Эконометрика-1

Филатов Александр Юрьевич

(Главный научный сотрудник, доцент ШЭМ ДВФУ)

alexander.filatov@gmail.com

http://vk.com/alexander.filatov, http://vk.com/baikalreadings

Лекции 4.1-4.2

Взвешенный и обобщенный МНК. Неоднородность. Дамми-переменные

Обобщенная линейная модель множественной регрессии (ОЛММР)

Второе условие классической модели может не выполняться:

$$Y = X\Theta + \varepsilon, \quad E\varepsilon = \mathbf{0_n}, \quad \sum_{\varepsilon} = \sigma^2 \Sigma_0, \quad rank\, X = p+1 < n.$$

σ^2 – неизвестная положительная константа,

Σ_0 – известная, не обязательно единичная матрица.

σ^2 – уже не является, как в классической модели дисперсией остатков. Например, можно умножить Σ_0 на любую константу, тогда σ^2 разделится на нее.

Частные случаи:

1. Модель с гетероскедастичными остатками (например, постоянство не абсолютного, а относительного разброса остатков).
2. Модель с автокоррелированными остатками (данные регистрируются во времени, регрессионные остатки взаимосвязаны).

Обобщенный метод наименьших квадратов

МНК-оценки – состоятельные и несмещенные, но не эффективные.

Критерий ОМНК:

$$(Y - X\Theta)^T \Sigma_0^{-1} (Y - X\Theta) \to \min_{\Theta}.$$

ОМНК-оценки:

$\hat{\Theta}_{ОМНК} = \left(X^T \Sigma_0^{-1} X\right)^{-1} \left(X^T \Sigma_0^{-1} Y\right)$ – обладают всеми тремя свойствами.

Ковариационная матрица оценок параметров:

$$\Sigma_{\hat{\Theta}} = \sigma^2 \left(X^T \Sigma_0^{-1} X\right)^{-1},$$

Дисперсия остатков:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n - p - 1} \left(Y - X\hat{\Theta}_{ОМНК}\right)^T \Sigma_0^{-1} \left(Y - X\hat{\Theta}_{ОМНК}\right).$$

Проблема практической реализации ОМНК:

Матрица Σ_0 – неизвестна в подавляющем большинстве случаев. Включить ее элементы в число параметров нельзя, т.к. их число $n(n+1)/2$ превышает объем данных np. Необходимо наложить ограничения.

Модель с гетероскедастичными остатками. Взвешенный метод наименьших квадратов

1. Остатки взаимно некоррелированы: $r(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0,\ i \neq j.$
2. Остатки не обладают постоянной дисперсией: $D\varepsilon_i \neq D\varepsilon_j,\ i \neq j.$
3. По диагонали матрицы Σ_0 стоят дисперсии: $1/\lambda_i = D\varepsilon_i.$

$$\sum_0 = \begin{pmatrix} 1/\lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/\lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1/\lambda_n \end{pmatrix}$$

Критерий ВМНК:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(y_i - \theta_0 - \theta_1 x_i^{(1)} - \dots - \theta_p x_i^{(p)} \right)^2 \to \min_{\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_p}$$

– чем больше разброс, тем меньше вес.

Проверка гетероскедастичности

Для проверки типично строится регрессия абсолютной величины остатков по некоторой функции от X:

$$|\hat{\varepsilon}_i| = \left| y_i - \hat{\theta}_{0.MHK} - \hat{\theta}_{1.MHK} x_i^{(1)} - \ldots - \hat{\theta}_{p.MHK} x_i^{(p)} \right| = f\left(x_i^{(1)}, \ldots x_i^{(p)}\right)$$

Для подтверждения гетероскедастичности хотя бы один регрессор должен оказаться значимым.

Варианты:

1. $|\hat{\varepsilon}| = a_0 + a_1 \left(x^{(j)}\right)^{\gamma} = \begin{cases} a_0 + a_1 x^{(j)} \\ a_0 + a_1 / x^{(j)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$ – тест Глейсера, возможно обобщение на несколько переменных.
2. $|\hat{\varepsilon}| = a_0 \left(x^{(j)}\right)^{a_1}$ – тест Парка.
3. $\hat{\varepsilon}^2 = a_0 + a^T x + x^T A x$ – тест Уайта.

Другие тесты:

1. Тест Голдфельда-Квандта (сравниваются дисперсии остатков по двум подвыборкам – при больших и малых значениях $x^{(j)}$).
2. Тест Бартлетта (обобщение на произвольное число подвыборок).

