АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

(учебная дисциплина)

Составители

доценты кафедры математики и моделирования ВГУЭС

Шуман Галина Ивановна

Волгина Ольга Алексеевна

ВГУЭС

Элементы аналитической геометрии на плоскости

ВГУЭС

Содержание

§ 1. Прямая на плоскости.

§ 2. Угол между двумя прямыми.

§ 3. Взаимное расположение двух прямых.

§ 4. Расстояние от точки до прямой.

§ 5. Кривые второго порядка

§ 6. Полярная система координат

ВГУЭС

§ 1. Прямая на плоскости

Линия на плоскости рассматривается (задается) как множество точек, обладающих некоторым, только им присущим геометрическим свойством.

Введение на плоскости системы координат позволяет определять положение точки плоскости заданием двух чисел - ее координат, а положение линии на плоскости определять с помощью уравнения (то есть равенства, связывающего координаты точек линии).

§ 1. Прямая на плоскости

- **Уравнением линии** (или кривой) на плоскости Oxy называется такое уравнение $F(x;y) = 0$ с двумя переменными, которому удовлетворяют координаты x и y каждой точки линии и не удовлетворяют координаты любой точки, не лежащей на этой линии.

Переменные x и y в уравнении линии называются **текущими координатами** точек линии.

§ 1. Прямая на плоскости

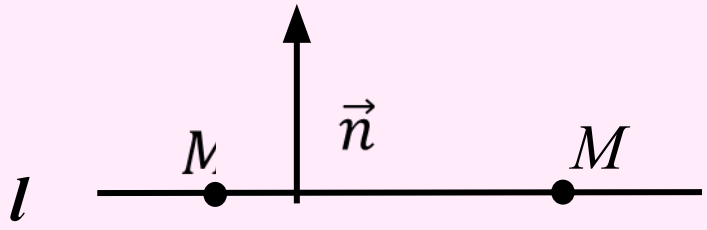
- Простейшей из линий является прямая. Разным способам задания прямой соответствуют в прямоугольной системе координат **разные виды уравнений прямой.**

Пусть $M_0(x_0;\ y_0)$ – заданная точка прямой l. Вектор $\vec{n}(A;B)$, перпендикулярный прямой l, называется **нормальным вектором** (или **нормалью**) этой прямой.

§ 1. Прямая на плоскости

- Уравнение вида $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$

Называется **уравнением прямой, проходящей через данную точку M_0 перпендикулярно данному вектору $\vec{n}$.**



ВГУЭС

§ 1. Прямая на плоскости

- Раскрыв скобки и сгруппировав слагаемые в последнем уравнении, получим

$$Ax + By + (-Ax_0 - By_0) = 0.$$ Обозначим $-Ax_0 - By_0 = C$, тогда уравнение примет вид

$$\boldsymbol{Ax + By + C = 0},$$

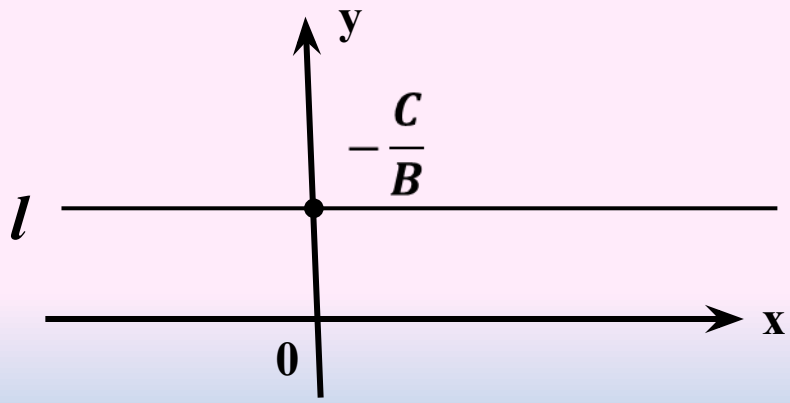
которое называется **общим уравнением прямой** на плоскости.

