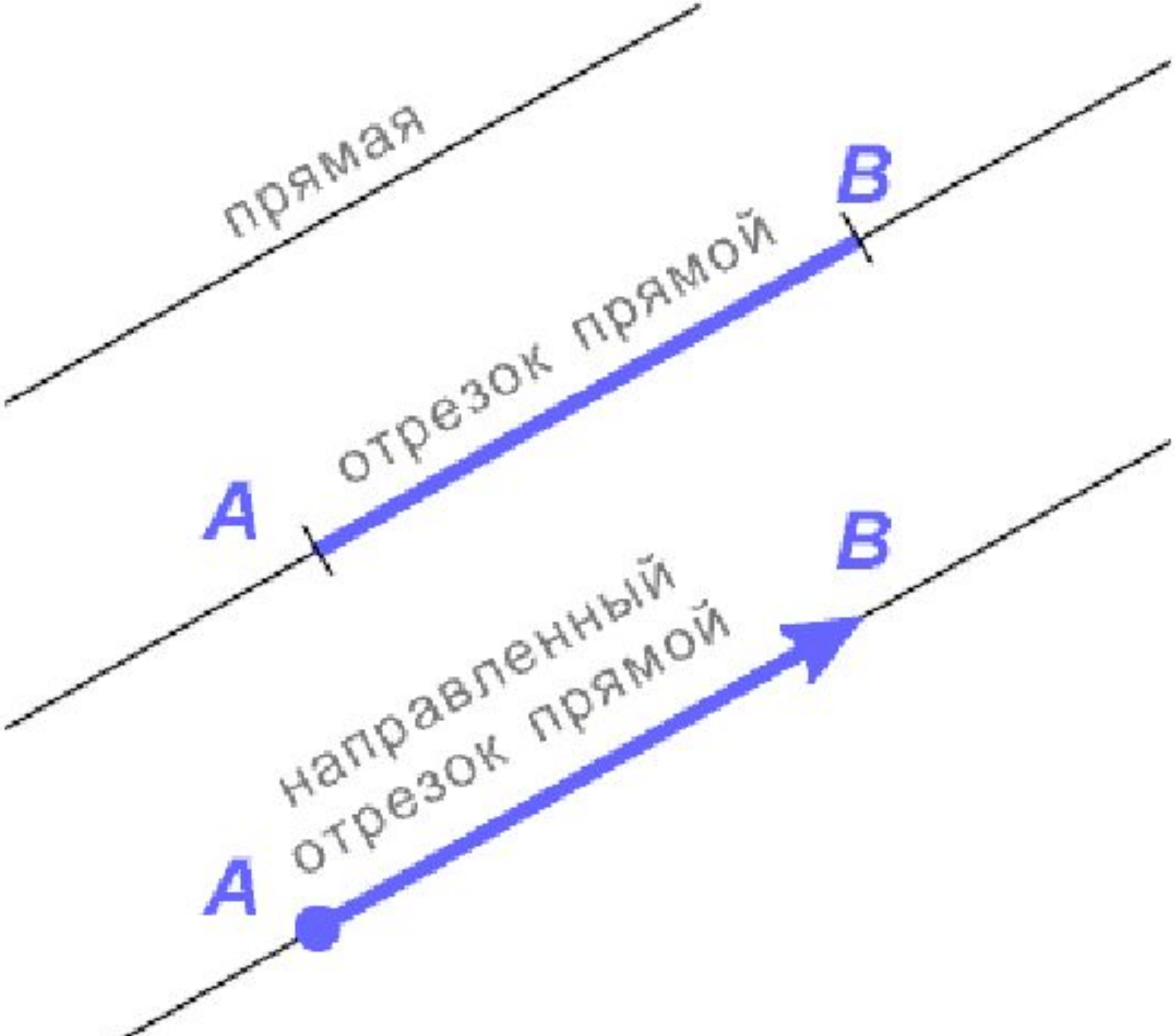
ВЕКТОРЫ И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

1. Основные понятия.
2. Линейные операции над векторами.
3. Векторное пространство.
4. Разложение вектора по базису.
5. Нелинейные операции над векторами.

