Эконометрика-II

Лекция 3

28.02.2018

Причинность по Грейнджеру для *N* временных рядов

- $y_1, y_2, \dots, y_N$ — N временных рядов,
- $y_t = \left(y_{1t}, \dots, y_{N,t}\right)^T$ – векторный временной ряд, образованный этими N рядами
- Рассматриваем разбиение y_t на две части:

$$y_t = \begin{pmatrix} y_t^{(1)} \\ y_t^{(2)} \end{pmatrix}$$

- где

$$y_t^{(1)} = \left(y_{1t}, \dots, y_{N_1,t}\right)^T, \quad y_t^{(2)} = \left(y_{N_1+1,t}, \dots, y_{N,t}\right)^T, \quad 1 \le N_1 < N$$

$$\begin{pmatrix} y_t \\ z_t \\ x_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varphi_{11}(L) & \varphi_{12}(L) & \varphi_{13}(L) \\ \varphi_{21}(L) & \varphi_{22}(L) & \varphi_{23}(L) \\ \varphi_{31}(L) & \varphi_{23}(L) & \varphi_{33}(L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_t \\ z_t \\ x_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \\ \varepsilon_{3t} \end{pmatrix}$$

- Непосредственный перенос условия G-причинности $x \xrightarrow{G} y$ для VAR с двумя переменными на VAR с тремя переменными приводит к следующему условию отсутствия такой связи:

$$\varphi_{13}(L) = 0$$

- Но если остальные элементы матрицы отличны от нуля, то тогда $x \xrightarrow{G} z$ и $z \xrightarrow{G} y$ т.е. такое определение G-причинности ***не является транзитивным*** в системах с тремя и более переменными.
- Это определение не учитывает возможность ***опосредованного*** влияния переменной x на переменную y через "промежуточную" переменную z .

Блочная экзогенность
(block exogeneity)

- ***Блочная экзогенность одной группы переменных (или некоторой переменной) в отношении другой группы переменных (или другой переменной) :***

- ***запаздывающие значения переменных второй группы <u>не входят</u> в уравнения для переменных первой группы.***

$$y_t = c + \Phi_1 y_{t-1} + \dots + \Phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t ,$$
$$\varepsilon_t \sim i.i.d.\ N(0, \Sigma)$$

$$y_t = \begin{pmatrix} y_t^{(1)} \\ y_t^{(2)} \end{pmatrix}$$

$$y_{it} =$$
$$\alpha_i + \omega_{1i}^T y_{t-1}^{(1)} + \lambda_{1i}^T y_{t-1}^{(2)} + \omega_{2i}^T y_{t-2}^{(1)} + \lambda_{2i}^T y_{t-2}^{(2)} + \dots + \omega_{pi}^T y_{t-p}^{(1)} + \lambda_{pi}^T y_{t-p}^{(2)} + u_{it}$$

$$H_0 : \lambda_{1i} = \lambda_{2i} = \dots = \lambda_{pi} = 0,\ i = 1, 2, \dots, N_1$$

– Гипотеза блочной экзогенности первой группы переменных в отношении второй группы переменных

Если эта гипотеза выполняется, то в порождении переменных первой группы *не участвуют* переменные второй группы.

N_2 *уравнений второй группы образуют открытую VAR*

Проверка гипотезы блочной экзогенности

- Рассмотренная выше гипотеза блочной экзогенности первой группы переменных в отношении второй группы переменных накладывает $N_1 N_2 p$ ограничений на коэффициенты VAR(*p*) для N переменных, и при $N_1 > 1$ имеет ***перекрестный*** характер, затрагивая коэффициенты ***сразу нескольких уравнений*** (точнее, коэффициенты N_1 уравнений).

- Проверить эту гипотезу можно, применяя ***критерий отношения правдоподобий***, статистика которого равна

- $\boxed{LR = 2(l_{UNRESTR} - l_{RESTR})}$, где $l_{UNRESTR}$ – логарифм максимума функции правдоподобия при оценивании VAR(p) без ограничений на коэффициенты, а l_{RESTR} – логарифм максимума функции правдоподобия при оценивании VAR(***p***) с ограничениями на коэффициенты, соответствующими проверяемой гипотезе.

Проверка гипотезы блочной экзогенности

$$LR = 2\left(l_{UNRESTR} - l_{RESTR}\right) = T\left(\ln\left|\hat{\Omega}_{RESTR}\right| - \ln\left|\hat{\Omega}_{UNRESTR}\right|\right)$$

- $\left|\hat{\Omega}\right|$ – определитель оцененной ковариационной матрицы инноваций, вычисляемой двумя разными способами:
- $\left|\hat{\Omega}\right| = \det\left(\frac{1}{T}\sum_t \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_t^T\right)$ или $\left|\hat{\Omega}\right| = \det\left(\frac{1}{T-p}\sum_t \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_t^T\right)$

Если VAR стабильна, то статистика *LR* имеет *асимптотическое распределение хи-квадрат* с числом степеней свободы, равным количеству зануляемых коэффициентов

Причинность по Грейнджеру в модели VAR с тремя переменными

$$
\begin{aligned}
Y_t &= 0.6\,Y_{t-1} + 0.5\,Z_{t-1} + \varepsilon_{1t},\\
X_t &= 0.6\,X_{t-1} + 0.25\,Z_{t-1} + \varepsilon_{2t},\\
Z_t &= 0.25\,X_{t-1} + 0.6\,Z_{t-1} + \varepsilon_{3t}.
\end{aligned}
$$

Является ли переменная X G-причиной для переменной Y ?

$$Z_{t-1} = 0.25\,X_{t-2} + 0.6\,Z_{t-2} + \varepsilon_{3,\,t-1}$$

$$Y_t = 0.6\,Y_{t-1} + 0.125\,X_{t-2} + 0.3\,Z_{t-2} + \varepsilon_{1t} + 0.5\,\varepsilon_{3,\,t-1}.$$

Группа 1: переменная ***Y***

Группа 2: переменные ***X*** и ***Z***

Переменные группы 2 являются G-причиной для *Y*

$$Y_t = 0.6\,Y_{t-1} + 0.5\,Z_{t-1} + \varepsilon_{1t},$$
$$X_t = 0.6\,X_{t-1} + 0.25\,Z_{t-1} + \varepsilon_{2t},$$
$$Z_t = 0.25\,X_{t-1} + 0.6\,Z_{t-1} + \varepsilon_{3t}.$$

$$Y_t = 0.6\,Y_{t-1} + 0.125\,X_{t-2} + 0.3\,Z_{t-2} + \varepsilon_{1t} + 0.5\,\varepsilon_{3,\,t-1}$$