ВГУЭС

§ 1. Прямая на плоскости

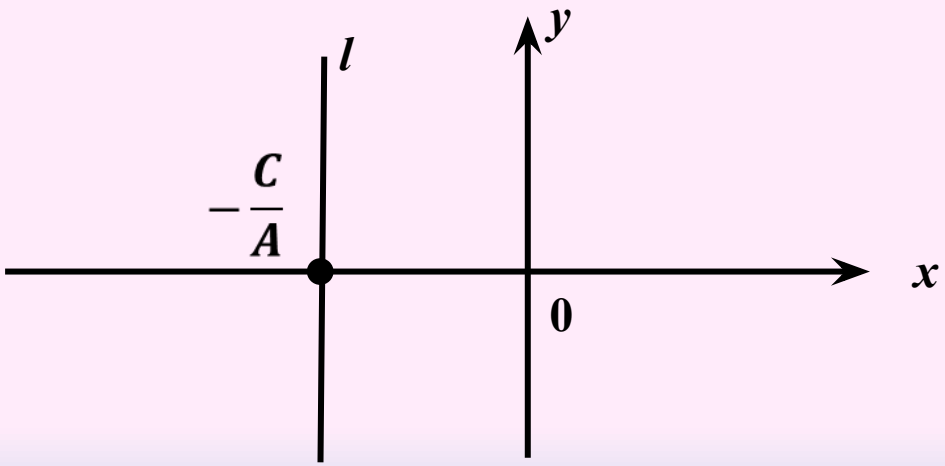
- Некоторые **частные случаи** общего уравнения прямой:

1) если $A = 0, B \neq 0, C \neq 0$, то уравнение приводится к виду $\boldsymbol{y = -\frac{C}{B}}$. Это есть уравнение прямой, параллельной оси Ox



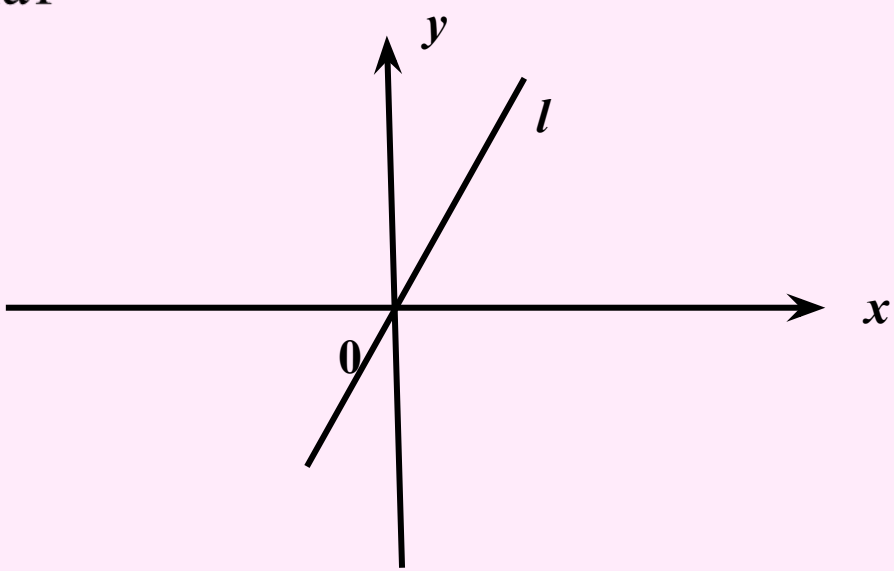
§ 1. Прямая на плоскости

2) если $A \neq 0, B = 0, C \neq 0$, то уравнение приводится к виду $x = -\frac{C}{A}$, прямая параллельна оси Oy



