Экономико-математические методы и модели

Симплексный метод

Среди универсальных методов решения задач линейного программирования наиболее распространен симплексный метод (или симплекс-метод), разработанный американским ученым Дж. Данцигом.

Суть этого метода заключается в том, что вначале получают допустимый вариант, удовлетворяющий всем ограничениям, но необязательно оптимальный (так называемое начальное опорное решение).

Оптимальность достигается последовательным улучшением исходного варианта за определенное число этапов.

Нахождение начального опорного решения и переход к следующему опорному решению проводятся на основе применения метода Жордана-Гаусса для системы линейных уравнений в канонической форме, в которой должна быть предварительно записана исходная ЗЛП.

Направление перехода от одного опорного решения к другому выбирается при этом на основе критерия оптимальности (целевой функции) исходной задачи.

СИМПЛЕКС-МЕТОД ОСНОВАН НА СЛЕДУЮЩИХ СВОЙСТВАХ ЗЛП:

1. Множество всех планов задачи линейного программирования выпукло.
2. Не существует локального экстремума, отличного от глобального. Другими словами, если максимум (минимум) есть, то он единственный.
3. Целевая функция ЗЛП достигает своего максимального (минимального) значения в угловой точке многогранника решений (в его вершине).
4. Каждой угловой точке многогранника решений отвечает опорный план ЗЛП.

СИМПЛЕКСНЫМ МЕТОДОМ

называется метод последовательного улучшения плана.

Название метода возникло от слова «симплекс», что значит «простейший» (т.е. простейший многогранник в $\boldsymbol{R^n}$, имеющий $\boldsymbol{n}$**+1** вершину).

КАНОНИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА ЗЛП

(1) $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_kx_1 + a_kx_2 + \cdots + a_kx_n = b_k \end{cases}$$

$$x_j \geq 0;\ j = 1, 2, \ldots, n$$

(2) $$L = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \to max$$

ИДЕЯ МЕТОДА:

найти вначале любую угловую точку многогранника решений, т.е. найти x_0 опорное решение системы ограничений (1) и вычислить в ней значение целевой функции $L(x_0)$, а затем перейти в новую точку x_1, но не в любую, а в такую, где $L(x_1) > L(x_0)$.

Затем улучшать это решение, пока не попадем в точку $x_{опт}$, т.е. в точку, где $L(x_{опт}) > L(x_1)$. Хотя угловых точек может оказаться много, но симплексный метод освобождает от громоздкой работы их перебора и быстро приводит к цели.

СУЩНОСТЬ МЕТОДА:

Пусть известно первое опорное решение системы ограничений, в ней выделены базисные неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_m$, а свободные члены неотрицательны, тогда система (1) имеет вид

$$\begin{cases} x_1 + a_{1m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ x_2 + a_{2m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ x_m + a_{mm+1}x_{m+1} + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

(2) $$L = L(\bar{x}_1) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$\bar{x}_0 = (b_1, b_2, \dots, b_m, 0, \dots, 0)$шение.

Чтобы перейти к новому опорному решению, надо сменить базис. Какой из векторов ввести в базис? Какой вывести? Очевидно, вводить в базис надо новый вектор так, чтобы новое значение целевой функции

$$L(\bar{x}_1) > L(\bar{x}_0)$$

$$L = L(\bar{x}_1) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \qquad (2)$$

$$L - c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n = 0 \qquad (3)$$

Умножим первое уравнение системы (1) на c_1, второе – на c_2 т.д., m-тое уравнение - на c_m и, прибавив к (3), получим

Умножим первое уравнение системы (1) на c_1, второе – на c_2 т.д., m-тое уравнение - на c_m и, прибавив к (3), получим

$$L + 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_m + \left(\sum_{i=1}^{m} c_i a_{im+1} - c_{m+1}\right) \cdot x_{m+1} + \cdots + \left(\sum_{i=1}^{m} c_i a_{in} - c_n\right) \cdot x_n = \sum_{i=1}^{m} c_i b_i = L_o,$$

$$\sum_{i=1}^{m} c_i b_i = L.$$

Обозначим, $\sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} - c_j = \Delta_j$ *+ 1, m + 2, ..., n)*

тогда кратко

$$L + \Delta_{m+1}x_{m+1} + \cdots + \Delta_n x_n = L_0$$

или

$$L = L_0 - \Delta_{m+1}x_{m+1} - \cdots - \Delta_n x_n \qquad (4)$$

Коэффициенты Δ_j называются ***оценочными коэффициентами***.

