# 4.2. Метод штрафных функций

Идея метода заключается в преобразовании условной задачи минимизации (4.1) – (4.3) в задачу поиска безусловного минимума вспомогательной функции

$$F(\bar{x}, r_t) = f(\bar{x}) + P(r_t, g_k(\bar{x})), \qquad (4.25)$$

где $P(r_t, g_k(\bar{x}))$ - штрафная функция,

$r_t > 0$ - параметр штрафа, $t = 0, 1, \ldots$ .

Штрафная функция определяет наказание за нарушение каждого из ограничений (4.2), (4.3) и таким образом препятствует выходу точки из допустимой области.

При выполнении ограничений штрафная функция равна нулю.

В качестве штрафной функции, как правило, используется функция следующего вида:

$$P(r_t, g_k(\bar{x})) = r_t \left\{ \sum_{k=1}^{m} [g_k(\bar{x})]^2 + \sum_{k=m+1}^{n} [g_k^+(\bar{x})]^2 \right\},$$

здесь $g_k^+(\bar{x})$ - «срезка» функции $g_k(\bar{x})$, определяемая следующим образом:

$$g_k^+(\bar{x}) = \begin{cases} g_k(\bar{x}), & \text{если} \quad g_k(\bar{x}) > 0, \\ 0, & \text{если} \quad g_k(\bar{x}) \le 0. \end{cases}$$

За начальную точку поиска $\overline{x^{(0)}}$ можно принять любую внешнюю точку, не удовлетворяющую ограничениям.

Для определения минимума вспомогательной функции $F(\bar{x}, r_t)$ решается последовательность задач $t = 0, 1, \ldots$ с бесконечно возрастающим параметром штрафа $r_t$. Для организации итерационного процесса $t = 0, 1, \ldots$ может быть использован любой численный метод безусловной минимизации. Полученная точка $\overline{x^{(t)}}$ используется в качестве начальной точки $\overline{x^{(0)}} = \overline{x^{(t)}}$ на следующей итерации.

Условие окончания процесса поиска

$$P(r_t, g_k(\overline{x^{(t)}})) \le \varepsilon \, .$$

Метод штрафных функций относится к *методу внешних штрафных функций.*

**Пример 4.4.** Решить задачу

$$f(\overline{x}) = x_1 + x_2 \ \to \min \, ,$$

$$\begin{cases} g_1(\overline{x}) = x_1^2 - x_2 = 0, \\ g_2(\overline{x}) = -x_1 < 0. \end{cases}$$

с точностью $\varepsilon = 0{,}01.$

**Решение.** Составим вспомогательную функцию

$$F(\overline{x}, r_t) = x_1 + x_2 + r_t \left[ (x_1^2 + x_2)^2 + \begin{cases} (-x_1)^2, & x_1 > 0 \\ 0\,, & x_1 \le 0 \end{cases} \right].$$

Решая задачу безусловной минимизации методом наискорейшего градиентного спуска для возрастающей последовательности $\{r_t\}: 1, 2, 4, 16, \ldots$ , получим

$$\overline{x^*} = (0{,}000975; -0{,}000976),$$

$$f(\overline{x^*}) = 0.$$

# 4.3. Метод барьерных функций

В данном методе предполагается, что ограничения заданы в виде (4.3)

$$g_k(\overline{x}) \le 0, \;\; k = \overline{1, m}.$$

Идея метода состоит в том, что вдоль каждой границы области ограничений устанавливается «барьер». Следовательно, если поиск начинается из внутренней точки, то минимум будет достигаться внутри области ограничений.

Для формирования барьера используются следующие типы штрафов:

- штраф, задаваемый обратной функцией

$$P(r_t, g_k(\overline{x})) = -r_t \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{g_k(\overline{x})};$$

- логарифмический штраф

$$P(r_t, g_k(\overline{x})) = -r_t \sum_{k=1}^{m} \ln[-g_k(\overline{x})].$$

Обе штрафные функции стремятся к бесконечности при приближении к границе области изнутри.

За начальную точку поиска $\overline{x^{(0)}}$ можно принять любую внутреннюю точку, удовлетворяющую ограничениям.

Для поиска минимума вспомогательной функции $F(\bar{x}, r_t)$ (4.25) решается последовательность задач $t = 0, 1, \ldots$ с монотонно убывающей последовательностью $r_t$. На практике обычно эта последовательность рассчитывается по рекуррентному соотношению

$$r_{t+1} = \frac{r_t}{C}, \quad t = 0, 1, \ldots \quad ,$$

где $r_0$ - начальное значение, обычно выбирается $r_0 = 1, 10, 100$;

$C$ - константа. Удачным может быть выбор

$$\mathrm{C} = 10, 12, 16.$$

Поиск минимума функции $F(\bar{x}, r_t)$ при заданном параметре $r_t$ можно проводить любым методом безусловной минимизации. Полученная точка $\overline{x^{(t)}}$ используется в качестве начальной точки $\overline{x^{(0)}} = \overline{x^{(t)}}$ на следующей итерации.