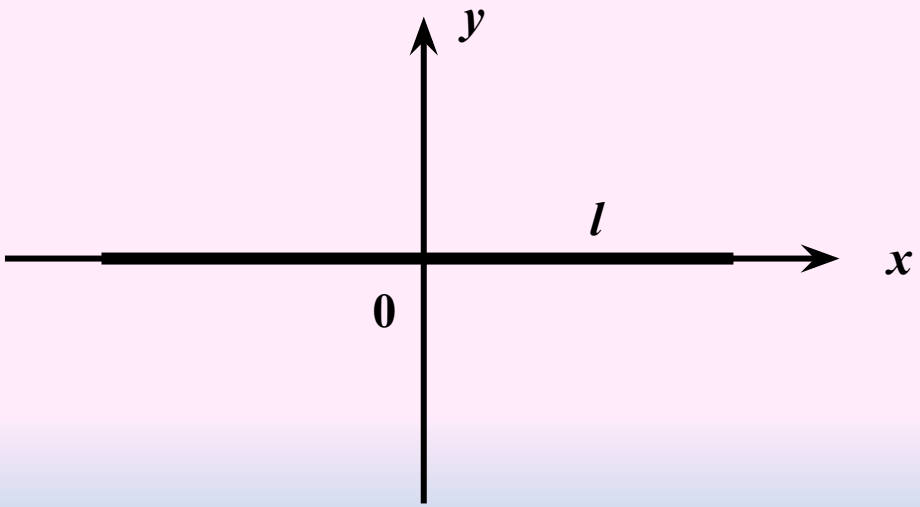
§ 1. Прямая на плоскости

3) если $A \neq 0, B \neq 0, C = 0$, то получим уравнение прямой $Ax + By = 0$, проходящей через начало координат



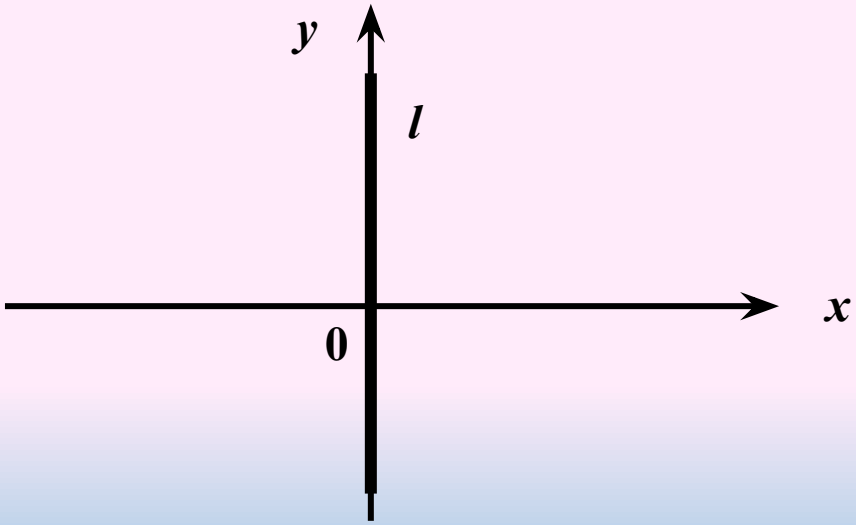
§ 1. Прямая на плоскости

4) если $A = 0, B \neq 0, C = 0$, уравнение прямой принимает вид $By = 0$ или $y = 0$, которая проходит через ось Ox



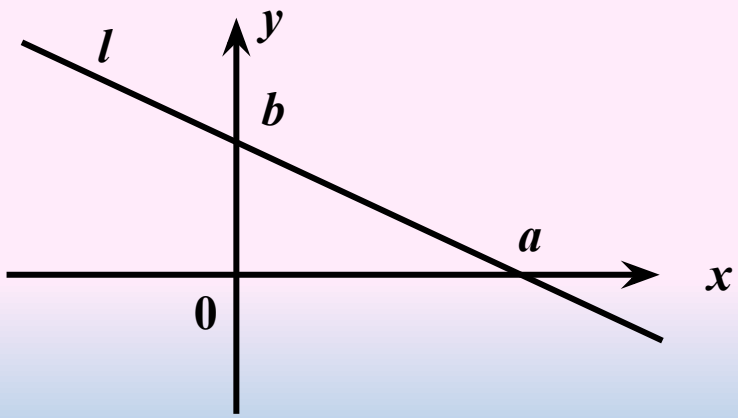
§ 1. Прямая на плоскости

5) если $A \neq 0, B = 0, C = 0$, уравнение прямой принимает вид $Ax = 0$ или $x = 0$, которая проходит через ось Oy



