



# ДВИЖЕНИЕ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ ПО ОРБИТЕ (АСТРОДИНАМИКА)

В.Н. Бранец, Р.В. Федулов

Лекция из курса «Системы управления движением,  
ориентации и навигации космических аппаратов»



- 
1. ЗАДАЧА ДВУХ ТЕЛ. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ПАРАМЕТРЫ ОРБИТ
  2. КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ ОРБИТАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ
  3. КРИВИЗНА ЗЕМЛИ
  4. ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ ЗЕМЛИ
  5. УЧЕТ ВОЗМУЩЕНИЙ В ВЫЧИСЛЕНИИ ОРБИТ

## КРАТКИЙ ИСТОРИЧЕСКИЙ ОБЗОР

**Астродинамика** – изучение и описание движения искусственно созданных космических объектов в космическом пространстве под действием естественной космической среды и при воздействии специально создаваемых сил. Ведет отсчет с 1957 г.

**Небесная механика** – описание движения планет Солнечной системы в естественной среде. И...ичных времен.



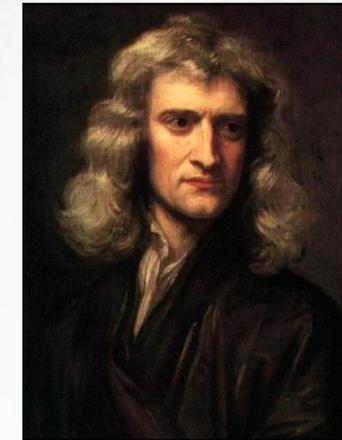
**Тихо Браге**  
(1546 – 1601)

Определил положение и периоды обращения планет с точностью до 1 угловой минуты по положению и 1 секунды по времени.



**Иоганн Кеплер**  
(1571 – 1630)

Вывел основные законы движения небесных тел.



**Исаак Ньютон**  
(1642 – 1727)

Разработал классическую механику движения тел в порождаемом ими гравитационном поле.

## Первый закон Кеплера

Орбита каждого из взаимодействующих тел является коническим сечением, в фокусе которого находится центр масс. Если тела имеют ограниченное расстояние между собой на длительном промежутке времени, то их орбиты являются эллипсами, при неограниченном расстоянии – это гиперболы.

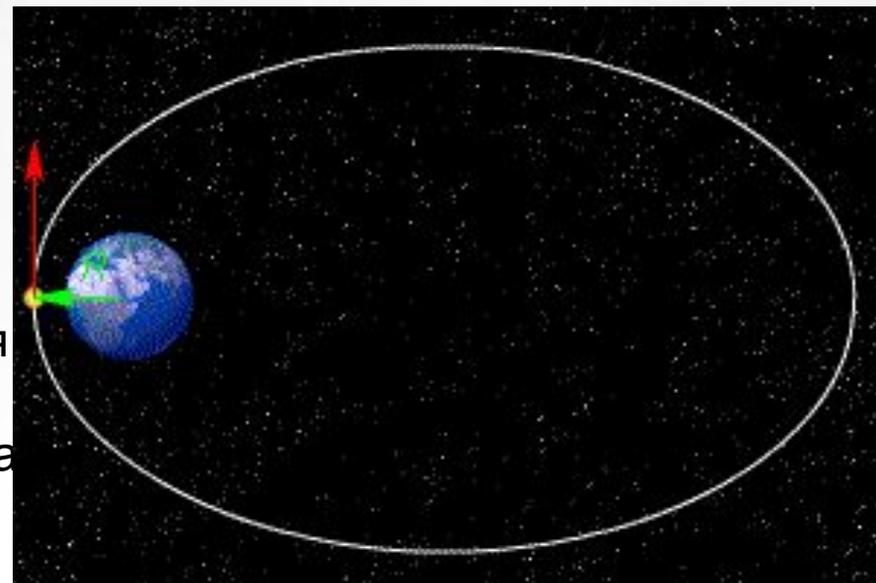
## Второй закон Кеплера

Линия, соединяющая два тела при вращении, описывает равные площади в равные промежутки времени (см. рисунок).