X_{t-1} не входит в последнее уравнение

Pairwise Granger Causality Tests

Sample: 1 500

Lags: 1

Null Hypothesis:	Obs	F-Statistic	Prob.	
Y does not Granger Cause X	499	8.00194	**0.0049**	
X does not Granger Cause Y		20.8479	**6.E-06**	– Почему?
Z does not Granger Cause X	499	48.1778	1.E-11	
X does not Granger Cause Z		28.6382	1.E-07	
Z does not Granger Cause Y	499	187.416	2.E-36	
Y does not Granger Cause Z		0.07788	0.7803	

Null Hypothesis:	Obs	F-Statistic	Prob.	
Y does not Granger Cause X	499	8.00194	0.0049	
X does not Granger Cause Y		**20.8479**	**6.E-06**	**– Почему?**

Dependent Variable: Y
Method: Least Squares
Sample (adjusted): 2 500
Included observations: 499 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.020849	0.051074	-0.408209	0.6833
Y(-1)	0.727267	0.030569	23.79084	0.0000
X(-1)	0.160693	0.035194	**4.565954**	0.0000

4.565954^2 = 20.8479

Гипотеза H_0: **"*X*** не является G-причиной для ***Y*"** ***отвергается уже при привлечении <u>только первых</u> лагов***

– Почему?

$$Y_t = 0.6\,Y_{t-1} + 0.5\,Z_{t-1} + \varepsilon_{1t}\,,$$
$$X_t = 0.6\,X_{t-1} + 0.25\,Z_{t-1} + \varepsilon_{2t}\,,$$
$$Z_t = 0.25\,X_{t-1} + 0.6\,Z_{t-1} + \varepsilon_{3t}\,.$$

$$Z_{t-1} = 4\,(X_t - 0.6\,X_{t-1} - \varepsilon_{2t}\,)$$

$$Y_t = 0.6\, Y_{t-1} + 0.5\, Z_{t-1} + \varepsilon_{1t},$$
$$X_t = 0.6\, X_{t-1} + 0.25\, Z_{t-1} + \varepsilon_{2t},$$
$$Z_t = 0.25\, X_{t-1} + 0.6\, Z_{t-1} + \varepsilon_{3t}.$$

Vector Autoregression Estimates

Sample (adjusted): 2 500

Included observations: 499 after adjustments

Standard errors in ( ) & t-statistics in [ ]

	X	Y	Z
X(-1)	0.628552	0.009516	0.193404
	(0.03449)	(0.03226)	(0.03331)
	[18.2258]	[**0.29503**]	[5.80632]
Y(-1)	0.012857	0.595029	-0.038285
	(0.03057)	(0.02860)	(0.02953)
	[**0.42054**]	[20.8081]	[**-1.29648**]
Z(-1)	0.241654	0.435552	0.686442
	(0.03696)	(0.03456)	(0.03569)
	[6.53908]	[12.6011]	[19.2317]

Из VAR: Proc/ Make System

X = C(1)*X(-1) + C(2)*Y(-1) + C(3)*Z(-1)

Y = C(4)*X(-1) + C(5)*Y(-1) + C(6)*Z(-1)

Z = C(7)*X(-1) + C(8)*Y(-1) + C(9)*Z(-1)

Estimate/ Ordinary Least Squares

c(4)=c(7)=0

Wald Test:
System: Untitled

Test Statistic	Value	df	**Probability**
Chi-square	33.80044	2	**0.0000**

c(4)=c(6)=0

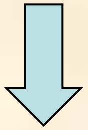
Wald Test:
System: Untitled

Test Statistic	Value	df	**Probability**
Chi-square	188.9828	2	**0.0000**

Группа 1: переменная ***Y***

Группа 2: переменные ***X*** и ***Z***

Из VAR: **View/ Lag Structure/ Granger Causality**



VAR Granger Causality/Block Exogeneity Wald Tests

Sample: 1 500
Included observations: 499

Dependent variable: X

Excluded	Chi-sq	df	Prob.
Y	**0.176851**	**1**	**0.6741**
Z	42.75958	1	0.0000
All	52.03015	2	0.0000

Dependent variable: Y

Excluded	Chi-sq	df	Prob.
X	0.087042	1	0.7680
Z	158.7880	1	0.0000
All	188.9828	2	0.0000

Dependent variable: Z

Excluded	Chi-sq	df	Prob.
X	33.71340	1	0.0000
Y	**1.680859**	**1**	**0.1948**
All	33.86982	2	0.0000

Группа 1: переменная ***Y***

Группа 2: переменные ***X*** и ***Z***

X = C(1)*X(-1) + C(2)*Y(-1) + C(3)*Z(-1)

Y = C(4)*X(-1) + C(5)*Y(-1) + C(6)*Z(-1)

Z = C(7)*X(-1) + C(8)*Y(-1) + C(9)*Z(-1)

c(2)=c(8)=0

(переменные ***X*** и ***Z*** ***блочно экзогенны по отношению к Y***)

Wald Test:
System: SYS01

Test Statistic	Value	df	Probability
Chi-square	1.857710	2	**0.3950**

Нестабильные VAR

- VAR нестабильна, если нарушено условие стабильности

Все корни уравнения $\det A(z)=0$ *лежат <u>за пределами единичного круга.</u>*

Пример: ***нестабильная*** VAR(1) для двух рядов

$$y_{1t} = 0.8\, y_{1,\,t-1} + 0.2\, y_{2,\,t-1} + \varepsilon_{1t}\,,$$
$$y_{2t} = 0.2\, y_{1,\,t-1} + 0.8\, y_{2,\,t-1} + \varepsilon_{2t}\,.$$

$$\begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8L & 0.2L \\ 0.2L & 0.8L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}, \qquad A(L) = \begin{pmatrix} 1-0.8L & -0.2L \\ -0.2L & 1-0.8L \end{pmatrix}$$