Основные понятия

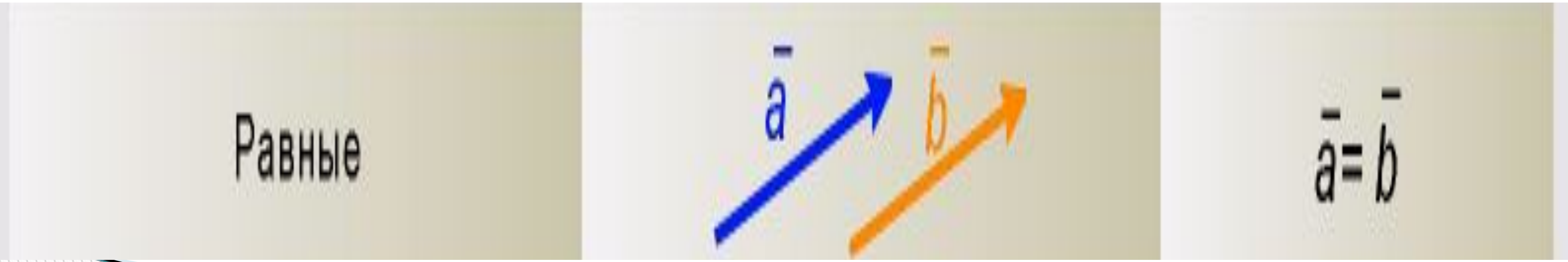
- вектор;
- длина вектора;
- свободные векторы;
- равные векторы;
- нулевой вектор;
- коллинеарные векторы;
- компланарные векторы;
- *n* – мерный вектор и его координаты;
- векторное пространство;
- линейная комбинация векторов;
- линейно-зависимая и линейно-независимая система векторов;
- базис векторного пространства;
- проекция вектора на ось;
- проекция точки на ось;
- координаты вектора в ДСК;
- направляющие косинусы вектора

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕКТОРА



Равные векторы

1. длины векторов равны;
2. расположены на одной или параллельных прямых;
3. сонаправленные



