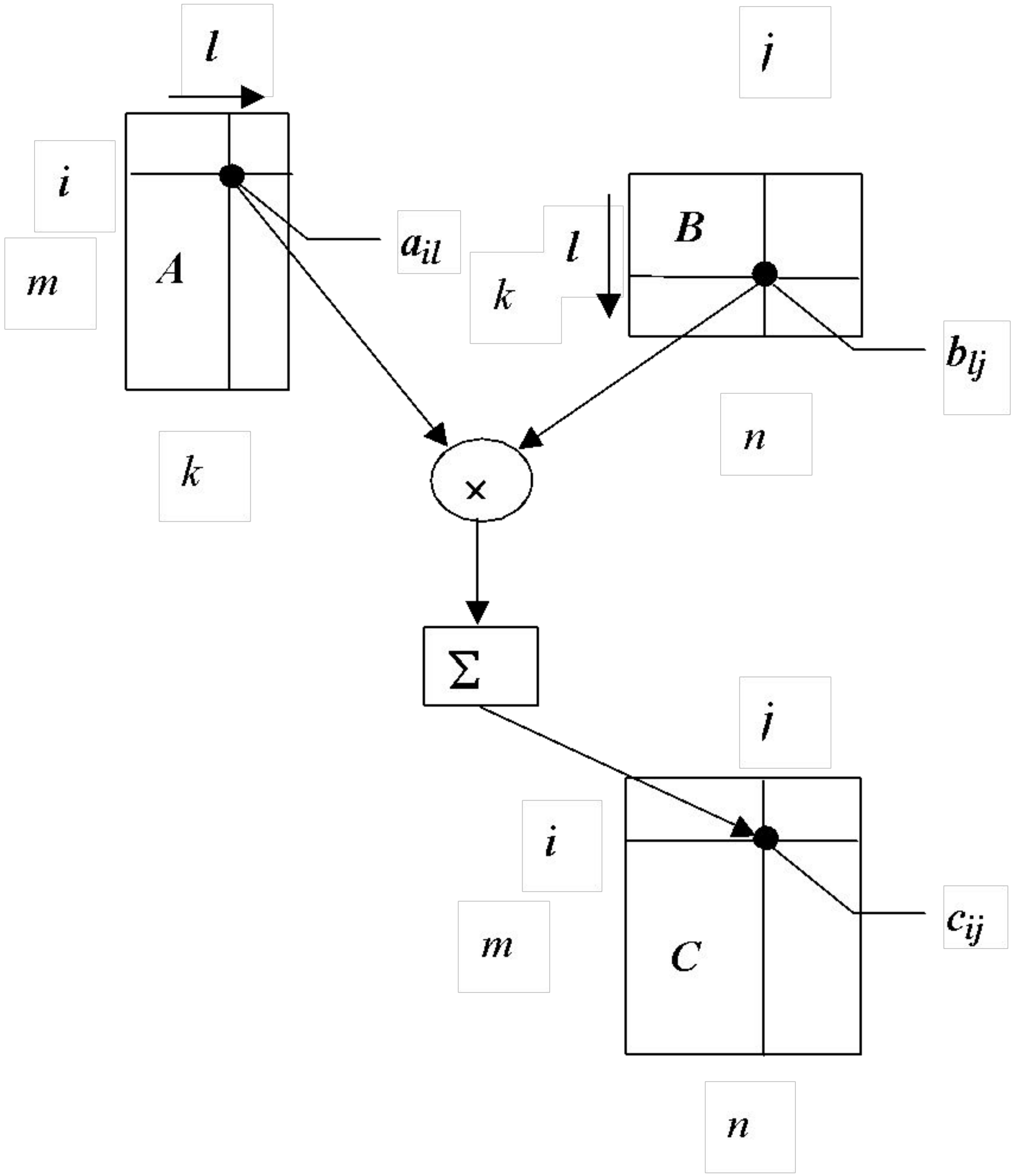
- *Результат вычитания двух матриц одинакового размера m×n – матрица того же размера, все элементы которой равны разности соответствующих элементов матриц-слагаемых.*
- $C_{mn} = A_{mn} - B_{mn}$
- $[c_{ij}]_{mn} = [a_{ij} - b_{ij}]_{mn}$

РАНХиГС
РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА И ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ ПРИ ПРЕЗИДЕНТЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Умножение матриц