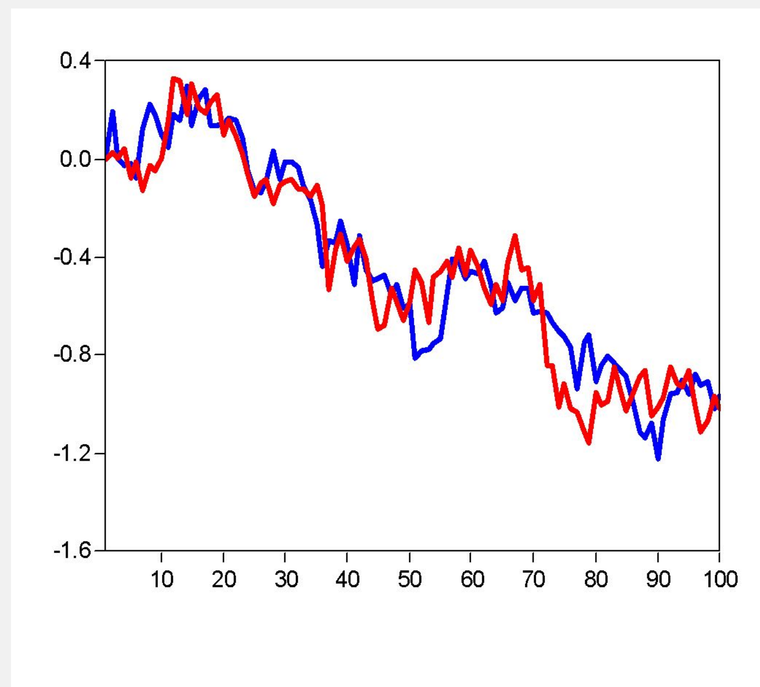
$\boxed{\det A(z) = 0}$ □ $(1 - z)(1 - 0.6\, z) = 0$ □ ***VAR нестабильна***

$$A(1) = \begin{pmatrix} 0.2 & -0.2 \\ -0.2 & 0.2 \end{pmatrix}, \quad \boxed{\det A(1) = 0}$$

$$\boxed{Cov(\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}) = 0}$$

$$\boxed{x_{11} = x_{21} = 0}$$

$\boxed{m = 1,\, a = 0}$ □ $\boxed{d = 1}$



$$\boxed{y_t = \alpha + a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + \varepsilon_t}$$

$$\boxed{y_t = \alpha + a_1 y_{t-1} + \left(a_2 y_{t-1} - a_2 y_{t-1}\right) + a_2 y_{t-2} + \varepsilon_t}$$

$$\boxed{y_t = \alpha + a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-1} - a_2 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + \varepsilon_t}$$

$$\boxed{y_t = \alpha + \left(a_1 + a_2\right) y_{t-1} - a_2\left(y_{t-1} - y_{t-2}\right) + \varepsilon_t}$$

$$\boxed{y_t = \alpha + \rho\, y_{t-1} + \zeta_1 \Delta y_{t-1} + \varepsilon_t}$$

$$\boxed{\rho = a_1 + a_2} \qquad \boxed{\zeta_{p-1} = -a_2}$$

$$y_t = \alpha + \Phi_1 y_{t-1} + \cdots + \Phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t \qquad (*)$$

Компоненты вектора y_t являются I(1)-рядами

- Эквивалентная форма:

$$y_t = \alpha + \rho\, y_{t-1} + \zeta_1 \Delta y_{t-1} + \cdots + \zeta_{p-1} \Delta y_{t-p+1} + \varepsilon_t \qquad (**)$$

$$\rho = \Phi_1 + \cdots + \Phi_p$$

- Если $\rho = I_n$, то ***компоненты*** y_t ***не коинтегрированы,***

и модель принимает форму векторной авторегрессии VAR(p –1)

в разностях:

$$\Delta y_t = \alpha + \zeta_1 \Delta y_{t-1} + \cdots + \zeta_{p-1} \Delta y_{t-p+1} + \varepsilon_t \qquad (***)$$

DGP: $$\boxed{\rho = \Phi_1 + \dots + \Phi_p = I_n}$$

$$\boxed{\Delta y_t = \alpha + \zeta_1 \Delta y_{t-1} + \dots + \zeta_{p-1} \Delta y_{t-p+1} + \varepsilon_t \qquad (***)}$$

- *При оценивании статистической модели*

$$\boxed{y_t = \alpha + \rho\, y_{t-1} + \zeta_1 \Delta\, y_{t-1} + \dots + \zeta_{p-1} \Delta\, y_{t-p+1} + \varepsilon_t \qquad (**)}$$

- независимо от того, $\alpha = 0$ или $\alpha \neq 0$ в DGP, совместное распределение оценок матричных коэффициентов $\zeta_1, \dots \zeta_{p-1}$ ***асимптотически нормально***, так что для проверки гипотез об этих коэффициентах ***можно использовать стандартные t и F - критерии*** (в асимптотике), или $qF \sim \chi^2(q)$

- То же относится и к проверке гипотез о матричных коэффициентах
- $\Phi_1, \ldots, \Phi_p$ в

$$\boxed{y_t = \alpha + \Phi_1 y_{t-1} + \ldots + \Phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t \qquad (*)}$$

- *кроме гипотез о значении их суммы* $\Phi_1 + \ldots + \Phi_p$
- (Оценка для этой суммы, т.е. для ρ, ***имеет нестандартное распределение***.)
- □ ***возможно использование стандартных тестов*** для проверки гипотезы
- **H$_0$: DGP=VAR(*p*$_0$),** ***p*$_0$ > 0,**
- против альтернативы
- **H$_A$: DGP=VAR(*p*) с *p* > *p*$_0$,**
- с целью выбора оптимальной глубины запаздываний.

Проверка на причинность по Грейнджеру отдельных переменных или подгруппы переменных в случае некоинтегрированной VAR

- Гипотеза H_0 : *переменные группы 2 не являются Грейнджер-причиной для переменной группы 1.*
- *В стационарном случае* мы записывали модель в уровнях в виде

$$y_{it} = \omega_{1i}^T y_{t-1}^{(1)} + \lambda_{1i}^T y_{t-1}^{(2)} + \omega_{2i}^T y_{t-2}^{(1)} + \lambda_{2i}^T y_{t-2}^{(2)} + \cdots + \omega_{pi}^T y_{t-p}^{(1)} + \lambda_{pi}^T y_{t-p}^{(2)} + \alpha_i + \varepsilon_{it}$$

- и проверяли гипотезу $H_0 = \lambda_{1i} = \lambda_{2i} = \cdots = \lambda_{pi} = 0$,
- используя *стандартные критерии.*
- Перепишем эту модель в виде:

$$y_{it} = \alpha_i + \eta_i^T y_{t-1}^{(1)} + \delta_i^T y_{t-1}^{(2)} + \beta_{1i}^T \Delta y_{t-1}^{(1)} + \gamma_{1i}^T \Delta y_{t-1}^{(2)} + \beta_{2i}^T \Delta y_{t-2}^{(1)} + \gamma_{2i}^T \Delta y_{t-2}^{(2)} + \cdots + \beta_{p-1,i}^T \Delta y_{t-p+1}^{(1)} + \gamma_{p-1,i}^T \Delta y_{t-p+1}^{(2)} + \varepsilon_{it}.$$