Практическое оценивание модели с гетероскедастичными остатками

1. Проверка гипотезы о наличии гетероскедастичности.
2. Переход от исходной модели к вспомогательной модели «с волной».

$$y_i = \theta_0 x_i^{(0)} + \theta_1 x_i^{(1)} + \ldots + \theta_p x_i^{(p)} + \varepsilon_i \quad \Rightarrow \quad \tilde{y}_i = \theta_0 \tilde{x}_i^{(0)} + \theta_1 \tilde{x}_i^{(1)} + \ldots + \theta_p \tilde{x}_i^{(p)} + \tilde{\varepsilon}_i$$

$$\left|\hat{\varepsilon}_i\right| = f\left(x_i^{(1)},\ldots x_i^{(p)}\right) \quad \Rightarrow \quad \tilde{y}_i = \frac{y_i}{f\left(x_i^{(1)},\ldots x_i^{(p)}\right)},\ \tilde{x}_i^{(0)} = \frac{1}{f\left(x_i^{(1)},\ldots x_i^{(p)}\right)},\ldots,\tilde{x}_i^{(p)} = \frac{x_i^{(p)}}{f\left(x_i^{(1)},\ldots x_i^{(p)}\right)}.$$

3. Оценивание коэффициентов $\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_1,\ldots,\hat{\theta}_p$ вспомогательной модели с помощью обычного МНК, проверка значимости регрессоров.

Замечание 1:

Оценивание в Excel происходит с учетом отсутствия свободного члена, т. к. он уже включен в модель. Используем **ЛИНЕЙН(*y*; *X*; 0; 1)**.

Замечание 2:

Коэффициенты и их стандартные ошибки можно искать для вспомогательной модели, используя функцию ЛИНЕЙН. Для расчета R^2 и ошибки прогноза, нужно вернуться в исходные координаты.

Модель с автокоррелированными остатками. Обобщенный метод наименьших квадратов

Модель авторегрессии первого порядка:

1. Данные регистрируются во времени.
2. $|\rho| \in (0; 1)$ – коэффициент корреляции между соседними остатками.
3. Корреляция зависит только от разнесенности периодов во времени и ослабляется по мере ее роста: $r(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \rho^{|i-j|}$.

$$\sum_0 = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho & \dots & \rho^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \rho^{n-3} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Формализация модели:

$$\varepsilon_i = \rho\varepsilon_{i-1} + \delta_i, \quad |\rho| < 1, \quad E\delta_i \equiv 0, \quad E(\delta_i\delta_j) = \begin{cases} \sigma_0^2, i = j \\ 0, \quad i \neq j \end{cases}$$

Проверка автокорреляции. Критерий Дарбина-Уотсона

1. Выбираем уровень значимости α.
2. Находим эмпирическое значение критерия

$$d = \sum_{i=2}^{n} (\hat{\varepsilon}_i - \hat{\varepsilon}_{i-1})^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n} \hat{\varepsilon}_i^2$$

В формуле $\hat{\varepsilon}_i$ – остатки, вычисленные с помощью обычного МНК.

Если $d \approx 2$, то автокорреляции нет.

3. Вычисляем критические точки $d_l(\alpha; n) < d_u(\alpha; n)$.
4. Проверяем гипотезу о положительной/отрицательной автокорреляции.

Случай $d < 2$ (наличие положительной автокорреляции):

$d < d_l \Rightarrow$ есть положительная автокорреляция,

$d \in [d_l; d_u] \Rightarrow$ неизвестно, есть ли положительная автокорреляция,

$d > d_u \Rightarrow$ положительной автокорреляции нет.

Случай $d > 2$ (наличие отрицательной автокорреляции):

$4 - d < d_l \Rightarrow$ есть отрицательная автокорреляция,

$4 - d \in [d_l; d_u] \Rightarrow$ неизвестно, есть ли отрицательная автокорреляция,

$4 - d > d_u \Rightarrow$ отрицательной автокорреляции нет.