Критерием окончания поиска служит неравенство

$$\left| P(r_t, g_k(\overline{x^{(t)}}) \right| \le \varepsilon \, .$$

Рассмотренный подход относят к методам *внутренних штрафных функций.*

**Пример 4.6.** Решить задачу

$$f(\overline{x}) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2 \ ,$$
$$g_1(\overline{x}) = x_1 + x_2 - 5 = 0.$$

при $\varepsilon = 0{,}01, \ r_0 = 100, \ c = 10.$

**Решение.** Составим вспомогательную функцию

$$F(\overline{x}, r_t) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2 - r_t \ln(5 - x_1 - x_2).$$

Решая задачу методом наискорейшего градиентного спуска, получим

$$\overline{x^*} = (2{,}499; 2{,}499).$$
$$F(\overline{x^*}; 0{,}001) = 4{,}5.$$

**Пример 4.5.** Используя штрафную функцию минимизировать функцию $f(x)$ при ограничениях $x \geq 2$.

Перепишем ограничения в виде $2 - x \leq 0$.

Составим вспомогательную функцию

$$F(x, r_t) = x + \frac{r}{(2-x)^2}.$$

На рис.4.2 изображен график функции $F(x, r_t)$ и показано положение точек ее минимума для различных значений

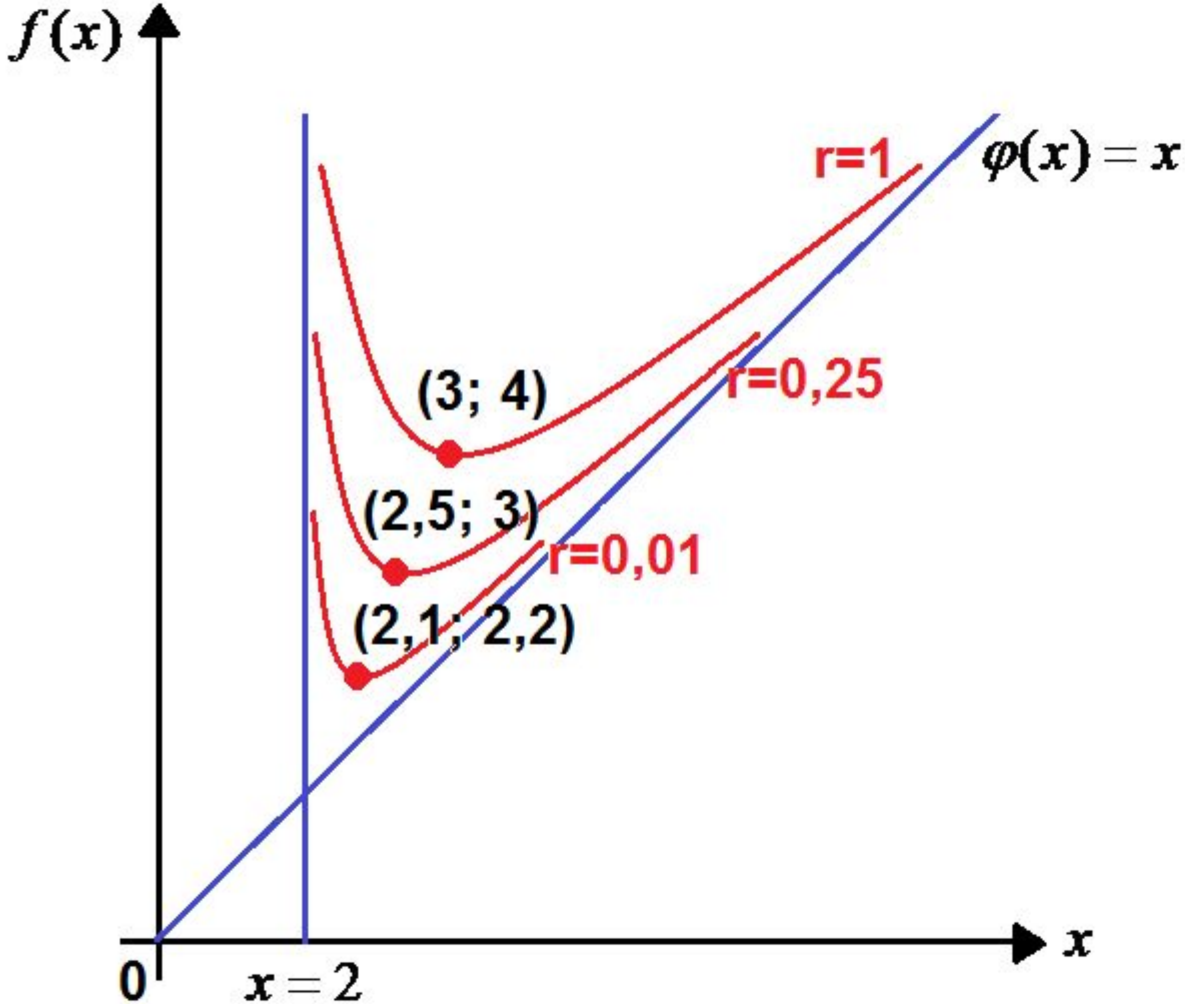


Рис.4.2