- нулевая гипотеза принимает вид:

$$H_0' : \delta_i = 0, \ \gamma_{1i} = \gamma_{2i} = \cdots = \gamma_{p-1,i} = 0$$

$$\boxed{H_0 = \lambda_{1i} = \lambda_{2i} = \dots = \lambda_{pi} = 0}$$

$$\boxed{H_0' : \ \delta_i = 0, \ \ \gamma_{1i} = \gamma_{2i} = \dots = \gamma_{p-1,i} = 0}$$

- Статистика *F* -критерия для проверки гипотезы $\mathbf{H_0}$ ***численно идентична*** статистике *F* -критерия для проверки гипотезы $\mathbf{H_0}'$.
- Оценка для δ_i имеет ***нестандартное распределение***
- ***Статистика F -критерия для проверки гипотезы*** $\mathbf{H_0}$ ***имеет нестандартное расределение.***
- Моделирование показывает, что в подобных ситуациях слишком часто определяется ***ложная причинность по Грейнджеру.***

Ложная причинность по Грейнджеру

- *Два независимо порождаемых случайных блуждания:*

$$Y_{1t} = Y_{1,\, t-1} + \varepsilon_{1t}\ ,$$
$$Y_{2t} = Y_{2,\, t-1} + \varepsilon_{2t}\ , \qquad Y_{1t} = Y_{2t} = 0$$

Проверка на причинность по Грейнджеру

- Pairwise Granger Causality Tests
- Sample: 1 100
- Lags: 1

Null Hypothesis:	Obs	F-Statistic	Prob.
Y2 does not Granger Cause Y1	98	0.10520	0.7464
Y1 does not Granger Cause Y2		5.93519	**0.0167**

Причинность в краткосрочном плане (short-run)

- Если рассматривается *некоинтегрированная* **VAR(*p*)** с **I(1)**-*переменными*, то, переходя к *модели в разностях*, мы получаем *стационарную* **VAR(p –1)**.

$$\Delta y_t = \alpha + \zeta_1 \Delta y_{t-1} + \dots + \zeta_{p-1} \Delta y_{t-p+1} + \varepsilon_t \qquad (***)$$

- Если **N=2**, то VAR в разностях имеет вид:

$$\Delta y_{1t} = \alpha_1 + \zeta_{11}^{(1)} \Delta y_{1,t-1} + \zeta_{11}^{(2)} \Delta y_{1,t-2} + \dots + \zeta_{11}^{(p-1)} \Delta y_{1,t-p+1} +$$
$$+ \zeta_{12}^{(1)} \Delta y_{2,t-1} + \zeta_{12}^{(2)} \Delta y_{2,t-2} + \dots + \zeta_{12}^{(p-1)} \Delta y_{2,t-p+1} + \varepsilon_{1t},$$
$$\Delta y_{2t} = \alpha_2 + \zeta_{21}^{(1)} \Delta y_{1,t-1} + \zeta_{21}^{(2)} \Delta y_{1,t-2} + \dots + \zeta_{21}^{(p-1)} \Delta y_{1,t-p+1} +$$
$$+ \zeta_{22}^{(1)} \Delta y_{2,t-1} + \zeta_{22}^{(2)} \Delta y_{2,t-2} + \dots + \zeta_{22}^{(p-1)} \Delta y_{2,t-p+1} + \varepsilon_{2t}$$

Некоинтегрированная VAR: причинность в краткосрочном плане

- Если в первом уравнении

$$\boxed{\begin{aligned}\Delta y_{1t} = \alpha_1 &+ \zeta_{11}^{(1)}\Delta y_{1,t-1} + \zeta_{11}^{(2)}\Delta y_{1,t-2} + \cdots + \zeta_{11}^{(p-1)}\Delta y_{1,t-p+1} + \\ &+ \zeta_{12}^{(1)}\Delta y_{2,t-1} + \zeta_{12}^{(2)}\Delta y_{2,t-2} + \cdots + \zeta_{12}^{(p-1)}\Delta y_{2,t-p+1} + \varepsilon_{1t}\end{aligned}}$$

- $\boxed{\zeta_{12}^{(1)} = \zeta_{12}^{(2)} = \cdots = \zeta_{12}^{(p-1)} = 0}$,
- то y_2 не является G-причиной для y_1 в краткосрочном плане.

Некоинтегрированная VAR: причинность в краткосрочном плане

- Если во втором уравнении

$$\Delta y_{2t} = \alpha_2 + \zeta_{21}^{(1)} \Delta y_{1,t-1} + \zeta_{21}^{(2)} \Delta y_{1,t-2} + \cdots + \zeta_{21}^{(p-1)} \Delta y_{1,t-p+1} + \\ + \zeta_{22}^{(1)} \Delta y_{2,t-1} + \zeta_{22}^{(2)} \Delta y_{2,t-2} + \cdots + \zeta_{22}^{(p-1)} \Delta y_{2,t-p+1} + \varepsilon_{2t}$$

$$\boxed{\zeta_{21}^{(1)} = \zeta_{21}^{(2)} = \cdots = \zeta_{21}^{(p-1)} = 0}$$

- то y_1 не является G-причиной для y_2 в краткосрочном плане.

Некоинтегрированная VAR: причинность <u>в краткосрочном плане</u>

- В силу стационарности VAR в разностях,
- ***<u>асимптотически оправданно</u>*** использование F-критериев для проверки линейных гипотез о коэффициентах этой VAR,
- так что ***проверка выполнения этих соотношений может осуществляться на основе соответствующих F-критериев***.

Проверка на причинность по Грейнджеру в случае **коинтегрированной** VAR

- Модель $$y_t = \alpha + \Phi_1 y_{t-1} + \dots + \Phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t \qquad (*)$$
- можно записать в форме ***модели коррекции ошибок***

$$\Delta y_t = \alpha + BA^T y_{t-1} + \zeta_1 \Delta y_{t-1} + \dots + \zeta_{p-1} \Delta y_{t-p+1} + \varepsilon_t$$

- $B - (N \times r)$ -матрица ***коэффициентов адаптации***,
- $A^T - (r \times N)$ -матрица, строки которой представляют ***r*** линейно независимых ***коинтегрирующих векторов***-строк, ***r*** – ***ранг коинтеграции*** , .

$$1 \le r \le N-1$$

- (При ***r* = 0** ***коинтеграции нет*** ; при ***r* = *N*** ***все ряды стационарны***.)