Практическое оценивание модели с автокоррелированными остатками

1. Проверка гипотезы о наличии автокорреляции.
2. Переход от исходной модели к вспомогательной модели «с волной».

$$y_i = \theta_0 x_i^{(0)} + \theta_1 x_i^{(1)} + \ldots + \theta_p x_i^{(p)} + \varepsilon_i \quad \Rightarrow \quad \widetilde{y}_i = \theta_0 \widetilde{x}_i^{(0)} + \theta_1 \widetilde{x}_i^{(1)} + \ldots + \theta_p \widetilde{x}_i^{(p)} + \widetilde{\varepsilon}_i$$

$$\widetilde{y}_1 = y_1\sqrt{1-\rho^2},\ \widetilde{x}_1^{(0)} = \sqrt{1-\rho^2},\ \widetilde{x}_1^{(1)} = x_1^{(1)}\sqrt{1-\rho^2},\ \ldots,\ \widetilde{x}_1^{(p)} = x_1^{(p)}\sqrt{1-\rho^2}.$$

$$\widetilde{y}_i = y_i - \rho\, y_{i-1},\ \widetilde{x}_i^{(0)} = 1-\rho,\ \widetilde{x}_i^{(1)} = x_i^{(1)} - \rho\, x_{i-1}^{(1)},\ \ldots,\ \widetilde{x}_i^{(p)} = x_i^{(p)} - \rho\, x_{i-1}^{(p)},\ i = 2,\ldots,n.$$

3. Оценивание коэффициентов $\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_p$ вспомогательной модели с помощью обычного МНК, проверка значимости регрессоров.

Замечание 1:

Оценивание в Excel происходит с учетом отсутствия свободного члена, т. к. он уже включен в модель. Используем **ЛИНЕЙН(*y*; *X*; 0; 1)**.

Замечание 2:

Коэффициенты и их стандартные ошибки можно искать для вспомогательной модели, используя функцию ЛИНЕЙН. Для расчета R^2 и ошибки прогноза, нужно вернуться в исходные координаты.

Итеративная процедура Кохрейна-Оркатта

1. Вычисляем МНК-оценки 1-итерации $\hat{\theta}_0^{(1)}, \hat{\theta}_1^{(1)}, ..., \hat{\theta}_p^{(1)}$.
2. Подсчитываем остатки 1-итерации $\varepsilon_i^{(1)} = y_i - \hat{\theta}_0^{(1)} - \hat{\theta}_1^{(1)} x_i^{(1)} - \hat{\theta}_p^{(1)} x_i^{(p)}$.
3. С помощью МНК оцениваем параметры $a_1, \ldots, a_m$ 1-итерации.
   $\left| \hat{\varepsilon}_i^{(1)} \right| = a_0 + a_1 x^{(j)} + \delta_i \quad \Rightarrow \quad \hat{a}_0^{(1)}, \hat{a}_1^{(1)},$
   $\varepsilon_i^{(1)} = \rho \varepsilon_{i-1}^{(1)} + \delta_i \quad \Rightarrow \quad \rho^{(1)}.$
4. Осуществляем переход к переменным $\tilde{y}_i, \tilde{x}_i^{(0)}, \tilde{x}_i^{(1)}, ... \tilde{x}_i^{(p)}$.
5. Вычисляем МНК-оценки 2-итерации $\hat{\theta}_0^{(2)}, \hat{\theta}_1^{(2)}, ..., \hat{\theta}_p^{(2)}$.
6. Подсчитываем остатки 2-итерации $\varepsilon_i^{(2)} = y_i - \hat{\theta}_0^{(2)} - \hat{\theta}_1^{(2)} x_i^{(1)} - \hat{\theta}_p^{(2)} x_i^{(p)}$.
7. С помощью МНК оцениваем параметры $a_1, \ldots, a_m$ 2-итерации.
   $\left| \hat{\varepsilon}_i^{(2)} \right| = a_0 + a_1 x^{(j)} + \delta_i \quad \Rightarrow \quad \hat{a}_0^{(2)}, \hat{a}_1^{(2)},$
   $\varepsilon_i^{(2)} = \rho \varepsilon_{i-1}^{(2)} + \delta_i \quad \Rightarrow \quad \rho^{(2)}.$
8. Осуществляем переход к переменным $\tilde{y}_i, \tilde{x}_i^{(0)}, \tilde{x}_i^{(1)}, ... \tilde{x}_i^{(p)}$.

. . . . . .