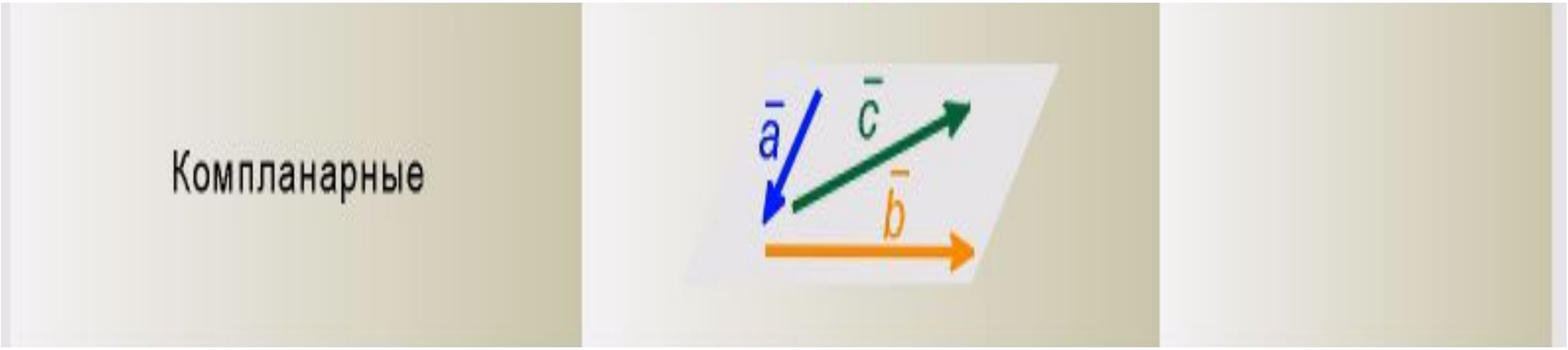
Нулевой вектор

Нулевой	• A	$\overline{0}$

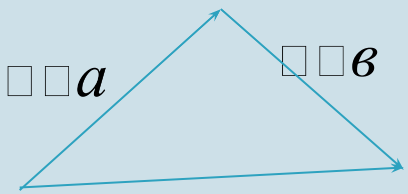
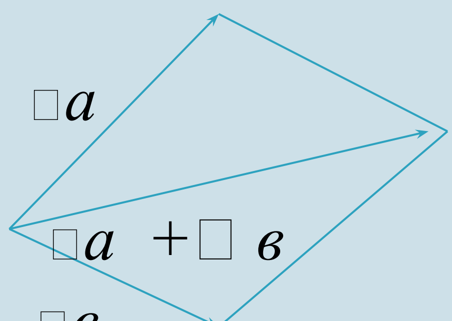
Взаимное расположение векторов

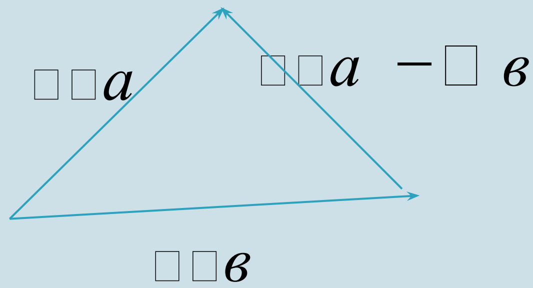
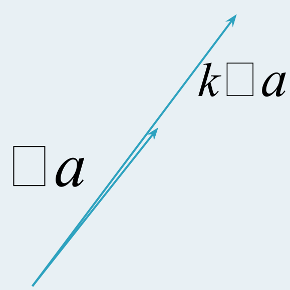
Коллинеарные		$\bar{a} \parallel \bar{b}$

