Математическое моделирование

Правила округления чисел

Значащие цифры

Значащей цифрой приближенного числа называется всякая цифра в его десятичном изображении, отличная от нуля и нуль, если он содержится между значащими цифрами или является представителем сохраненного десятичного разряда. Все остальные нули, входящие в состав приближенного числа и служащие лишь для обозначения десятичных разрядов его, не причисляются к значащим цифрам.

Так в числе 0,008050 – четыре значащих цифры, а в 0,00805 – три (первые три нуля не являются значащими, а обозначают только разряды)

Верные знаки

- Верной цифрой называют ту цифру в числе, за точность которой можно ручаться. Поэтому в точном числе все цифры являются верными.

Говорят, что n первых значащих цифр (десятичных знаков) приближенного числа являются верными, если абсолютная погрешность этого числа не превышает половины единицы разряда, выражаемого n -й значащей цифрой, считая слева направо.

Например, для точного числа A =35,97 число a =36,00 является приближением с тремя верными знаками, так как $|A - a| = 0{,}03 < \frac{1}{2} \cdot 0{,}1$

Верные знаки

Приближенное число 1,5 отличается от 1,50. Запись 1,5 означает, что истинным числом может быть, например, 1,53 или 1,48, при этом верными являются цифры целых и десятых. Запись 1,50 означает, что верными являются и сотые доли, а число может быть 1,503 или 1,498, но не 1,531 и не 1,482.

Верные знаки

Бывают приближенные числа другого происхождения, например число $\pi = 3{,}14159\ldots$ или величина ускорения свободного падения g и др.

Указанные величины не являются абсолютно точными и следует учесть их погрешность в общем результате измерений.

Оценка этих погрешностей осуществляется на основе следующего правила: ***абсолютную погрешность нужно принимать равной половине единицы наименьшего разряда, представленного в числе***.

Это следует из соображений того, что в большинстве случаев последняя цифра в числе не является точной. Таким образом, если используется значение $\pi = 3{,}142$, то $\Delta\pi = 0{,}0005$.

Правило округления числа

В первую очередь ограничиваются значащие цифры погрешности, при этом она записывается всегда с одной или двумя значащими цифрами из следующих соображений.

Сама по себе величина случайной погрешности измерений является случайным числом (если провести измерения повторно, то получится и другая оценка для погрешности). А раз погрешность является случайной величиной, то, используя законы математической статистики, для нее можно определить доверительный интервал и этот интервал оказывается весьма широким. При числе измерений $n>10$, относительная ошибка погрешности более 30 %. В связи с этим существует рекомендация записывать *две значащие цифры*, если первая из них 1 или 2, и *одну значащую цифру*, если она больше 3.

После определения разряда погрешности, результат вычислений округляется до того же разряда, что и у погрешности.

ТЕОРЕМА. Связь относительной погрешности приближенного числа с количеством верных знаков этого числа

0 Точность приближенного числа зависит не от количества значащих цифр, а от количества верных значащих цифр.

Если положительное приближенное число a имеет n верных десятичных знаков, то относительная погрешность δ этого числа не превосходит $\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$, деленную на первую значащую цифру данного числа, т.е.

$$\delta \leq \frac{1}{a_m}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$$

где α_m - первая значащая цифра числа a.

ТЕОРЕМА. Связь относительной погрешности приближенного числа с количеством верных знаков этого числа

- Следствие. Если число a имеет больше двух верных знаков, т.е. $n \geq 2$, то практически справедлива формула

$$\delta = \frac{1}{2a_m}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$$

где α_m - первая значащая цифра числа a.

Примеры

Пример 1. Какова предельная относительная погрешность, если вместо числа π взять число a =3,14?

Решение. В нашем случае α_m =3 и n =3. Следовательно,

$$\delta = \frac{1}{2 \cdot 3}\left(\frac{1}{10}\right)^{3-1} = \frac{1}{600} = \frac{1}{6}\%$$

Примеры

- *Пример 2.* Со сколькими десятичными знаками надо взять $\sqrt{20}$, чтобы погрешность не превышала 0,1 %?

Решение. Так как первая цифра 4, то $\alpha_m = 4$, причем $\delta = 0{,}001$. Имеем

$$\frac{1}{4 \cdot 10^{n-1}} \leq 0{,}001,$$

Отсюда

$$10^{n-1} \geq 250 \text{ и } n \geq 4$$