Точечный прогноз в моделях линейной регрессии

Наиболее распространенная задача: предсказывать y по известным X.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(0)}=1 & x_1^{(1)} & \dots & x_1^{(p)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n^{(0)}=1 & x_n^{(1)} & \dots & x_n^{(p)} \end{pmatrix}$$

– известные данные

$$\left(y_{n+1}\right)\left(x_{n+1}^{(0)}=1 \quad x_{n+1}^{(1)} \quad \dots \quad x_{n+1}^{(p)}\right)$$

неизвестное значение

Также известен характер ковариационных связей остатка ε_{n+1}:

$$\sigma_{\varepsilon}^{(n+1)} = \left(E\left(\varepsilon_1\varepsilon_{n+1}\right),\dots,E\left(\varepsilon_n\varepsilon_{n+1}\right)\right)^T, \quad E\varepsilon_{n+1}=0, \quad E\varepsilon_{n+1}^2=\Delta^2.$$

Наилучший несмещенный прогноз для y_{n+1}:

$$\hat{y}_{n+1} = X_{n+1}^T\hat{\Theta}_{OMHK} + \left(\sigma_{\varepsilon}^{(n+1)}\right)^T\Sigma_{\varepsilon}^{-1}\hat{\varepsilon}.$$

Только если остаток ε_{n+1} не коррелирует ни с каким другим (Σ_0 – диагональная матрица), прогноз совпадает со значением функции регрессии.

Для автокоррелированных остатков $\hat{y}_{n+1} = X_{n+1}^T\hat{\Theta}_{OMHK} + \rho\hat{\varepsilon}_n$.

Интервальный прогноз в моделях линейной регрессии

Для построения доверительного интервала необходима оценка точности точечного прогноза:

Классическая модель:

$$\sigma^2_{n+1} = E(\hat{y}_{n+1} - y_{n+1})^2 = \hat{\sigma}^2\left(X^T_{n+1}\left(X^T X\right)^{-1} X_{n+1} + 1\right)$$

$$y_{n+1} \in \left[\hat{y}_{n+1} - u_{(1+\gamma)/2}\,\sigma_{n+1};\quad \hat{y}_{n+1} + u_{(1+\gamma)/2}\,\sigma_{n+1}\right].$$

Частный случай парной регрессии:

$$y_{n+1} \in \left[\hat{y}_{n+1} - u_{\frac{1+\gamma}{2}}\hat{\sigma}\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{(x_{n+1}-\bar{x})^2}{\sum(x_i-\bar{x})^2}};\quad \hat{y}_{n+1} + u_{\frac{1+\gamma}{2}}\hat{\sigma}\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{(x_{n+1}-\bar{x})^2}{\sum(x_i-\bar{x})^2}}\right].$$

Обобщенная модель – отличия от классической:

1. $\sigma^2_{n+1} = \hat{\sigma}^2\left(X^T_{n+1}\left(X^T\Sigma_0^{-1}X\right)^{-1} X_{n+1} + 1\right)$
2. $\hat{\sigma}^2$ найдены на последней итерации практически реализуемого ОМНК.
3. $y_{n+1} \in \left[\hat{y}_{n+1} - t_{1-\gamma}(n-p-1)\sigma_{n+1};\quad \hat{y}_{n+1} + t_{1-\gamma}(n-p-1)\sigma_{n+1}\right]$

Неоднородность данных

Результирующий показатель y зависит не только от регрессоров X, но и от уровня сопутствующих переменных Z (как правило, не являющихся количественными).

Сезонность, часы, пол, социальная страта, регион, кризис, санкции…

Способы оценивания моделей с переменной структурой:

1. Разбиение имеющихся статистических данных на однородные порции (внутри каждой подвыборки значения переменных Z постоянны).
   Для каждой подвыборки своя функция регрессии
   $$\hat{f}\left(X, Z^{*}\right) = \hat{\theta}_0\left(Z^{*}\right) + \hat{\theta}_1\left(Z^{*}\right)x^{(1)} + \ldots + \hat{\theta}_p\left(Z^{*}\right)x^{(p)}$$
   При этом $\hat{f}\left(X, Z^{*}\right)$ и $\hat{f}\left(X, Z^{**}\right)$ могут значимо отличаться.
   Проблемы:
   1) сопутствующие переменные Z ненаблюдаемы, либо эти значения не были зарегистрированы при сборе исходных данных, прямое разбиение выборки невозможно.
   2) прямое разбиение возможно, но приводит к малым подвыборкам.
2. Метод дамми-переменных.

Метод дамми-переменных

Если категоризованная переменная $z^{(j)}$ имеет k_j градаций, вводим $(k_j - 1)$ бинарных дамми-переменных, принимающих значения 0 или 1.