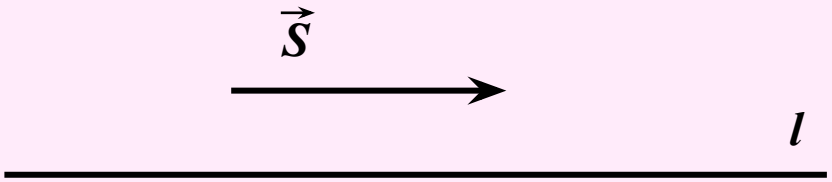
§ 1. Прямая на плоскости

- Если в общем уравнении прямой $A \neq 0$, $B \neq 0, C \neq 0$, его можно преобразовать к виду $Ax + By = -C$ или $\frac{x}{-C/A} + \frac{y}{-C/B} = 1$. Обозначив $\frac{-C}{A} = a, \frac{-C}{B} = b$, получим уравнение $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, которое называется **уравнением прямой в отрезках**



§ 1. Прямая на плоскости

- Вектор $\vec{S}(m; n)$, параллельный прямой, называется **направляющим вектором прямой.**



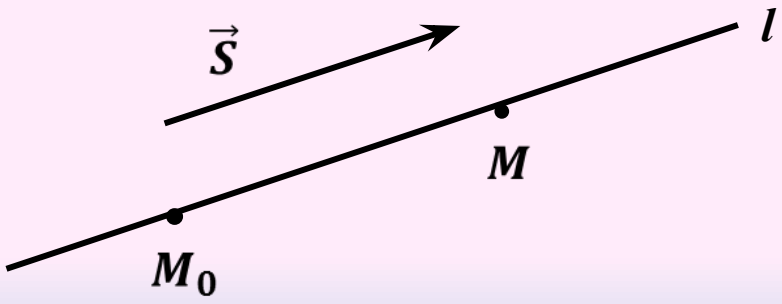
Пусть $M_0(x_0;\ y_0)$ – заданная точка на прямой,
$\vec{S}(m; n)$ – направляющий вектор этой прямой,
$M(x; y)$ – произвольная точка прямой l .

§ 1. Прямая на плоскости

- Уравнение вида

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}$$

называется **каноническим уравнением** прямой или **уравнением прямой, проходящей через данную точку, параллельно данному вектору**.



§ 1. Прямая на плоскости

- В частности, если прямая l параллельна оси Ox, то ее направляющий вектор $\vec{S}(m;0)$ и уравнение прямой примет вид

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{0} \text{ или } y=y_0.$$

Если прямая l параллельна оси Oy, то ее направляющий вектор $\vec{S}(0;n)$, уравнение прямой примет вид $\frac{x-x_0}{0}=\frac{y-y_0}{n}$ или $x=x_0$.

§ 1. Прямая на плоскости

- Если в каноническом уравнении положить $\frac{x-x_0}{m} = t, \frac{y-y_0}{n} = t$, где t – параметр, переменная величина, $t \in R$ и выразить x и y, получим уравнения $\begin{cases} x = mt + x_0, \\ y = nt + y_0, \\ t \in R \end{cases}$

которые называются **параметрическими уравнениями прямой.**

§ 1. Прямая на плоскости

- Пусть на прямой l заданы две точки $M_1(x_1;\ y_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2)$, $M(x;y)$ – текущая точка этой прямой. Тогда уравнение вида

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

называется **уравнением прямой, проходящей через две данные точки.**

§ 1. Прямая на плоскости

- Пусть $M_0(x_0;\ y_0)$ – заданная точка на прямой l, α – угол наклона прямой l к оси Ox, $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$. Обозначим $tg\alpha = k$ (k – угловой коэффициент прямой). Тогда уравнение вида

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

называется **уравнением прямой, проходящей через данную точку в заданном направлении.**