$$
\begin{aligned}
\Delta y_{1t} = \alpha_1 &+ B_{11} z_{1,t-1} + \dots + B_{1r} z_{r,t-1} + \\
&+ \left(\zeta_{11}^{(1)} \Delta y_{1,t-1} + \dots + \zeta_{1,N}^{(1)} \Delta y_{N,t-1}\right) + \\
&+ \left(\zeta_{11}^{(2)} \Delta y_{1,t-2} + \dots + \zeta_{1,N}^{(2)} \Delta y_{N,t-2}\right) + \dots + \\
&+ \left(\zeta_{11}^{(p-1)} \Delta y_{1,t-p+1} + \dots + \zeta_{1,N}^{(p-1)} \Delta y_{N,t-p+1}\right) + \varepsilon_{1t},
\end{aligned}
$$

$$\vdots$$

$$
\begin{aligned}
\Delta y_{Nt} = \alpha_N &+ B_{N1} z_{1,t-1} + \dots + B_{Nr} z_{r,t-1} + \\
&+ \left(\zeta_{N1}^{(1)} \Delta y_{1,t-1} + \dots + \zeta_{N,N}^{(1)} \Delta y_{N,t-1}\right) + \\
&+ \left(\zeta_{N1}^{(2)} \Delta y_{1,t-2} + \dots + \zeta_{N,N}^{(2)} \Delta y_{N,t-2}\right) + \dots + \\
&+ \left(\zeta_{N1}^{(p-1)} \Delta y_{1,t-p+1} + \dots + \zeta_{N,N}^{(p-1)} \Delta y_{N,t-p+1}\right) + \varepsilon_{Nt}
\end{aligned}
$$

- $z_1 = A_1 y_{t-1}, \dots, z_r = A_r y_{t-1}$ – стационарные линейные комбинации (коинтегрирующие линейные комбинации)

Коинтегрированная VAR

- Обязательно *должно выполняться условие* $B \neq 0$
- Хотя бы один из коэффициентов $B_{ij},\ i = 1, \dots, N,\ j = 1, \dots, r,$ *должен быть отличным от нуля.*
- *Если отличен от нуля коэффициент* B_{ij}, то *в прогнозировании* i-ой *переменной помогают*, во всяком случае, прошлые значения тех переменных, у которых *коэффициенты в* j-ой *коинтегрирующей линейной комбинации отличны от нуля*.

Ситуация: Компоненты ряда y_t являются I(1) рядами и ранг коинтеграции равен 1

- Для оценивания модели коррекции ошибок можно использовать ***двухступенчатую процедуру Энгла–Грейнджера***
- Производится OLS оценивание уравнения

$$y_{1t} = \mu + \gamma_2 y_{2t} + \gamma_3 y_{3t} + \cdots + \gamma_N y_{Nt} + u_t$$

- На основании полученных оценок $\hat{\mu}, \hat{\gamma}_2, \hat{\gamma}_3, \ldots, \hat{\gamma}_N$ коэффициентов долговременного соотношения получают оценку

$$\hat{z}_{1t} = y_{1t} - \hat{\mu} - \hat{\gamma}_2 y_{2t} - \hat{\gamma}_3 y_{3t} - \cdots - \hat{\gamma}_N y_{Nt}$$

стационарной линейной комбинации

$$z_{1t} = y_{1t} - \mu - \gamma_2 y_{2t} - \gamma_3 y_{3t} - \cdots - \gamma_N y_{Nt}$$

- имеющей нулевое среднее.
- Построенную переменную $\hat{z}_{1t}$ подставляют вместо z_{1t} в правую часть уравнений системы в форме модели коррекции ошибок, и производят OLS оценивание коэффициентов последней.

ECM, полученная двухступенчатой процедурой Энгла–Грейнджера

- ***Стандартные (асимптотические) процедуры проверки гипотез*** о параметрах ECM могут применяться ***к любым гипотезам, <u>не включающим предположение</u>***

$$B_{11} = \dots = B_{N1} = 0$$

поскольку такое предположение ***соответствует некоинтегрированности компонент ряда*** y_t .

- При гипотезе $H_0: \; B_{11} = \dots = B_{N1} = 0$ асимптотическое распределение оценок коэффициентов $B_{11}, \dots, B_{N1}$ – ***нестандартное***.

Коинтегрированная двумерная VAR

- *Ранг коинтеграции равен* 1, так что *ECM имеет вид*

$$\begin{aligned}
\Delta y_{1t} = \alpha_1 + B_{11} z_{1,t-1} &+ \left(\zeta_{11}^{(1)} \Delta y_{1,t-1} + \zeta_{12}^{(1)} \Delta y_{2,t-1}\right) + \\
&+ \left(\zeta_{11}^{(2)} \Delta y_{1,t-2} + \zeta_{12}^{(2)} \Delta y_{2,t-2}\right) + \cdots + \\
&+ \left(\zeta_{11}^{(p-1)} \Delta y_{1,t-p+1} + \zeta_{12}^{(p-1)} \Delta y_{2,t-p+1}\right) + \varepsilon_{1t}, \\
\Delta y_{2t} = \alpha_2 + B_{21} z_{1,t-1} &+ \left(\zeta_{21}^{(1)} \Delta y_{1,t-1} + \zeta_{22}^{(1)} \Delta y_{2,t-1}\right) + \\
&+ \left(\zeta_{21}^{(2)} \Delta y_{1,t-2} + \zeta_{22}^{(2)} \Delta y_{2,t-2}\right) + \cdots + \\
&+ \left(\zeta_{21}^{(p-1)} \Delta y_{1,t-p+1} + \zeta_{22}^{(p-1)} \Delta y_{2,t-p+1}\right) + \varepsilon_{2t}
\end{aligned}$$

- или

ECM для коинтегрированной двумерной VAR

$$\begin{aligned}
\Delta y_{1t} &= \alpha_1 + B_{11} z_{1,t-1} + \\
&+ \zeta_{11}^{(1)} \Delta y_{1,t-1} + \zeta_{11}^{(2)} \Delta y_{1,t-2} + \dots + \zeta_{11}^{(p-1)} \Delta y_{1,t-p+1} + \\
&+ \zeta_{12}^{(1)} \Delta y_{2,t-1} + \zeta_{12}^{(2)} \Delta y_{2,t-2} + \dots + \zeta_{12}^{(p-1)} \Delta y_{2,t-p+1} + \varepsilon_{1t}, \\
\Delta y_{2t} &= \alpha_2 + B_{21} z_{1,t-1} + \\
&+ \zeta_{21}^{(1)} \Delta y_{1,t-1} + \zeta_{21}^{(2)} \Delta y_{1,t-2} + \dots + \zeta_{21}^{(p-1)} \Delta y_{1,t-p+1} + \\
&+ \zeta_{22}^{(1)} \Delta y_{2,t-1} + \zeta_{22}^{(2)} \Delta y_{2,t-2} + \dots + \zeta_{22}^{(p-1)} \Delta y_{2,t-p+1} + \varepsilon_{2t},
\end{aligned}$$

- где
- $\boxed{z_{1,t-1} = y_{1,t-1} - \mu - \gamma_2 y_{2,t-1}}$ с $\gamma_2 \neq 0$

ECM для коинтегрированной двумерной VAR

- Хотя бы один из коэффициентов B_{11} или B_{21} должен отличаться от нуля □
- ***в правую часть хотя бы одного из двух уравнений ECM входит*** в качестве объясняющей переменная

$$\boxed{z_{1,t-1} = y_{1,t-1} - \mu - \gamma_2 y_{2,t-1}}$$

- Но это означает, что ***в таком уравнении*** ***<u>имеет место причинность по Грейнджеру</u>***.