Взаимное расположение векторов

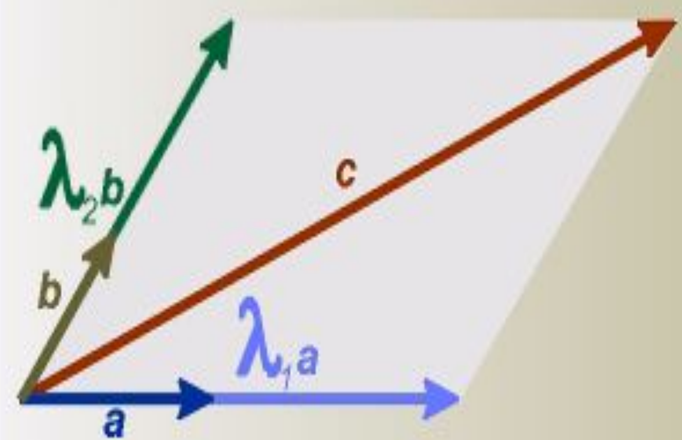


Линейные операции над векторами

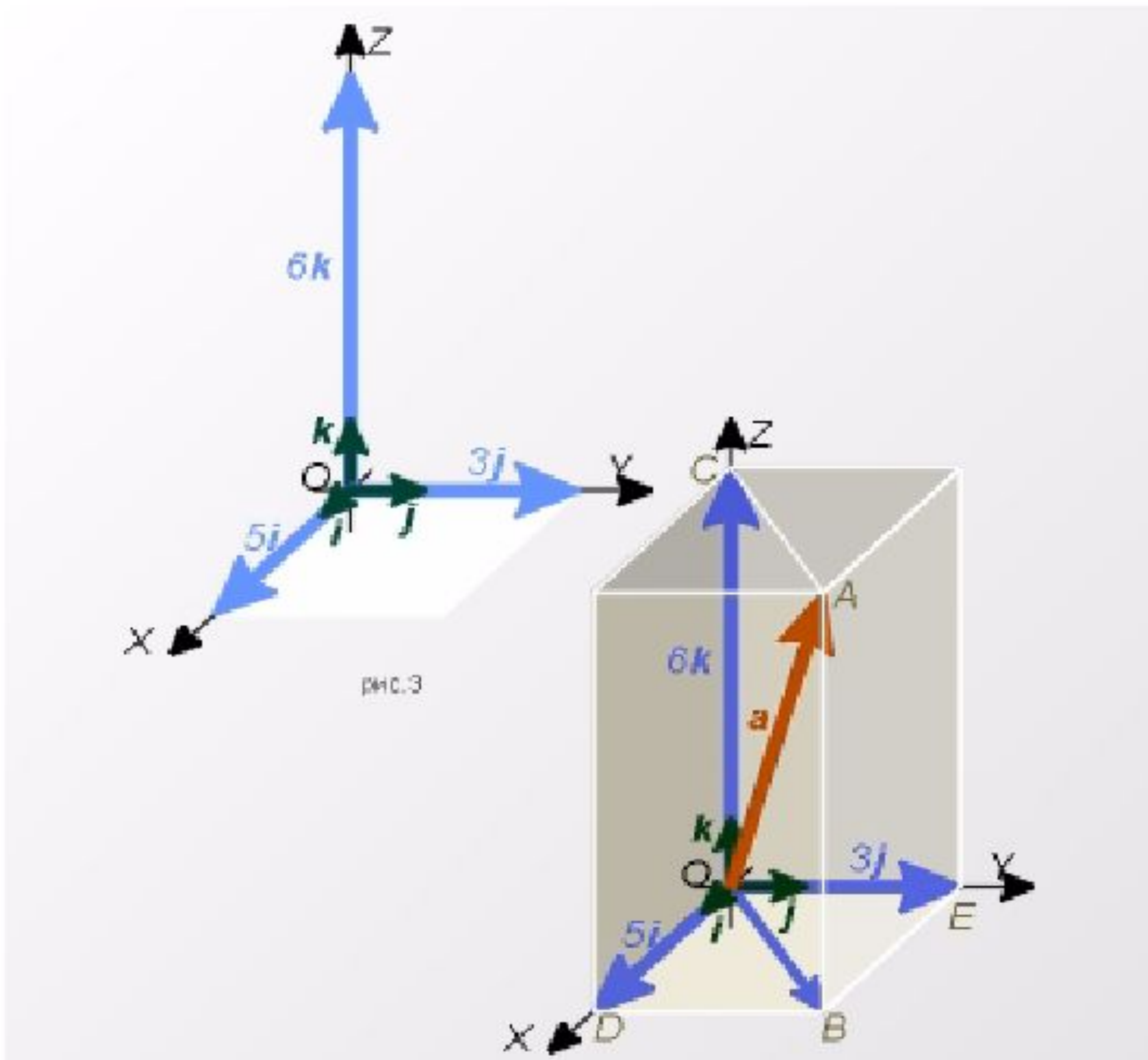
№	Геометрический образ	Координатная форма записи
1.	СЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРОВ а) правило треугольника:  б) правило параллелограмма:  	$\vec{a}+\vec{в}=(x_1+x_2;\ y_1+y_2;\ z_1+z_2)$

№	Геометрический образ	Координатная форма записи
2.	ВЫЧИТАНИЕ ВЕКТОРОВ 	$\vec{a} - \vec{в} = (x_1 - x_2;\ y_1 - y_2;\ z_1 - z_2)$
3.	УМНОЖЕНИЕ ВЕКТОРА НА ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЕ ЧИСЛО *k* 	$k\vec{a} = (kx_1;\ ky_1;\ kz_1)$

Линейная зависимость векторов

Линейная зависимость двух векторов	$b=\lambda a$	Коллинеарность векторов **a** и **b**	
Линейная зависимость трех векторов	$c=\lambda_1 a+\lambda_2 b$	Компланарность векторов **a**, **b**, **c**	