## Третий закон Кеплера

Сумма масс двух тел, взаимно обращающихся по эллиптической орбите, умноженная на квадрат периода обращения пропорциональна кубу среднего расстояния между ними.

$$(M + m)T^2 \sim \bar{r}^3$$



Для просмотра анимации нажмите  
F5

## УРАВНЕНИЯ ЗАДАЧИ ДВУХ ТЕЛ

Сила взаимодействия масс подчиняется закону:

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm\mathbf{r}}{r^3}$$

$\mathbf{F}$  – сила притяжения двух объектов массами  $M$  и  $m$

$\mathbf{r}$  – радиус-вектор, соединяющий их центры

$G = 6,6726 \pm 0,0005 \cdot 10^{-11} \text{ м}^2/\text{кг} \cdot \text{с}^2$  – гравитационная постоянная

$M = 5,9742 \cdot 10^{24} \text{ кг}$  – масса Земли

$\mu = G \cdot M = 398,6005 \cdot 10^{12} \text{ м}^3/\text{с}^2$

Уравнения движения тел идентичны:

$$\frac{d^2 r_M}{dt^2} M + \frac{GMm}{r^2} = 0$$

$$\frac{d^2 r_m}{dt^2} m + \frac{GMm}{r^2} = 0$$

Сокращаем массы и складываем уравнения >>>

## ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ЗАДАЧИ ДВУХ ТЕЛ

Основное уравнение задачи двух тел (уравнение невозмущённого движения):

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} = 0$$

$$\mu = G(M+m) \approx GM$$

Удобно ввести потенциальную функцию основной притягивающей массы:

$$U = \frac{GM}{r} = \frac{\mu}{r}$$

Тогда сила притяжения, действующая на единицу массы, находящейся в точке  $r$ , вычисляется как градиент  $U$ :

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \text{grad } U$$

Основное уравнение задачи двух тел имеет 6 интегралов.

**«Интеграл» = «закон сохранения»**

**Интеграл энергии** получается умножением обеих частей основного уравнения задачи двух тел

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r}$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

скалярно на вектор скорости

$$2 \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{d}{dt} \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = -\frac{\mu}{r^3} 2\mathbf{r} \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

Интегрируем обе части:

$$\left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 = \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 = \mathbf{v}^2 = V^2 = \frac{2\mu}{r} + h$$

где  $h$  – константа интегрирования.

**Физический смысл:** кинетическая энергия преобразуется в потенциальную и наоборот:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{m\mu}{r} + mh$$

## ИНТЕГРАЛ МОМЕНТА КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ (ИНТЕГРАЛ ПЛОЩАДЕЙ)

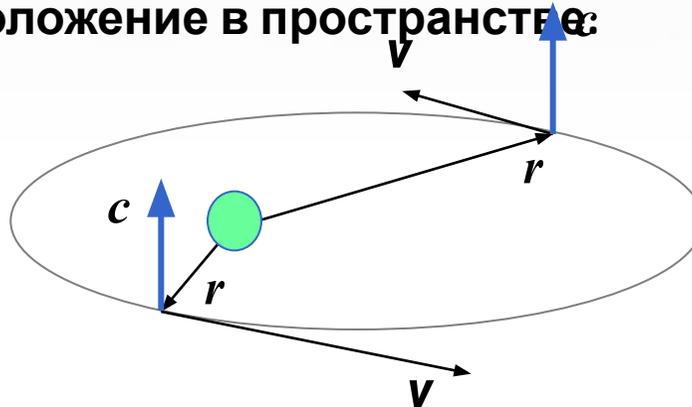
Интеграл момента количества движения (интеграл площадей) получается векторным умножением обеих частей основного уравнения задачи двух тел на  $\mathbf{r}$ :

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r}$$
$$\mathbf{r} \times \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left( \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = 0$$

Интегрируем обе части:

$$\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{c}$$

где  $\mathbf{c}$  – константа интегрирования, имеющая размерность момента импульса (количества движения). Следовательно,  $\mathbf{r}(t)$  изменяется, оставаясь в неподвижной плоскости, перпендикулярной  $\mathbf{c}$ . **Физический смысл: в задаче двух тел плоскость орбиты сохраняет своё положение в пространстве:**



**Интеграл Лапласа** получается векторным умножением обеих частей основного уравнения задачи двух тел на  $\mathbf{c}$ :

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r}$$

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \times \mathbf{c} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} \times \mathbf{c}$$

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \times \mathbf{c} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} \times \left( \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)$$

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \times \mathbf{c} = \frac{\mu}{r^3} \left[ r^2 \frac{d\mathbf{r}}{dt} - \left( \mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) \mathbf{r} \right]$$

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \times \mathbf{c} = \mu \frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{r}}{r} \right)$$

$$\text{Т.К.} \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} \frac{dr}{dt}$$

Интегрируя обе части, получим

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{c} = \mu \frac{\mathbf{r}}{r} + \mu \mathbf{f}$$

где  $\mathbf{f}$  – константа интегрирования (вектор Лапласа).