Тогда (4) определяет значение целевой функции через $\boldsymbol{L_0}$ и значения свободных неизвестных:

$$L = L_0 - \Delta_{m+1}x_{m+1} - \Delta_{m+2}x_{m+2} - \cdots - \Delta_n x_n = L_0 - \sum_{j=m+1}^{n} \Delta_j x_j$$

КАК ЗАВИСИТ L ОТ ОЦЕНОЧНОГО КОЭФФИЦИЕНТА Δ_j?

1. Если все Δ_j **> 0**, то ***L*** увеличить нельзя, найдено оптимальное решение $\boldsymbol{x_{опт}}$.

2. Если существует Δ_j **< 0**, то найденное решение можно улучшить, введя в базис $\boldsymbol{x_j}$. Заметим, что при переходе в новую угловую точку ***L*** изменяется на величину $L_0 - \Delta_j x_j$, а поэтому чем больше $|\Delta_j|$, тем сильнее увеличится ***L***, тем быстрее мы продвигаемся к max. Значит надо выбирать наибольшую по модулю отрицательную оценку.

Пусть $\overline{a_j} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ тся в базис, тогда из (1)

Получаем

$$\begin{cases} x_1 = b_1 - a_{1j}x_j \\ x_2 = 2 - a_{2j}x_j \\ \dots \\ x_m = b_m - a_{mj}x_j \end{cases} \qquad (5)$$

и помним, что теперь $\boldsymbol{x_j \neq 0}$, так как он входит в число базисных неизвестных.

КАКАЯ ИЗ БАЗИСНЫХ НЕИЗВЕСТНЫХ $x_1, x_2, \dots, x_m$ МОЖЕТ ПЕРЕЙТИ В ЧИСЛО СВОБОДНЫХ НЕИЗВЕСТНЫХ, Т.Е. ОБРАТИТСЯ В О?

1. Предположим, что все $a_{ij} < 0$, Тогда из (5) следует $x_1>0, x_2>0, \dots, x_m>0$, т.е. ни одна из координат не обратится в 0 (из базисных не выйдет). Значит к базисным векторам $a_1, a_2, \dots, a_m$ добавился ещё один вектор, но $m+1$ векторов линейно зависимы, если ранг системы $=m$, поэтому новое решение не является опорным.

2. Предположим, что существует a_{ij} < **О**; если она одна, то ясно, что $x_i = b_i - a_{ij} x_j$ выйдет из базиса и перейдет в число свободных неизвестных ($x_i = 0$), тогда следует взять

$$x_j = \left\{\frac{b_j}{a_{ij}}\right\}$$

Но если в столбце несколько положительных элементов, то при таком выборе x_j в какой-либо строке (1) может оказаться $x_j < 0$, а поэтому надо взять $a_{ij} > 0$ из той строки, для которой

$$\min_i = \left\{\frac{b_j}{a_{ij}}\right\}.$$

КРИТЕРИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ

1. Если для найденного опорного решения найдется хотя бы одна отрицательная оценка Δ_j **< 0**, причем вектор $\boldsymbol{a}_j$ имеет хотя бы одну положительную координату $\boldsymbol{a}_{ij}$ **> 0**, то решение можно улучшить. Для этого ввести в базис $\boldsymbol{x}_j$, и вывести вектор, определяемый условием

$$\min_i = \left\{\frac{b_j}{a_{ij}}\right\}.$$

2. Если существует Δ_j **< 0**, но $\boldsymbol{a}_{ij}$ **< 0**, где (i = 1, 2, ..., n.), то максимум целевой функции недостижим в области допустимых решений.
3. Если любая оценка Δ_j **≥ 0** (j = 1, 2, ..., *n),* то опорное решение оптимально.

МЕТОД СИМПЛЕКСНЫХ ТАБЛИЦ

Пусть дана ЗЛП с системой ограничений, состоящей из m линейных неравенств и n неизвестных:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases} \qquad (6)$$

$$x_i \ge 0; i = 1, \ldots, n$$

Целевая функция направлена на максимум:

$$L = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \to max \qquad (2)$$

ЗАДАЧА КАНОНИЧЕСКОЙ ФОРМЫ:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + y_1 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + y_2 = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + y_m = b_m \end{cases} \qquad (7)$$

$$x_i \geq 0; i = 1, \dots, n$$

$$y_j \geq 0; j = 1, \dots, m$$

$$L = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \to max$$

Для решения задачи целесообразно использовать метод симплекс-таблиц. СОСТАВИМ ЕЁ ТРАФАРЕТ:

Таблица 1.