Декартова система координат



Основные формулы

Если вектор $\overline{a} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$ **, то:**

- длина $|\overline{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$;
- $\cos\alpha = \dfrac{x}{|\overline{a}|}; \quad \cos\beta = \dfrac{y}{|\overline{a}|}; \quad \cos\gamma = \dfrac{z}{|\overline{a}|}$;
- $np_l\overline{a} = |\overline{a}|\cos\varphi$, где ϕ - угол между вектором □a и положительным направлением оси l

Примеры:

№1. Найти длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах: $\overline{a}$ = (3; -5; 8) и $\overline{b}$ = (-1; 1; -4).

№2. Вектор , заданный в трехмерном пространстве составляет с координатными осями *Ox* и *Oy* углы α=60˚, β=120˚. Вычислить его координаты если |□*a* | = 2.

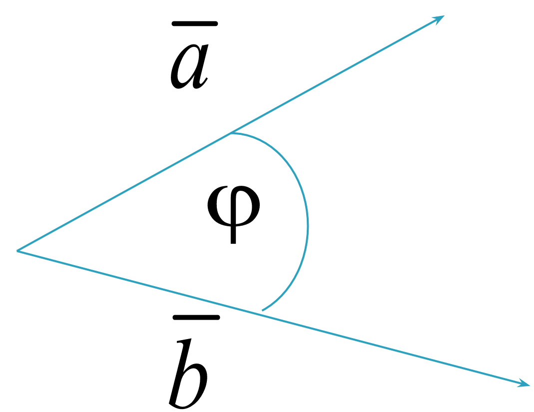
№3. Даны четыре точки $A(5;6;-8)$, $B(8;10;-3)$, $C(1;-2;4)$, $D(7;6;14)$. Выяснить, коллинеарны ли векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$?

НЕЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

- скалярное произведение двух векторов;
- векторное произведение двух векторов;
- смешанное произведение трех векторов

Скалярное произведение двух векторов

$$\overline{a}\cdot\overline{b} = (\overline{a},\overline{b}) = \left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|\cos\varphi - \text{число}$$



Свойства скалярного произведения

1. $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{a}$ (переместительное);
2. $\lambda \cdot \left(\overline{a} \cdot \overline{b}\right) = (\lambda \cdot \overline{a}) \cdot \overline{b} = \overline{a} \cdot (\lambda \cdot \overline{b})$(сочетательное);
3. $\left(\overline{a} + \overline{b}\right) \cdot \overline{c} = \overline{a} \cdot \overline{c} + \overline{b} \cdot \overline{c}$ (распределительное);
4. $\overline{a} \cdot \overline{a} = \left|\overline{a}\right|^2$;
5. $\overline{a} \perp \overline{b} \Leftrightarrow \overline{a} \cdot \overline{b} = 0$;

Координатная форма скалярного произведения

- Если $a=(a_x, a_y, a_z)$, $b=(b_x, b_y, b_z)$,то

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

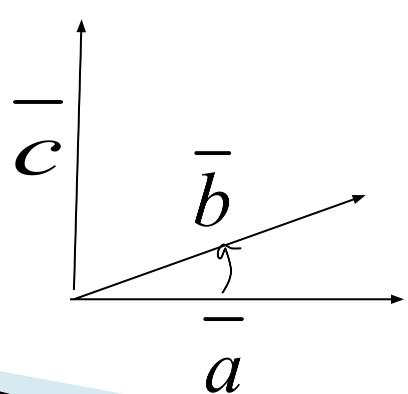
Векторное произведение двух векторов

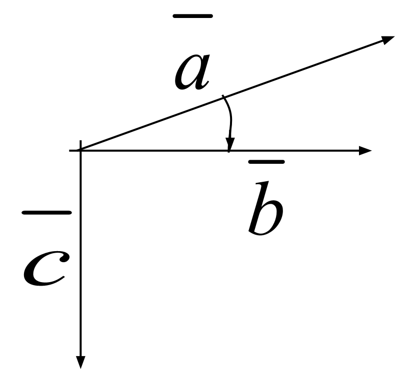
Векторным произведением вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$ называется вектор $\overline{c} = \overline{a} \times \overline{b} = \left[\overline{a}, \overline{b}\right]$, удовлетворяющий условиям :