ECM для коинтегрированной двумерной VAR

- Например, если в уравнении для Δy_{1t} имеем $B_{11} \neq 0$, то ***значение*** $y_{2,t-1}$ ***помогает в прогнозировании значения*** y_{1t} наряду со значениями $y_{1,t-1}$ и $\Delta y_{1,t-1}, \Delta y_{1,t-2}, \ldots, \Delta y_{1,t-p+1}$
- Фактически вопрос может стоять только о том, ***<u>существует ли G-причинность в выбранном направлении</u>***, например ***в направлении от ряда*** $y_{2,t}$ ***к ряду*** $y_{1,t}$.
- В последнем случае, ***гипотеза об отсутствии такой причинности***:
- . $H_0 : B_{11} = 0, \zeta_{12}^{(1)} = \zeta_{12}^{(2)} = \ldots = \zeta_{12}^{(p-1)} = 0$
- Эту гипотезу можно проверить ***стандартными методами***, даже если использовать вместо значений z_{1t} значения $\hat{z}_{1t}$, полученные применением процедуры Энгла – Грейнджера.

Причинность по Грейнджеру

Методология Тода – Ямамото

- Выше было указано, ***как можно проводить проверку*** на причинность по Грейнджеру, если
- ***VAR стационарна***
- ***VAR состоит из I(1) рядов и они некоинтегрированы*** (следует перейти к разностям для проверки наличия G-причинности в краткосрочном плане)
- ***VAR состоит из I(1) рядов и они коинтегрированы.***

- Применение соответствующих методов требует ***предварительной проверки гипотезы единичного корня для определения порядков интегрированности рядов и проверки гипотезы об их коинтегрированности/некоинтегрированности***.
- Однако, критерии для проведения такой проверки обычно ***обладают малой мощностью***, и это ограничивает применение указанных методов.
- Тода и Ямамото ([*Toda, Yamamoto (1995)*] предложили процедуру, ***позволяющую обойти эти проверки.***

Методология Тода – Ямамото

- **DGP :** $$\boxed{y_t = \gamma_0 + \gamma_1 t + \dots + \gamma_q t^q + \Phi_1 y_{t-1} + \dots + \Phi_k y_{t-k} + \varepsilon_t}$$

$$\boxed{\varepsilon_t \sim i.i.d.\left(0, \Sigma_\varepsilon\right), \quad E\left|\varepsilon_{it}\right|^{2+\delta} < \infty \text{ для некоторого } \delta > 0}$$

- ***Расширенная статистическая модель*** ***(augmented SM):***

$$\boxed{y_t = \gamma_0 + \gamma_1 t + \dots + \gamma_q t^q + \Phi_1 y_{t-1} + \dots + \Phi_k y_{t-k} + \dots + \Phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t}$$

- где $\boxed{p \geq k + d}$, d ***– порядок интегрированности ряда*** y_t

- В качестве d обычно берется ***предполагаемый максимальный порядок интегрированности рядов в составе*** y_t .

Методология Тода – Ямамото

- Гипотезы отсутствия причинности по Грейнджеру в DGP ***затрагивают в такой постановке*** ***<u>только элементы матриц</u>*** $\Phi_1, \ldots, \Phi_k$ и ***не затрагивают остальных матриц в SM***, т.е. матриц $\Phi_{k+1}, \ldots, \Phi_p$
- Если гипотеза накладывает m ***линейных ограничений*** на элементы матриц $\Phi_1, \ldots, \Phi_k$, то ***<u>статистика Вальда</u> для проверки такой гипотезы <u>имеет асимптотическое распределение</u>*** $\chi^2(m)$.
- При этом ***ряд может быть стационарным, I(1) или I(2), причем в каждом случае – еще и относительно линейного тренда, и если он I(1) или I(2), то может быть и коинтегрированным.***

Методология Тода – Ямамото: Выбор количества лагов

- **DGP :** $$y_t = \gamma_0 + \gamma_1 t + \dots + \gamma_q t^q + \Phi_1 y_{t-1} + \dots + \Phi_k y_{t-k} + \varepsilon_t$$
- **SM :**

$$y_t = \gamma_0 + \gamma_1 t + \dots + \gamma_q t^q + \Phi_1 y_{t-1} + \dots + \Phi_k y_{t-k} + \dots + \Phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t ,$$

- Гипотеза о невхождении в DGP лагов более высокого порядка, чем l

$$H_0^*: \quad \Phi_{l+1} = \dots = \Phi_p = 0 \qquad (k \le l \le p-1)$$

- Если эта гипотеза верна и $l \ge d$, то статистика Вальда для проверки этой гипотезы имеет асимптотическое распределение

$$\chi^2\left(N^2(p-l)\right)$$

Методология Тода – Ямамото: Выбор количества лагов

- Если $k \geq d$, то $l \geq k \geq d$ □
- ***Если порядки интегрированности рядов не превышают истинное количество запаздываний в DGP***, то применима ***обычная процедура выбора количества лагов в VAR.***

□

Если $d = 1$ **, то** ***процедура выбора порядка модели <u>всегда</u> асимптотически обоснованна.***

Если $d = 2$ **, то** ***она асимптотически обоснованна <u>только</u> при*** $k > 1$

- При выборе порядка модели можно также использовать ***информационные критерии***.

Резюме:

- При подозрениях на возможную интегрированность или коинтегрированность рядов в составе y_t, ***гипотезу*** H_0 ***можно проверять, не производя проверки рядов на интегрированность и коинтегрированность***, а лишь озаботясь тем, ***чтобы SM в виде VAR имела порядок*** $(k + d_{max})$.
- Используя стандартную асимптотическую теорию, можно проверять и другие линейные (и многие нелинейные) ограничения ***на первые*** k матриц коэффициентов.

Замечания

- Добавление лишних лагов ***может значительно понизить мощность критериев***, если количество рядов N велико.
- В модель можно также включать ***сезонные дамми***.