Преимущества:

1. Сильно повышается статистическая надежность оценок.
2. Одновременно появляется возможность проверки гипотез о значимом влиянии сопутствующих переменных.

Уровень доходов (низкий / средний / высокий), $k_1 = 3 - 1 = 2$.

$$z_i^{(1.1)} = \begin{cases} 1, \text{ если } i\text{-наблюдение за среднедоходным домашним хозяйством,} \\ 0, \text{ иначе;} \end{cases}$$

$$z_i^{(1.2)} = \begin{cases} 1, \text{ если } i\text{-наблюдение за высокодоходным домашним хозяйством,} \\ 0, \text{ иначе;} \end{cases}$$

Сезонность (зима / весна / лето / осень), $k_2 = 4 - 1 = 3$.

$$z_i^{(2.1)} = \begin{cases} 1, \text{ если } i\text{-наблюдение осуществлено весной,} \\ 0, \text{ иначе;} \end{cases}$$

$$z_i^{(2.2)} = \begin{cases} 1, \text{ если } i\text{-наблюдение осуществлено летом,} \\ 0, \text{ иначе;} \end{cases}$$

$$z_i^{(2.3)} = \begin{cases} 1, \text{ если } i\text{-наблюдение осуществлено осенью,} \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Модификации метода. Варианты зависимостей

Пример. Продажи мороженого в зависимости от цены, сезона и принадлежности к определенному уровню богатства.

Вариант 1. Спрос зависит от сезона, происходит параллельный сдвиг, меняется свободный член прогрессии θ_0 (абсолютное потребление).

Базовый зимний спрос составляет $\hat{y} = \theta_0 + \theta_1 x$,

Весной, летом и осенью он соответственно растет на $\theta_{2.1}, \theta_{2.2}$ и $\theta_{2.3}$.

$$\hat{y} = \theta_0 + \theta_1 x + \theta_{2.1} z^{(2.1)} + \theta_{2.2} z^{(2.2)} + \theta_{2.3} z^{(2.3)}.$$

Вариант 2. При переходе из группы в группу меняется не абсолютное потребление, а отношение к цене, склонность к потреблению.

Для низкодоходной страты склонность к потреблению равна θ_1.

Для среднедоходной и высокодоходной страты она соответственно увеличивается до уровня $\theta_1 + \theta_{1.1}$ и $\theta_1 + \theta_{1.2}$.

$$\hat{y} = \theta_0 + \theta_1 x + \theta_{1.1}\left(z^{(1.1)} x\right) + \theta_{1.2}\left(z^{(1.2)} x\right) + \theta_{2.1} z^{(2.1)} + \theta_{2.2} z^{(2.2)} + \theta_{2.3} z^{(2.3)}.$$

Несколько замечаний

Замечание 1. Статистическая надежность:

Точность модели зависит от соотношения n / (p+1) – чем оно больше, тем точнее оценки.

Помесячный спрос на мороженое за 5 лет, линейный тренд + зависимость от цены, числа торговых точек и цены конкурентов + сезонность.

1. Изолированная оценка по сезонам: n / (p+1) = (12 · 5 / 4) / 5 = 3
2. Оценка по дамми-переменным: n / (p+1) = (12 · 5) / (3+5) = 7,5.

Точность выросла в 2,5 раза. При большем числе подвыборок разница еще сильнее!

Замечание 2. Проверка неоднородности:

Дамми, как и обычные переменные, можно проверять на значимость. Если ни одна из них не является значимой, неоднородности нет!

Замечание 3. Мультиколлинеарность:

При правильном использовании дамми мультиколлинеарность не возникает, даже если вводим 11 дамми для месяцев или 23 дамми для часов.

Ловушка, связанная с введением дамми-переменных

Если у переменной $z^{(j)}$ есть k градаций, то есть риск ввести k дамми.

$$z_i^{(2.4)} = \begin{cases} 1, \text{ если } i\text{-наблюдение осуществлено зимой,} \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$$

месяц	$z^{(2.1)}$	$z^{(2.2)}$	$z^{(2.3)}$	$z^{(2.4)}$
январь	0	0	0	1
февраль	0	0	0	1
март	1	0	0	0
апрель	1	0	0	0
май	1	0	0	0
июнь	0	1	0	0
июль	0	1	0	0
август	0	1	0	0
сентябрь	0	0	1	0
октябрь	0	0	1	0
ноябрь	0	0	1	0
декабрь	0	0	0	1

В данной модели присутствует линейная зависимость переменных (полная мультиколлинеарность):

$$z^{(2.1)} + z^{(2.2)} + z^{(2.3)} + z^{(2.4)} = x^{(0)} \equiv 1.$$

Матрица X^TX – вырожденная, обратной матрицы $(X^TX)^{-1}$ не существует, формулы МНК не работают.