$C_Б$	$X_Б$	C_j	c_1	c_2	. . .	c_n	0	0	. . .	0
		b_i	x_1	x_2	. . .	x_n	y_1	y_2	. . .	y_m
0	y_1	b_1	a_{11}	a_{12}	. . .	a_{1n}	1	0	. . .	0
0	y_2	b_2	a_{21}	a_{22}	. . .	a_{2n}	0	1	. . .	0
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
0	y_m	b_m	a_{m1}	a_{m2}	. . .	a_{nm}	0	0	. . .	1
Инд. строка		0	a_{m1}	a_{m2}	. . .	$-c_n$	0	0	. . .	0

$$\bar{x} = (x_1 = 0;\ x_2 = 0; \ldots ;\ x_n = 0;\ y_1 = b_1;\ y_2 = b_2;\ \ldots ;\ y_m = b_m;)$$

$$L_0 = 0.$$

В первом столбце таблицы ($C_б$) - коэффициенты целевой функции при базисных переменных.

Во втором столбце ($X_б$) - базисные переменные, соответствующие единичным векторам системы ограничений (7).

В третьем столбце (b_i) - свободные члены системы (7).

В первой строке - коэффициенты целевой функции при соответствующих переменных.

Далее ***m*** строк занимает матрица коэффициентов системы (7).

В индексной строке записываем оценки:

$$\sum_{i=1}^{m} c_i^{\text{Б}} a_{ij} - c_j = \Delta_j$$

Наибольшая по модулю отрицательная оценка определяет **разрешающий** столбец.

Разрешающую строку определяем минимальным отношением:

$$\min_i = \left\{\frac{b_j}{a_{ij}}\right\},\ \text{где } a_{ij} < 0.$$

План не оптимален. Переходим к новой симплекс-таблице, используя метод Жордана-Гаусса:

1. Элементы разрешающей строки в новой таблице получаются делением на разрешающий элемент.
2. Все остальные элементы новой таблицы вычисляются по формуле

$$\text{Новый элемент} = \text{Старый элемент} - \frac{\text{Элемент разрешающей строки} \times \text{Элемент разрешающего столбца}}{\text{Разрешающий элемент}}$$

Если все элементы индексной строки новой таблицы не отрицательны - план оптимален. Оптимальное значение целевой функции лежит на пересечении индексной строки и столбца $\boldsymbol{b_i}$.

Если хотя бы одна индексная оценка отрицательна -переходим к новой симплекс-таблице.

В качестве примера решим симплекс-таблицей ВЛП

$$\boldsymbol{L = 3x_1 + 4x_2 \to max}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 20 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 30 \\ 5x_1 + 5x_2 \le 60 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Приведём к каноническому виду:

$$L = 3x_1 + 4x_2 + 0(y_1 + y_2 + y_3) \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + y_1 = 20 \\ 2x_1 + 3x_2 + y_2 = 30 \\ 5x_1 + 5x_2 + y_3 = 60 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0. \end{cases}$$

Составим симплекс таблицу

Таблица 2.

$C_Б$	$X_Б$	C_j	3	4	0	0	0
		b_i	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3
0	y_1	20	2	1	1	0	0
0	y_2	30	2	3	0	1	0
0	y_3	60	5	5	0	0	1
Инд. строка		0	-3	-4	0	0	0

Разрешающему столбцу соответствует наименьшая оценка = **-4**.
Разрешающую строку найдем по минимуму отношение

$$\min\left\{\frac{20}{1};\frac{30}{3};\frac{60}{5}\right\} = 10 = \frac{b_2}{a_{22}}$$

Переходим к новой симплекс-таблице по формуле Жордана-Гаусса.

$C_Б$	$X_Б$	C_j	3	4	0	0	0
		b_i	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3
0	y_1	10	4/3	0	1	-1/3	0
0	x_2	10	2/3	1	0	1/3	0
0	y_3	10	5/3	0	0	-5/3	1
Инд. строка		**40**	**-1/3**	**0**	**0**	**4/3**	**0**

Разрешающему столбцу соответствует наименьшая оценка = **-1/3**.

Разрешающую строку найдем по минимуму отношения:

$$\min\left\{\frac{10}{4/3};\frac{10}{2/3};\frac{10}{5/3}\right\} = 6 = \frac{b_3}{a_{13}}$$

Переходим к новой симплекс-таблице по формуле Жордана-Гаусса.

Таблица 4.

$С_Б$	$Х_Б$	C_j	*3*	*4*	*0*	*0*	*0*
		b_i	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3
0	y_1	2	0	0	1	1	-4/5
0	x_2	6	0	1	0	1	-2/3
0	x_3	6	1	0	0	-1	3/5
Инд. строка		*42*	*0*	*0*	*0*	*1*	*1/5*

В индексной строке нет отрицательных оценок, т.е. все оценки неотрицательны. Полученный план оптимален.

$$\bar{x}_{\text{опт}} = (x_1 = 6;\ x_2 = 6);$$

$$L_{\text{опт}} = 42.$$