§ 1. Прямая на плоскости

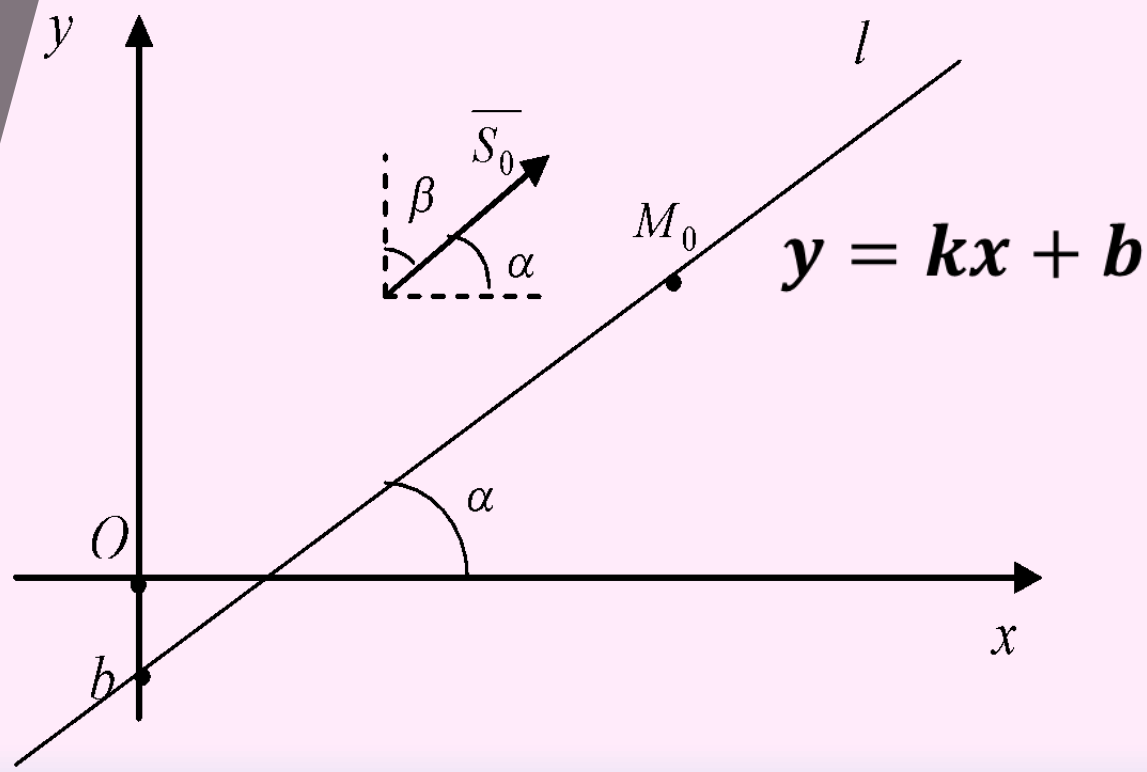
- Выразим y из последнего уравнения:

$y = kx + (y_0 - kx_0)$, обозначим $y_0 - kx_0 = b$, тогда получим уравнение

$$\boldsymbol{y_0 - kx_0 = b},$$

которое называется **уравнением прямой с угловым коэффициентом.**

§ 1. Прямая на плоскости



§ 2. Угол между двумя прямыми

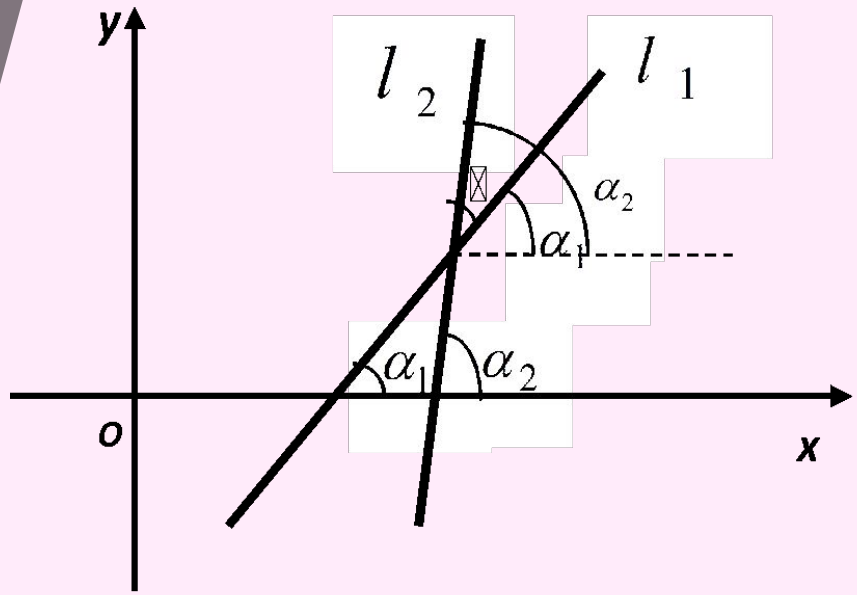
- Пусть прямые l_1 и l_2 заданы уравнениями с угловыми коэффициентами

$$y = k_1 x + b_1 \text{ и}$$

$$y = k_2 x + b_2,$$

где $k_1 = tg\alpha_1, k_2 = \alpha_2$, α_1 и α_2 - углы наклона к оси Ox l_1 и l_2 соответственно.