Количество дамми-переменных должно быть на единицу меньше числа градаций соответствующей категоризованной переменной!

Численный пример на использование дамми-переменных

	y	$\tilde{x}$	I_p	x	$z^{(1)}$	$z^{(2)}$	$z^{(3)}$
весна13	1,5	22	1	22,0	1	0	0
лето13	2,6	22	1,019	21,6	0	1	0
осень13	1,7	22	1,029	21,4	0	0	1
зима13	0,9	22	1,046	21,0	0	0	0
весна14	1,4	25	1,073	23,3	1	0	0
лето14	3	25	1,095	22,8	0	1	0
осень14	2,8	22	1,114	19,7	0	0	1
зима14	1,6	22	1,202	18,3	0	0	0
весна15	1,9	25	1,25	20,0	1	0	0
лето15	3,2	25	1,266	19,7	0	1	0
осень15	2,7	25	1,287	19,4	0	0	1
зима15	2	25	1,32	18,9	0	0	0
весна16	2,2	28	1,34	20,9	1	0	0
лето16	3,4	28	1,358	20,6	0	1	0
осень16	2,6	25	1,366	18,3	0	0	1
зима16	2,1	25	1,386	18,0	0	0	0
весна17	2,9	25	1,395	17,9	1	0	0
лето17	3,3	30	1,41	21,3	0	1	0
осень17	2,5	27	1,403	19,2	0	0	1
зима17	2,2	27	1,416	19,1	0	0	0

Собраны данные по продажам мороженого (y, млн шт.) за 5 лет в зависимости от цены ($\tilde{x}$, руб.)

Индексирование:

Поскольку за 5 лет инфляция превысила 40%, необходимо все цены привести к одному уровню, разделив на индекс цен: $x = \tilde{x} / I_p$.

Исходная модель:

$$\hat{y} = \underset{(2,06)}{3,65} - \underset{(0,102)}{0,065}\, x, \quad \hat{R}^2 = 0,022.$$

Модель с дамми-переменными:

$$\hat{y} = \underset{(1,04)}{6,90} - \underset{(0,054)}{0,269}\, x + \underset{(0,216)}{0,691}\, z^{(1)} + \underset{(0,226)}{1,916}\, z^{(2)} + \underset{(0,197)}{0,847}\, z^{(3)}, \quad \hat{R}^2 = 0,844.$$

Учет эффекта взаимодействия сопутствующих факторов

До сих пор сопутствующие переменные влияли на результирующий показатель независимо, теперь рассмотрим случай их взаимодействия.

Категоризованная переменная $z^{(i)}$:

Соответствующие дамми-переменные: $z^{(i.1)}, z^{(i.2)}, \ldots, z^{(i.k_i-1)}$.

Категоризованная переменная $z^{(j)}$:

Соответствующие дамми-переменные: $z^{(j.1)}, z^{(j.2)}, \ldots, z^{(j.k_j-1)}$.

Вводим $N = (k_i - 1)(k_j - 1)$ новых дамми, образуемых всевозможными попарными произведениями $z^{(qs)} = z^{(i.q)}z^{(j.s)}$.

образование	пол	$z^{(1.1)}$	$z^{(1.2)}$	$z^{(2.1)}$	$z^{(3.1)}= z^{(1.1)}\, z^{(2.1)}$	$z^{(3.2)}= z^{(1.2)}\, z^{(2.1)}$
начальное	мужской	0	0	0	0	0
начальное	женский	0	0	1	0	0
среднее	мужской	1	0	0	0	0
среднее	женский	1	0	1	1	0
высшее	мужской	0	1	0	0	0
высшее	женский	0	1	1	0	1

$$\hat{y} = \theta_0 + \theta_1 x^{(1)} + \ldots + \theta_p x^{(p)} + \theta_{1.1} z^{(1.1)} + \theta_{1.2} z^{(1.2)} + \theta_{2.1} z^{(2.1)} + \theta_{3.1} z^{(3.1)} + \theta_{3.2} z^{(3.2)}.$$

Проверка регрессионной однородности двух групп наблюдений

Случай 1. Большая выборка B1 + большая выборка B2

Статистическая проверка $\theta_0^{(1)} = \theta_0^{(2)}, \theta_1^{(1)} = \theta_1^{(2)}, \ldots, \theta_p^{(1)} = \theta_p^{(2)}$.