1) $\left|\overline{c}\right| = \left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right| \sin \varphi;$

2) $\overline{c} \perp \overline{a}; \quad \overline{c} \perp \overline{b};$

3) тройка векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ – правая





Свойства векторного произведения

1. $\overline{a} \times \overline{b} = -\overline{b} \times \overline{a}$;
2. $\lambda \cdot \left(\overline{a} \times \overline{b}\right) = \left(\lambda \cdot \overline{a}\right) \times \overline{b} = \overline{a} \times \left(\lambda \cdot \overline{b}\right)$;
3. $\overline{a} \times \left(\overline{b} + \overline{c}\right) = \overline{a} \times \overline{b} + \overline{a} \times \overline{c}$;
4. $\overline{a} \times \overline{a} = 0$
5. $\overline{a} \times \overline{b} = 0 \Leftrightarrow \overline{a} \parallel \overline{b}$ (условие коллинеарности)

$$S = \left|\overline{a} \times \overline{b}\right|$$

- Если □a=(a_x, a_y, a_z), □b =(b_x, b_y, b_z),то

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Смешанное произведение трех векторов

$$(\overline{a}\times\overline{b})\cdot\overline{c}=\left(\left[\overline{a},\overline{b}\right],\overline{c}\right)=$$

$$=\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}=\overline{a}\overline{b}\overline{c}-\textit{это}\quad\textit{число}$$

Свойства смешанного произведения

1. $\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c} = -(\bar{a}\times\bar{c})\cdot\bar{b} = -(\bar{c}\times\bar{b})\cdot\bar{a} = (\bar{c}\times\bar{a})\cdot\bar{b} = (\bar{b}\times\bar{c})\cdot\bar{a}$;
2. если три данных вектора компланарны, то $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c} = 0$ (и наоборот);
   $\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c} = \bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})$;
3. $\bar{a}\cdot(\lambda\bar{b})\cdot\bar{c} = \bar{a}\cdot\bar{b}\cdot(\lambda\bar{c}) = \lambda(\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c})$
4. ;
5. если три вектора заданы координатами
   $a=(x_1; y_1; z_1)$, $b=(x_2; y_2; z_2)$, $c=(x_3; y_3; z_3)$,
   то смешанное произведение вычисляется по формуле:

$$\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Приложения нелинейных операций над векторами	Скалярное произведение
Геометрические приложения	$\cos(\bar{a},\bar{b})=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{\lvert\bar{a}\rvert\cdot\lvert\bar{b}\rvert}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$ $\text{Пр}_{\bar{b}}\,\bar{a}=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{\lvert\bar{b}\rvert}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$
Физические приложения	$A=W=\bar{F}\cdot\bar{S}$

Приложения нелинейных операций над векторами	Векторное произведение
Геометрические приложения	$\lvert\overline{c}\rvert = \lvert\overline{a}\times\overline{b}\rvert = S_{параллелограмма}$ $\frac{1}{2}\lvert\overline{c}\rvert = \frac{1}{2}\lvert\overline{a}\times\overline{b}\rvert = S_{треугольника}$
Физические приложения	$m_A\overline{F} = \overline{AM}\times\overline{F}$

Приложения нелинейных операций над векторами	Смешанное произведение
Геометрические приложения	$V_{\text{парал-да}} = \left\|\overline{a}\overline{b}\overline{c}\right\| = \left\| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \right\|$ $V_{\text{пирамиды}} = \frac{1}{6}\left\|\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}\right\|$
Физические приложения	—

Спасибо за внимание