Можно видеть, что  $\mathbf{c} \cdot \mathbf{f} = 0$ , т.е. вектор  $\mathbf{f}$  лежит в плоскости орбиты.

Умножая обе части уравнения скалярно на  $\mathbf{r}$ , получим

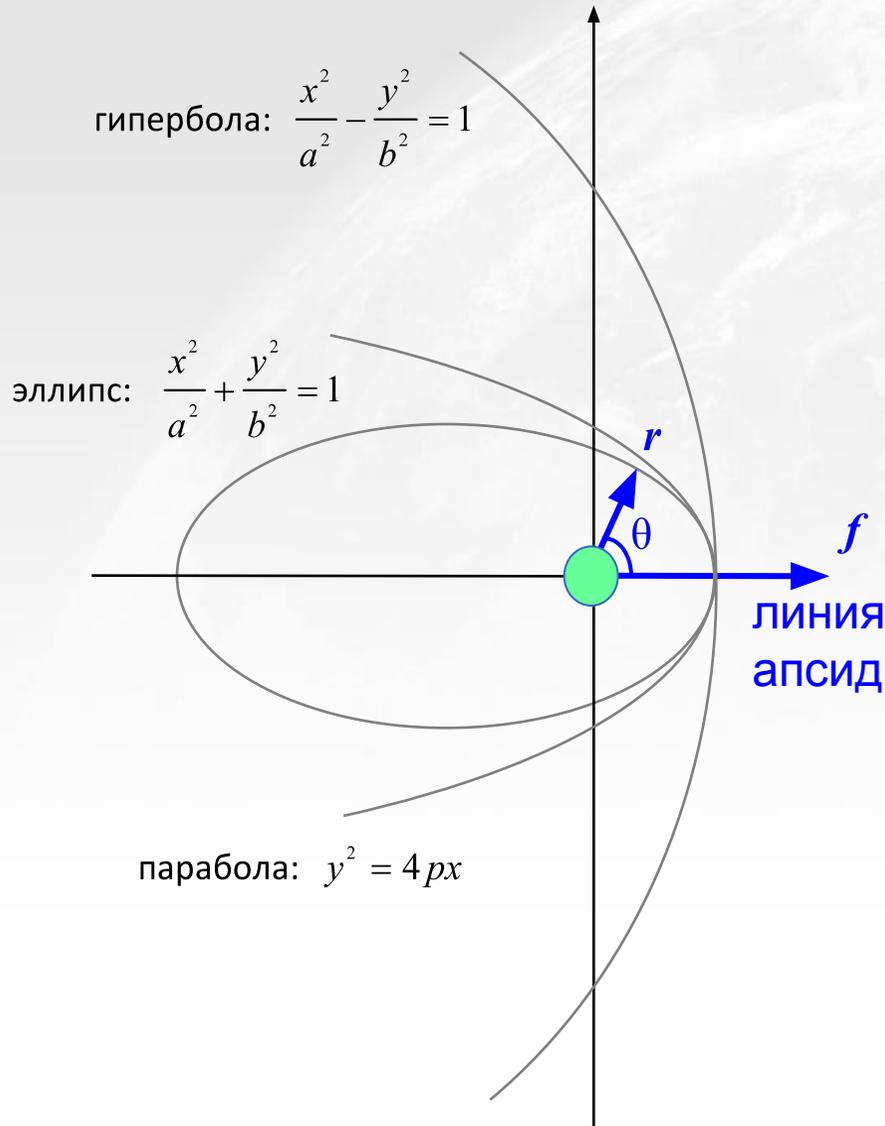
$$\mathbf{r} \cdot \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{c} \right) = \mathbf{r} \cdot \left( \mu \frac{\mathbf{r}}{r} + \mu \mathbf{f} \right)$$

$$\left( \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) \cdot \mathbf{c} = \mu (r + \mathbf{f} \cdot \mathbf{r})$$

$$c^2 = \mu (r + \mathbf{f} \cdot \mathbf{r})$$

Это равенство называется интегралом Лапласа.