Например, построить доверительные интервалы для коэффициентов из одной выборки, и проверять, входят ли в них коэффициенты из другой.

Случай 2. Большая выборка B1 + малая выборка B2. Критерий Чоу.

1. Выбираем уровень значимости α.
2. По B1 строим МНК-оценки и вычисляем невязки $\hat{\varepsilon}^{(1)} = Y^{(1)} - X^{(1)}\hat{\Theta}^{(1)}$.
3. По B2 строим МНК-оценки и вычисляем невязки $\hat{\varepsilon}^{(2)} = Y^{(2)} - X^{(2)}\hat{\Theta}^{(2)}$.
4. По B1+B2 строим МНК-оценки и вычисляем невязки $\hat{\varepsilon} = Y - X\hat{\Theta}$.
5. $$F_{\text{эмп}} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n_1+n_2}(\hat{\varepsilon}_i)^2 - \sum_{i=1}^{n_1}\left(\hat{\varepsilon}_i^{(1)}\right)^2 - \sum_{i=1}^{n_2}\left(\hat{\varepsilon}_i^{(2)}\right)^2\right) \Big/ (p+1)}{\left(\sum_{i=1}^{n_1}\left(\hat{\varepsilon}_i^{(1)}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n_2}\left(\hat{\varepsilon}_i^{(2)}\right)^2\right) \Big/ (n_1+n_2-2p-2)}.$$
6. $F_{\text{эмп}} > FРАСПОБР(\alpha; p+1; n_1+n_2-2p-2) \Rightarrow$ B1 и B2 неоднородны.

Проверка регрессионной однородности двух групп наблюдений

Случай 3. Большая выборка B1 + сверхмалая выборка B2

Вторая выборка B2 настолько мала, что по ней нельзя получить значимые оценки коэффициентов регрессии (например, при $n_2 < p+1$).

В частности, ситуация возникает при добавлении к исходной выборке B1 малой порции дополнительных данных – можно ли их объединять?

Модифицированный критерий Чоу.

1. Выбираем уровень значимости α.
2. По B1 строим МНК-оценки и вычисляем невязки $\hat{\varepsilon}^{(1)} = Y^{(1)} - X^{(1)}\hat{\Theta}^{(1)}$.
3. По B1+B2 строим МНК-оценки и вычисляем невязки $\hat{\varepsilon} = Y - X\hat{\Theta}$.
4. $$F_{\text{эмп}} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n_1+n_2}(\hat{\varepsilon}_i)^2 - \sum_{i=1}^{n_1}\left(\hat{\varepsilon}_i^{(1)}\right)^2\right) \Big/ n_2}{\sum_{i=1}^{n_1}\left(\hat{\varepsilon}_i^{(1)}\right)^2 \Big/ (n_1 - p - 1)}$$
5. $F_{\text{эмп}} > FРАСПОБР(\alpha; n_2; n_1 - p - 1) \Rightarrow$ B1 и B2 неоднородны.

Численный пример на проверку однородности выборок

Зависимость зарплаты от стажа и образования (пример из практики 2):

y	$x^{(1)}$	$x^{(2)}$
10	5	1
13	2	1
17	3	2
19	1	4
20	2	2
25	1	4
25	2	3
25	4	2
26	15	1
27	3	2
…	…	…
280	18	5

Основная выборка:

$$\hat{y}^{(1)} = -57{,}1 + 2{,}90x^{(1)} + 28{,}58x^{(2)}, \quad \sum \left(\hat{\varepsilon}_i^{(1)}\right)^2 = 97066.$$

Дополнительная выборка 1:

y	$x^{(1)}$	$x^{(2)}$
90	5	2
40	25	5

$$\hat{y}^{(1)} = -36{,}0 + 2{,}19x^{(1)} + 24{,}18x^{(2)}, \quad \sum \hat{\varepsilon}_i^2 = 113900.$$

$$F_{\text{эмп}} = \frac{113900 - 97066}{97066}\frac{38}{2} = 3{,}30, \quad F_{\text{крит}} = 3{,}24.$$

$3{,}30 > 3{,}24 \quad \Rightarrow$ гипотеза об однородности отвергается.