§ 2. Угол между двумя прямыми



§ 2. Угол между двумя прямыми

- Если $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$, то

$$tg\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 \cdot tg\alpha_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$$

Таким образом

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$$

§ 2. Угол между двумя прямыми

- Если требуется вычислить острый угол между прямыми, не учитывая, какая прямая является первой, какая - второй, то правая часть формулы берется по модулю, то есть

$$tg\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|$$

§ 2. Угол между двумя прямыми

- Пусть прямые l_1 и l_2 заданы общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, где $\overrightarrow{n_1}(A_1; B_1)$ и $\overrightarrow{n_2}(A_2; B_2)$ – нормальные векторы прямых. Тогда

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|} \text{ или } \cos\varphi = \frac{A_1\cdot A_2 + B_1\cdot B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

§ 3. Взаимное расположение двух прямых

- Если $l_1 \| l_2$, то $\varphi = 0$ и $tg\varphi = 0$. Это означает, что $k_2 - k_1 = 0$ или

$$\boldsymbol{k_2 = k_1.}$$

Таким образом, **условие параллельности двух прямых, заданных с угловыми коэффициентами, заключается в равенстве угловых коэффициентов этих прямых.**

ВГУЭС

§ 3. Взаимное расположение двух прямых

- Если $l_1 \perp l_2$, тогда $1 + k_1 k_2 = 0$ или

$\boldsymbol{k_1 = -\frac{1}{k_2}}$ $\boldsymbol{(k_2 = -\frac{1}{k_1})}$ **- условие перпендикулярности двух прямых, заданных с угловыми коэффициентами** (угловые коэффициенты двух перпендикулярных прямых обратно пропорциональны и противоположны по знаку).

§ 3. Взаимное расположение двух прямых

- Пусть прямые l_1 и l_2 заданы общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, где $\overrightarrow{n_1}(A_1; B_1)$ и $\overrightarrow{n_2}(A_2; B_2)$ – нормальные векторы прямых.

Если $l_1 \| l_2$, тогда $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$ **- условие параллельности двух прямых, заданных общими уравнениями.**

§ 3. Взаимное расположение двух прямых

- Если прямые заданы уравнениями

$A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, $l_1 \perp l_2$, тогда

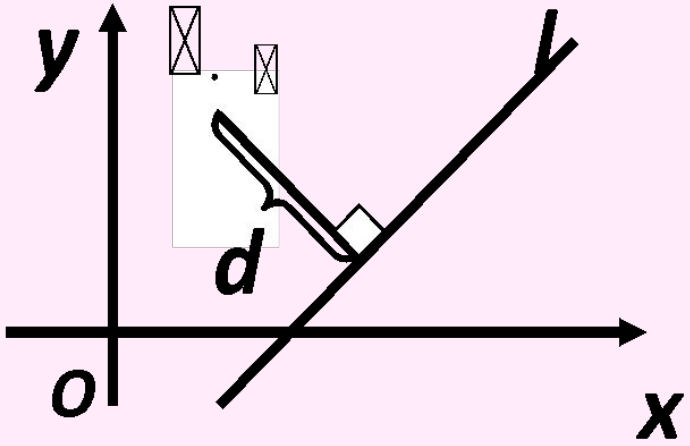
$$\boldsymbol{A_1A_2 + B_1B_2 = 0}$$ -

условие перпендикулярности двух прямых, заданных общими уравнениями.

ВГУЭС

§ 4. Расстояние от точки до прямой

- Пусть прямая l задана уравнением $Ax + By + C = 0$ и дана точка $M_0(x_0;\ y_0)$, не принадлежащая этой прямой. Обозначим через d расстояние от точки M_0 до прямой l. Тогда

$$\boldsymbol{d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}}.$$

§ 4. Расстояние от точки до прямой