# ОРБИТЫ ЗАДАЧИ ДВУХ ТЕЛ



$$f \cdot r = \mu e \cdot r \cdot \cos \theta$$

где  $e = \frac{f}{\mu}$  – эксцентриситет,

$\theta$  угол истинной аномалии

Преобразуем интеграл

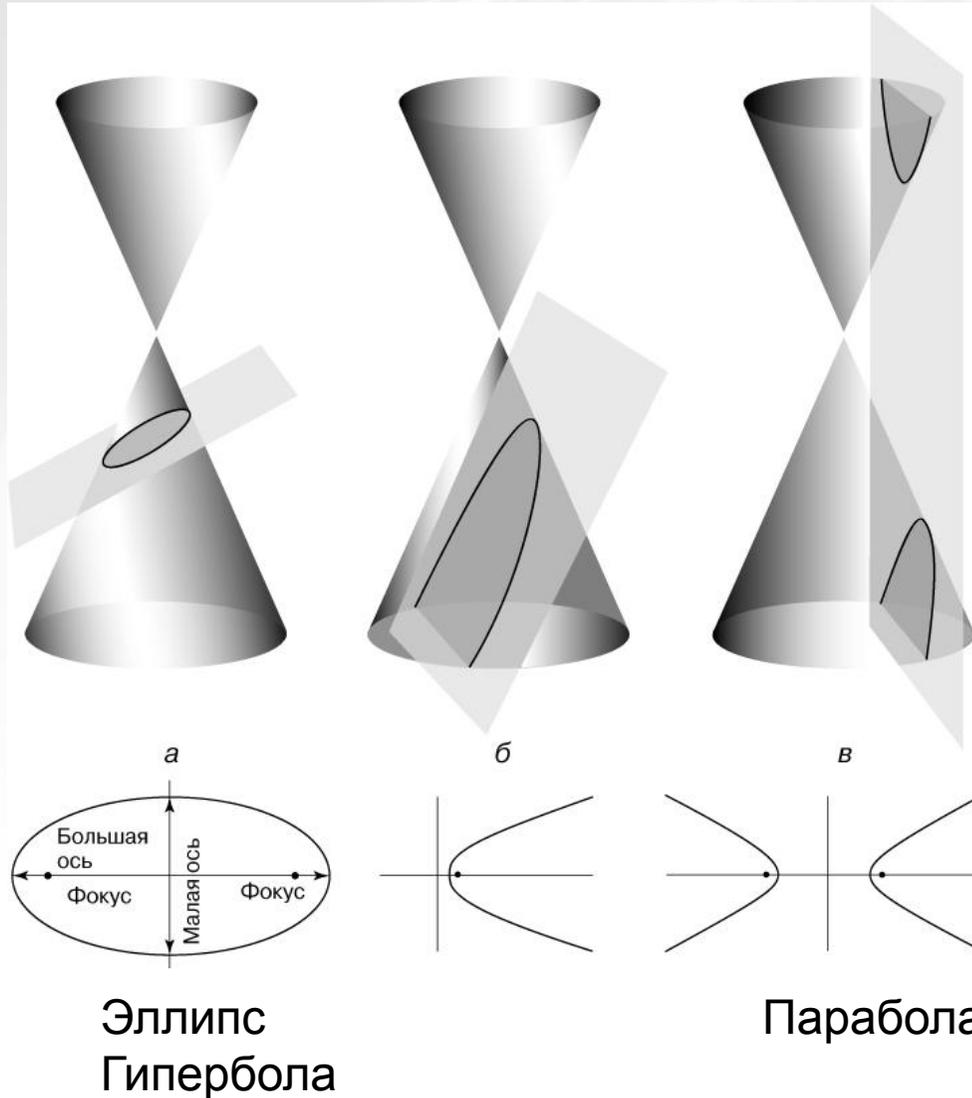
Лапласа:  $c^2 = \mu(r + f \cdot r)$

$$c^2 = \mu(r + r e \cos \theta)$$

Отсюда имеем формулу конического сечения:

$$r = \frac{c^2}{\mu(1 + e \cos \theta)} = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