Дополнительная выборка 2:

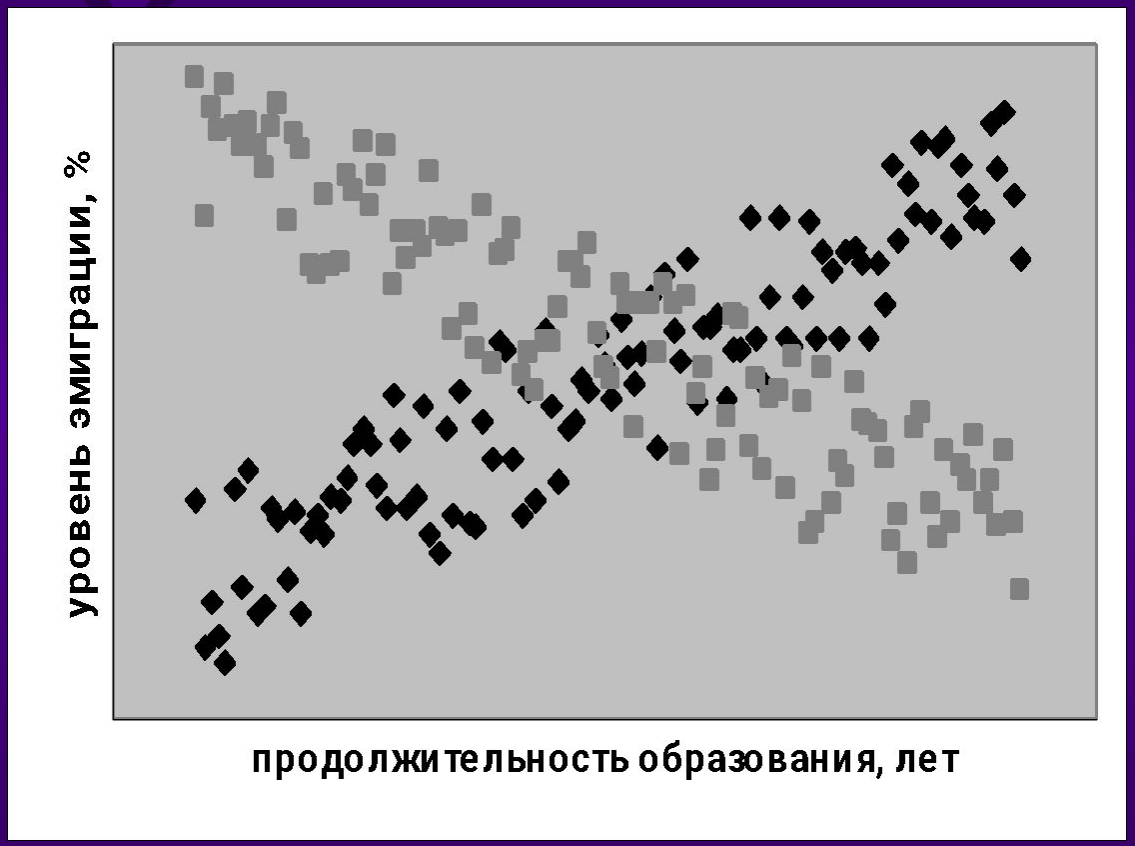
y	$x^{(1)}$	$x^{(2)}$
180	16	5
160	9	4

$$\hat{y}^{(1)} = -61{,}4 + 2{,}99x^{(1)} + 30{,}44x^{(2)}, \quad \sum \hat{\varepsilon}_i^2 = 104600.$$

$$F_{\text{эмп}} = \frac{104600 - 97066}{97066}\frac{38}{2} = 1{,}47, \quad F_{\text{крит}} = 3{,}24.$$

$1{,}47 < 3{,}24 \quad \Rightarrow$ гипотеза об однородности принимается.

Пример неоднородности данных при неизвестных сопутствующих факторах



Исследование проблемы «утечки мозгов» в 1990-е. Регрессионный анализ показывает отсутствии связи. **Геометрически** данные – две пересекающиеся крестом подвыборки.

Вывод: имеется скрытый сопутствующий признак – тип образования (гуманитарное / естественно-техническое).

Проблема: при $p = 3$ визуальный анализ затруднен, а при $p > 3$ практически невозможен.

Спасибо за внимание!

alexander.filatov@gmail.com
http://vk.com/alexander.filatov, http://vk.com/baikalreadings