- Результат умножения матрицы A размера m×k на матрицу B размера k×n – матрица C размера m×n, каждый элемент которой c_{ij} равен сумме всех попарных произведений элементов, стоящих на одинаковых местах в i-ой строке матрицы A и j-ом столбце матрицы B.
- $\boldsymbol{C_{mn} = A_{mk} B_{kn}}$

Умножение матриц



РАНХиГС
Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации

Свойства операций:

- 1. $A+B=B+A$
- 2. $(A+B)+C=A+(B+C)$
- 3. $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$
- 4. $A(B+C)=AB+AC$ $\quad (A+B)C=AC+BC$
- 5. $\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$
- 6. $A(B\,C)=(AB)C$
- 7. В общем случае $AB\neq BA$

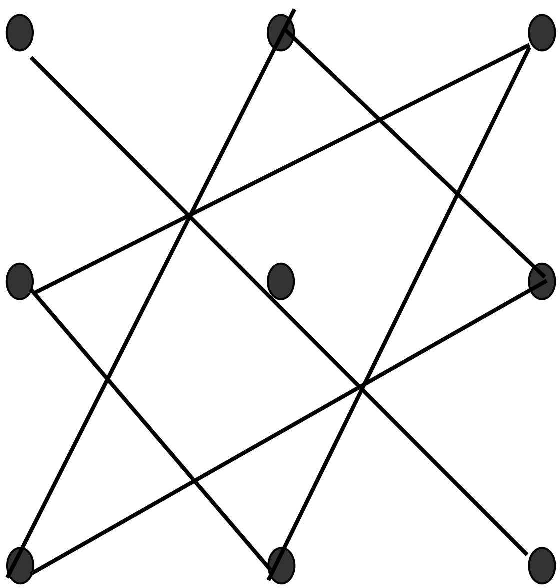
РАНХиГС
Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ КВАДРАТНЫХ МАТРИЦ

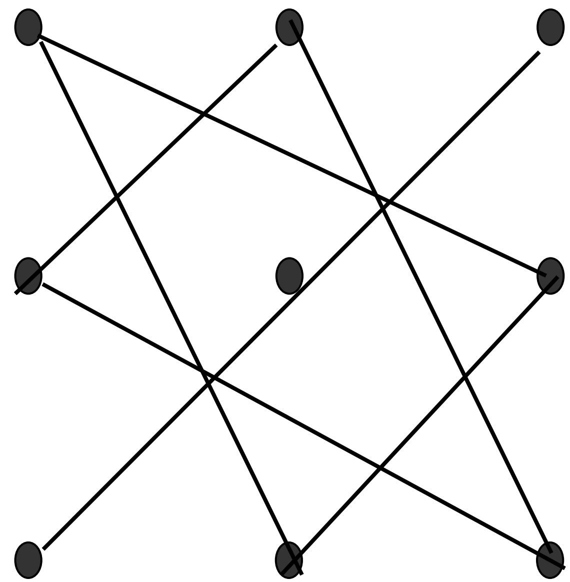
- *A* – квадратная матрица порядка *n*, ее определитель обозначается *det(A)* или $|A|$.
- Если $n = 1$, то $|A| = |a_{11}| = a_{11}$
- Если $n = 2$, то:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

n=3



+



-

- **Минор** M_{ij} элемента a_{ij} матрицы А n-го порядка – определитель матрицы (n-1)-го порядка, полученной из А вычеркиванием i–ой строки и j–го столбца.
- **Алгебраическое дополнение** A_{ij} элемента a_{ij} матрицы А n-го порядка – его минор, взятый со знаком, определяемым по правилу шахматной доски

Разложение определителя по строке (или столбцу):

$$|A| = a_{i1}\cdot A_{i1} + a_{i2}\cdot A_{i2} + \ldots + a_{in}\cdot A_{in} = \sum_{l=1}^{n} a_{il}\cdot A_{il}$$

$$|A| = a_{1j}\cdot A_{1j} + a_{2j}\cdot A_{2j} + \ldots + a_{nj}\cdot A_{nj} = \sum_{l=1}^{n} a_{lj}\cdot A_{lj}$$

РАНХиГС
РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА И ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ ПРИ ПРЕЗИДЕНТЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

- *Квадратная матрица, определитель которой равен нулю – **вырожденная**.*

РАНХиГС
РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА
И ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ
ПРИ ПРЕЗИДЕНТЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ИГСУ
РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА
И ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ
ПРИ ПРЕЗИДЕНТЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Спасибо за внимание!