где  $p = \frac{c^2}{\mu}$  – параметр орбиты



Окружность:

$$a = b > 0, \quad e = 0$$

Эллипс:

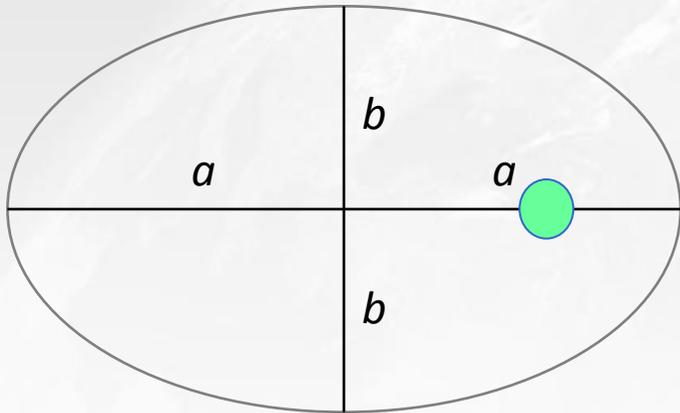
$$a > b > 0, \quad e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$

Парабола:

$$a = \infty, \quad e = 1$$

Гипербола:

$$a < 0, \quad e^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2}$$



$$e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p}$$

$$r_a = a(1 + e)$$

$$r_p = a(1 - e)$$

$$p = \frac{b^2}{a} = a(1 - e^2)$$

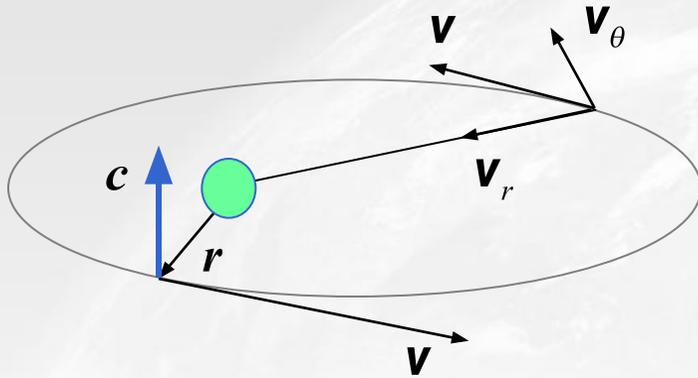
$$b = a\sqrt{1 - e^2}$$

$a$  – большая полуось;

$b$  – малая полуось;

$r_a$  – расстояние от фокуса до апоцентра орбиты;

$r_p$  – расстояние от фокуса до перигея орбиты.



Тангенциальная компонента скорости:

$$V^2 = V_r^2 + V_\theta^2 = (\dot{r})^2 + \left( r \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} = r V_\theta = r^2 \frac{d\theta}{dt} = r^2 \dot{\theta}$$

$$V_\theta = \dot{r} \theta = \frac{c}{r} = \frac{c}{p} (1 + e \cos \theta)$$

Дифференцируя формулу конического сечения, получим радиальную компоненту скорости:

$$\frac{dr}{dt} = V_r = \frac{p}{(1 + e \cos \theta)^2} \cdot \dot{e} \theta \sin \theta = \frac{pe \sin \theta}{p^2} \cdot r^2 \dot{\theta} = \frac{ec}{p} \sin \theta$$

Складывая радиальную и тангенциальную компоненту скорости, получим:

$$V^2 = V_r^2 + V_\theta^2 = \left( \frac{ec}{p} \sin \theta \right)^2 + \frac{c^2}{p^2} (1 + e \cos \theta)^2 = \frac{c^2}{p^2} (1 + 2e \cos \theta + e^2)$$

## ИНТЕГРАЛ ЭНЕРГИИ ЧЕРЕЗ ПАРАМЕТРЫ ОРБИТЫ

Для определения константы интегрирования  $h$  интеграла энергии возьмем на орбите точку  $\theta=0$ . Для этой точки  $r=p/(1+e)$ . В этой точке квадрат скорости будет равен

$$V^2 = \frac{c^2}{p^2}(1+2e+e^2) = \left(\frac{c}{p}\right)^2 (1+e)^2 = \frac{\mu}{p}(1+e)^2$$
$$h = V^2 - \frac{2\mu}{r} = \frac{\mu}{p}(1+e)^2 - \frac{2\mu}{r} = -\frac{\mu}{p}(1-e^2) = -\frac{\mu}{a}$$