Причинность *в долгосрочном плане* (long-run) и причинность *в краткосрочном плане* (short-run)

- Если рассматривается ***некоинтегрированная*** **VAR(*p*)** с **I(1)-*переменными***, то, переходя к ***модели в разностях***, мы получаем ***стационарную*** **VAR(p –1)**.
- Если **N=2**, то VAR в разностях имеет вид:

$$\begin{aligned}
\Delta y_{1t} = \alpha_1 &+ \zeta_{11}^{(1)} \Delta y_{1,t-1} + \zeta_{11}^{(2)} \Delta y_{1,t-2} + \dots + \zeta_{11}^{(p-1)} \Delta y_{1,t-p+1} + \\
&+ \zeta_{12}^{(1)} \Delta y_{2,t-1} + \zeta_{12}^{(2)} \Delta y_{2,t-2} + \dots + \zeta_{12}^{(p-1)} \Delta y_{2,t-p+1} + \varepsilon_{1t}, \\
\Delta y_{2t} = \alpha_2 &+ \zeta_{21}^{(1)} \Delta y_{1,t-1} + \zeta_{21}^{(2)} \Delta y_{1,t-2} + \dots + \zeta_{21}^{(p-1)} \Delta y_{1,t-p+1} + \\
&+ \zeta_{22}^{(1)} \Delta y_{2,t-1} + \zeta_{22}^{(2)} \Delta y_{2,t-2} + \dots + \zeta_{22}^{(p-1)} \Delta y_{2,t-p+1} + \varepsilon_{2t}
\end{aligned}$$

Некоинтегрированная VAR: причинность в краткосрочном плане

- Если в первом уравнении

$$\Delta y_{1t} = \alpha_1 + \zeta_{11}^{(1)} \Delta y_{1,t-1} + \zeta_{11}^{(2)} \Delta y_{1,t-2} + \cdots + \zeta_{11}^{(p-1)} \Delta y_{1,t-p+1} +$$
$$+ \zeta_{12}^{(1)} \Delta y_{2,t-1} + \zeta_{12}^{(2)} \Delta y_{2,t-2} + \cdots + \zeta_{12}^{(p-1)} \Delta y_{2,t-p+1} + \varepsilon_{1t}$$

- $\boxed{\zeta_{12}^{(1)} = \zeta_{12}^{(2)} = \cdots = \zeta_{12}^{(p-1)} = 0}$,
- то y_2 не является G-причиной для y_1 в краткосрочном плане.

Некоинтегрированная VAR: причинность в краткосрочном плане

- Если во втором уравнении

$$\Delta y_{2t} = \alpha_2 + \zeta_{21}^{(1)} \Delta y_{1,t-1} + \zeta_{21}^{(2)} \Delta y_{1,t-2} + \dots + \zeta_{21}^{(p-1)} \Delta y_{1,t-p+1} + \\ + \zeta_{22}^{(1)} \Delta y_{2,t-1} + \zeta_{22}^{(2)} \Delta y_{2,t-2} + \dots + \zeta_{22}^{(p-1)} \Delta y_{2,t-p+1} + \varepsilon_{2t}$$

- $\boxed{\zeta_{21}^{(1)} = \zeta_{21}^{(2)} = \dots = \zeta_{21}^{(p-1)} = 0}$,
- то y_1 **не является G-причиной для** y_2 **в краткосрочном плане**.

Коинтегрированная VAR:
причинность <u>в краткосрочном и в долгосрочном плане</u>

- Если **N=2**, то соответствующая **ECM** имеет вид:

$$
\begin{aligned}
\Delta y_{1t} &= \alpha_1 + B_{11} z_{1,t-1} + \\
&+ \zeta_{11}^{(1)} \Delta y_{1,t-1} + \zeta_{11}^{(2)} \Delta y_{1,t-2} + \dots + \zeta_{11}^{(p-1)} \Delta y_{1,t-p+1} + \\
&+ \zeta_{12}^{(1)} \Delta y_{2,t-1} + \zeta_{12}^{(2)} \Delta y_{2,t-2} + \dots + \zeta_{12}^{(p-1)} \Delta y_{2,t-p+1} + \varepsilon_{1t}, \\
\Delta y_{2t} &= \alpha_2 + B_{21} z_{1,t-1} + \\
&+ \zeta_{21}^{(1)} \Delta y_{1,t-1} + \zeta_{21}^{(2)} \Delta y_{1,t-2} + \dots + \zeta_{21}^{(p-1)} \Delta y_{1,t-p+1} + \\
&+ \zeta_{22}^{(1)} \Delta y_{2,t-1} + \zeta_{22}^{(2)} \Delta y_{2,t-2} + \dots + \zeta_{22}^{(p-1)} \Delta y_{2,t-p+1} + \varepsilon_{2t}
\end{aligned}
$$

Коинтегрированная VAR:
причинность в краткосрочном и в долгосрочном плане

- В рамках этой ECM можно проверять как гипотезы ***об отсутствии краткосрочной G-причинности*** одной из переменных в отношении другой, выражаемые соотношениями
- $\boxed{\zeta_{12}^{(1)} = \zeta_{12}^{(2)} = \dots = \zeta_{12}^{(p-1)} = 0}$ и $\boxed{\zeta_{21}^{(1)} = \zeta_{21}^{(2)} = \dots = \zeta_{21}^{(p-1)} = 0}$
- так и гипотезы ***об отсутствии долговременной G-причинности одной из переменных в отношении другой***
- выражаемые соотношениями
- $B_{11} = 0$ и $B_{21} = 0$, соответственно
- При этом, гипотеза ***об отсутствии G-причинности в выбранном направлении***, например, в направлении от y_2 к y_1,
- формулируется, как это уже было сделано ранее:

$$\boxed{H_0 : B_{11} = 0, \zeta_{12}^{(1)} = \zeta_{12}^{(2)} = \dots = \zeta_{12}^{(p-1)} = 0}$$

К методу Тода-Ямамото

Если мы имеем дело с векторным временным рядом, то

такой временной ряд называется ***интегрированным порядка*** d, если:

векторный ряд $\Delta_d y_t$ **стационарный** и в представлении

$$\boxed{\Delta_d y_t = \mu + C(L)\,\varepsilon_t}$$

$$\boxed{C(1) = \sum_{i=0}^{\infty} C_i \neq 0}$$

Но на сей раз $C(1)$ – матрица, поэтому для выполнении последнего условия достаточно иметь хотя бы один отличный от нуля элемент матрицы $C(1)$, а остальные элементы этой матрицы могут быть нулями.