В зависимости от типа конического сечения интеграл энергии выражается следующим образом:

$$V^2 = \begin{cases} \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \text{ для эллипса} \\ \mu \frac{2}{r} \text{ для параболы} \\ \mu \left( \frac{2}{r} + h \right) \text{ для гиперболы} \end{cases}$$

## ШЕСТОЙ ИНТЕГРАЛ – ВРЕМЯ ПРОХОЖДЕНИЯ ПЕРИЦЕНТРА

Радиус-вектор заметает площадь  $A$  с секторной скоростью

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\pi r^2}{2\pi} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{c}{2}$$

С другой стороны, площадь эллипса равна  $\pi ab$ , т.е. секторная скорость равна площади, деленной на период обращения  $T$ :

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\pi ab}{T}$$

$$T = \frac{2\pi ab}{c} = \frac{2\pi a \cdot a\sqrt{1-e^2}}{c} = \frac{2\pi a^2 \sqrt{1-e^2}}{\sqrt{p\mu}} = \frac{2\pi a^2 \sqrt{1-e^2}}{\sqrt{\mu} \sqrt{a(1-e^2)}} = \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}} = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$$

Из верхнего уравнения следует:

$$dt = \frac{d\theta}{c} r^2 = \frac{d\theta}{c} \frac{p^2}{(1+e\cos\theta)^2}$$

При интегрировании определится последняя шестая константа, являющаяся временем  $T$  прохождения перицентра орбиты:

$$t = \frac{p^2}{c} \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^2} + \tau$$

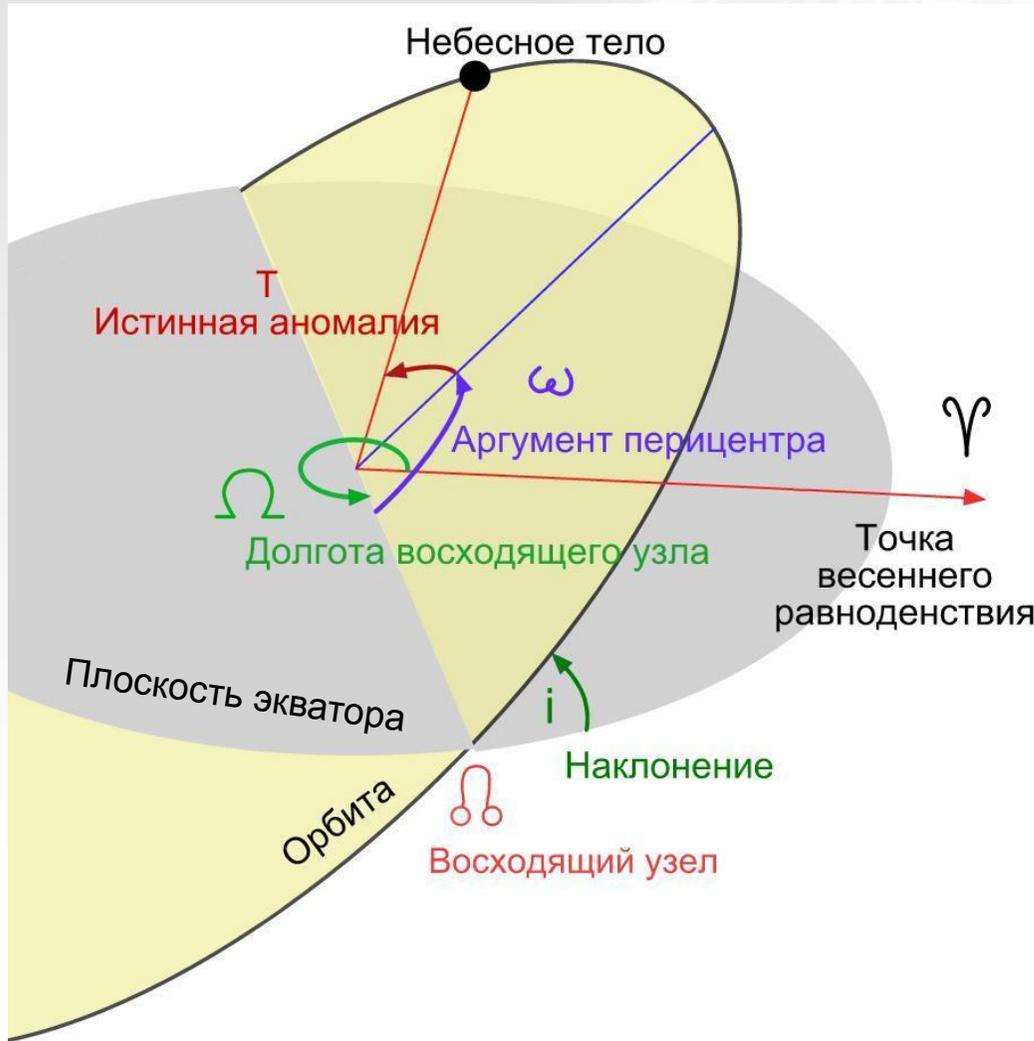
1. Интеграл энергии;
2. Интеграл вектора количества движения  $\mathbf{c} = (c_x; c_y; c_z)$  – три параметра;
3. Вектор Лапласа  $\mathbf{f}$ , задающий положение большой полуоси;
4. Время  $t$  прохождения заданной точки орбиты.

Векторы  $\mathbf{c}$  и  $\mathbf{f}$  задают положение плоскости орбиты в пространстве.

Параметры  $a/p/T$  задают форму орбиты.

Параметр  $t$  определяет время прохождения заданной точки орбиты.

# КЕПЛЕРОВЫ ЭЛЕМЕНТЫ ОРБИТЫ



$i$  – наклонение плоскости орбиты к экватору;

$\Omega$  – долгота восходящего узла – угол, отсчитываемый от линии весеннего равноденствия до точки пересечения орбиты с экватором при движении КА из южного полушария в северное;

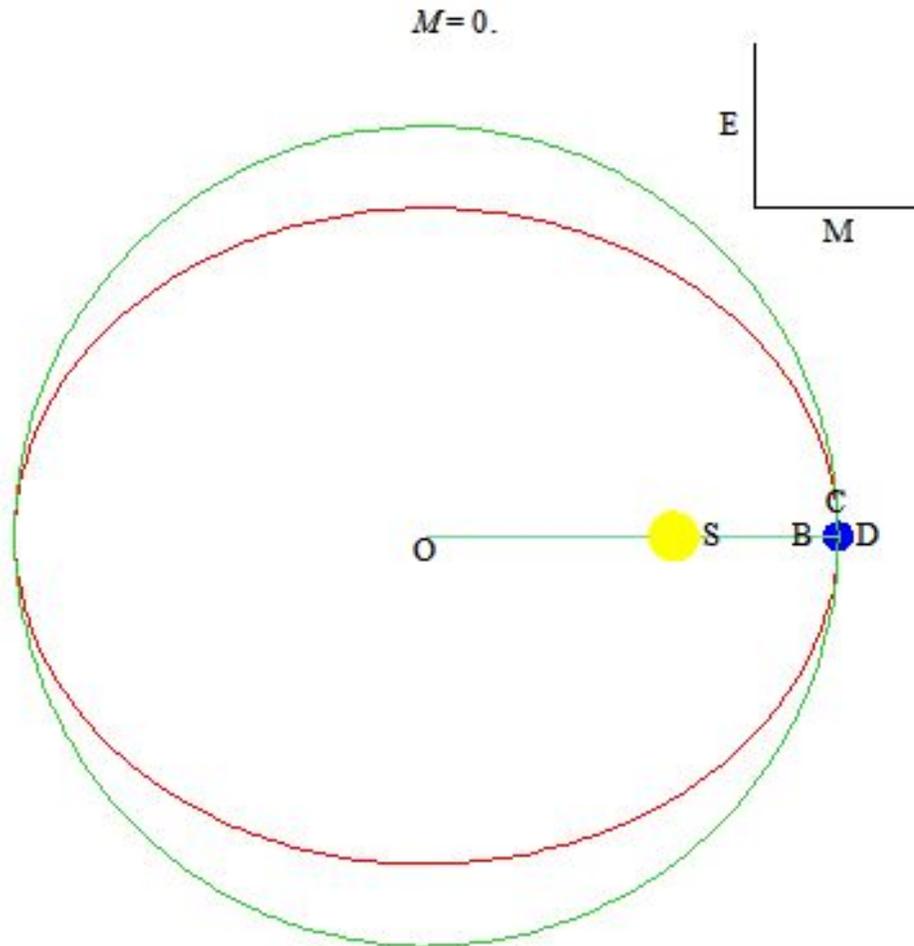
$\omega$  – аргумент перицентра, измеряемый против часовой стрелки от восходящего узла в плоскости орбиты;

$a$  или  $p$  – главная полуось орбиты или полуфокальный параметр;

$e$  – эксцентриситет;

$\theta$ ,  $M$ ,  $t$  – истинная, средняя аномалии, задающие положение КА относительно перицентра, и время прохождения перицентра.