Соответственно, у интегрированного порядка d векторного временного ряда должна быть хотя бы одна $\mathrm{I}(d)$ компонента, а остальные компоненты могут иметь порядки $\mathrm{I}(k)$, $k < d$.

$$\boxed{y_t = \mu + \Phi_1 y_{t-1} + \dots + \Phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t}$$

Что можно сказать о порядке интегрированности векторного ряда y_t?

$$\boxed{A(L) y_t = \mu + \varepsilon_t}$$

$$\boxed{A(L) = I_N - \Phi_1 L - \dots - \Phi_p L^p}$$

$$\boxed{A(z) = I_N - \Phi_1 z - \dots - \Phi_p z^p}$$

– обратный характеристический полином

$\boxed{\det A(z)}$ **– многочлен степени** $\boxed{n \le Np}$

$\boxed{A(0) = I_N} \Longrightarrow \boxed{\det A(0) = 1}$

$\Longrightarrow \boxed{z = 0}$ **не является корнем многочлена**

$$\boxed{\det A(z) = d_0 + d_1 z + \dots + d_n z^n}$$

$$\Longrightarrow \boxed{d_0 \ne 0}$$

$$\boxed{\det A(z) = d_0 + d_1 z + \dots + d_n z^n}$$

Тогда можно записать:

$$\boxed{\det A(z) = d_n \prod_{i=1}^{n_r} (z - z_i)^{m_i} = (z-1)^m g(z)}$$

где $\boxed{g(1) \neq 0}$ $\boxed{1 \leq m \leq n}$

так что многочлен $\det A(z)$ имеет m единичных корней.

Если бы мы имели дело с одномерным временным рядом, то отсюда следовало бы, что m – порядок интегрированности ряда.

В случае векторного временного ряда положение сложнее.

Пусть $A^*(z)$ **– присоединенная матрица для** $A(z)$ **, так что**

$$\boxed{A(z)^{-1} = \frac{A^*(z)}{|A(z)|}}$$

если обратная матрица существует

Пусть многочлен $\det A(z)$ **не имеет корней внутри единичного круга.**

Тогда порядок интегрированности ряда y_t **равен**

$$\boxed{d = m - a}$$

где значение a **определяется соотношением**

$$\boxed{A^*(z) = (z-1)^a H(z), \quad H(1) \neq 0}$$

<u>MASSIMO FRANCHI (2006)</u>

“THE INTEGRATION ORDER OF VECTOR AUTOREGRESSIVE PROCESSES”

Пример: ***нестабильная*** VAR(1) для двух рядов

$$\boxed{\begin{aligned} y_{1t} &= 0.8\, y_{1,\,t-1} + 0.2\, y_{2,\,t-1} + \varepsilon_{1t}, \\ y_{2t} &= 0.2\, y_{1,\,t-1} + 0.8\, y_{2,\,t-1} + \varepsilon_{2t}. \end{aligned}}$$

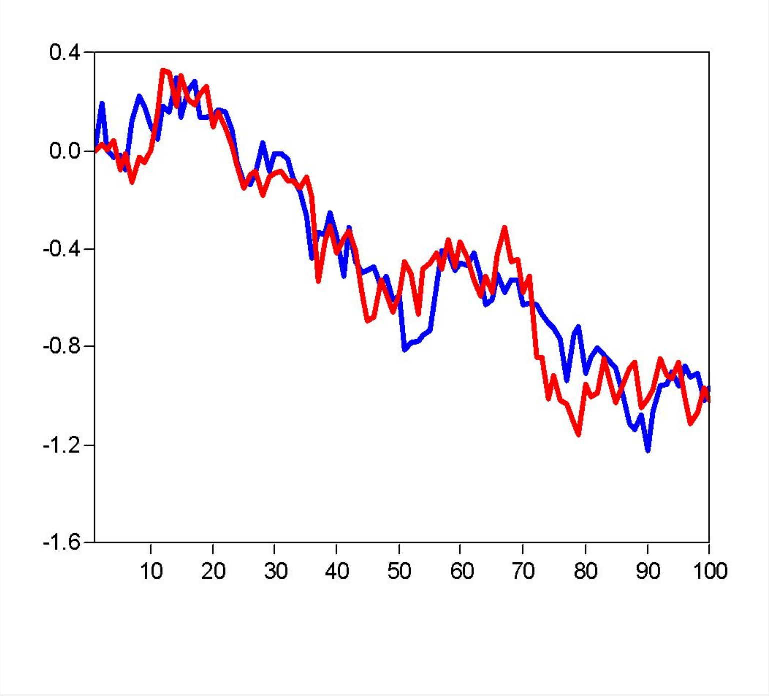
$$\begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8L & 0.2L \\ 0.2L & 0.8L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}, \qquad A(L) = \begin{pmatrix} 1-0.8L & -0.2L \\ -0.2L & 1-0.8L \end{pmatrix}$$

$\boxed{\det A(z) = 0}$ □ $\boxed{(1 - z)(1 - 0.6\, z) = 0}$ □ ***VAR нестабильна***

$$A(1) = \begin{pmatrix} 0.2 & -0.2 \\ -0.2 & 0.2 \end{pmatrix}, \quad \boxed{\det A(1) = 0}$$

$$\boxed{Cov(\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}) = 0}$$

$$\boxed{y_{11} = y_{21} = 0}$$



$$\boxed{\det A(z) = (1-z)(1-0.6z) = (z-1)^1 g(z)} \quad \boxed{g(1) \neq 0}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{m = 1}$$

$$A(z) = \begin{pmatrix} 1-0.8z & -0.2z \\ -0.2z & 1-0.8z \end{pmatrix}$$

$$A^*(z) = \begin{pmatrix} 1-0.8z & 0.2z \\ 0.2z & 1-0.8z \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A^*(1) = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 \end{pmatrix} \neq 0 \\ A^*(z) = (z-1)^a H(z), \quad H(1) \neq 0 \end{array} \right.$$

$$\boxed{a = 0}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{d = m - a = 1 - 0 = 1}$$

$$y_{1t} = 0.8\, y_{1,\, t-1} + 0.2\, y_{2,\, t-1} + \varepsilon_{1t}\,,$$
$$y_{2t} = 0.2\, y_{1,\, t-1} + 0.8\, y_{2,\, t-1} + \varepsilon_{2t}\,.$$

$$y_{1t} - y_{1,\, t-1} = -\,0.2\, y_{1,\, t-1} + 0.2\, y_{2,\, t-1} + \varepsilon_{1t}\,,$$
$$y_{2t} - y_{2,\, t-1} = 0.2\, y_{1,\, t-1} - 0.2\, y_{2,\, t-1} + \varepsilon_{2t}\,.$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\Delta y_{1t} = -\,0.2\,(\, y_{1,\, t-1} - y_{2,\, t-1}\,) + \varepsilon_{1t}\,,$$
$$\Delta y_{2t} = 0.2\,(\, y_{1,\, t-1} - y_{2,\, t-1}\,) + \varepsilon_{2t}\,.$$

$\boxed{y_{1,\, t-1} = y_{2,\, t-1}}$ **– долговременная (коинтеграционная) связь**