# ОРБИТАЛЬНЫЕ АНОМАЛИИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ОРБИТЫ



Для просмотра анимации нажмите  
F5

**Истинная аномалия  $\theta$**  – действительное угловое положение КА на орбите. Простого аналитического соотношения для ее нахождения не существует.

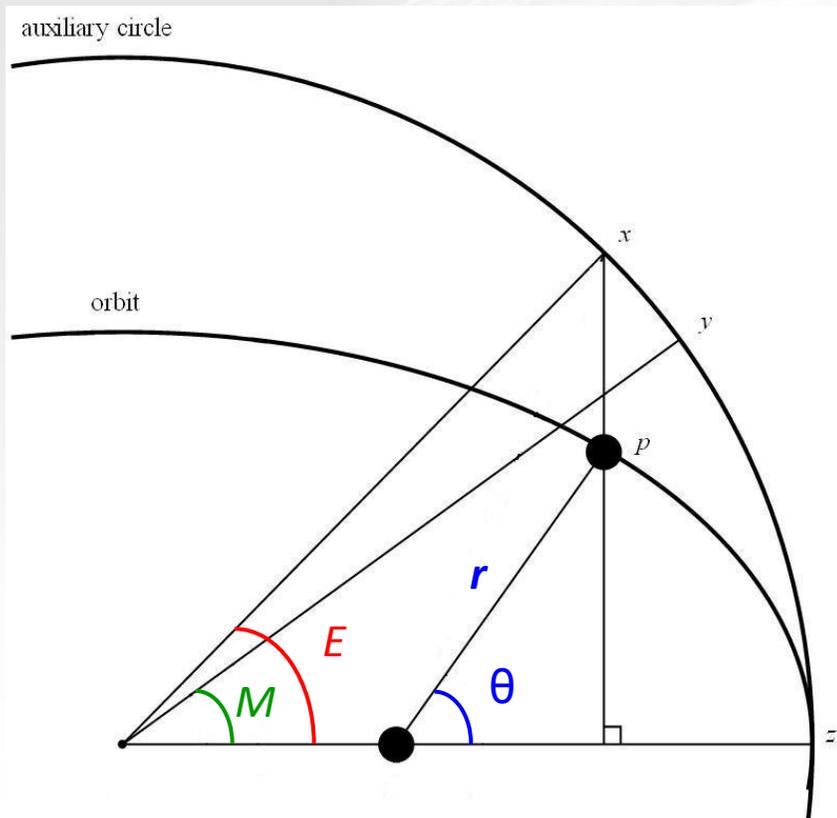
**Средняя аномалия  $M$**  – отсчитываемое от перигея угловое положение гипотетического тела, движущегося с постоянной угловой скоростью по круговой орбите:  
$$M = \frac{2\pi}{T} \cdot \Delta t$$

$T$  – период обращения;  
 $\Delta t$  – время от прохождения перигея.

Также  $M$  равна произведению среднего движения на время:  
$$M = n \cdot \Delta t$$

**Эксцентриситетная аномалия  $E$**  – угол  $\cos E = \frac{r}{a}$

# СВЯЗЬ МЕЖДУ ИСТИННОЙ И ЭКСЦЕНТРИЧЕСКОЙ АНОМАЛИЕЙ



Расстояние от центра эллипса до фокуса:  
 $ae$ .

Из геометрии будем иметь:

$$r \cos \theta = a(\cos E - e)$$

$$r \sin \theta = b \sin E$$

$$r = a(1 - e \cos E)$$

## ВЫВОД УРАВНЕНИЯ КЕПЛЕРА

Интеграл площадей:

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\mu p} = \sqrt{\mu a(1-e^2)}$$

Интеграл энергии для эллиптической орбиты:

$$V^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

Подставляя производную истинной аномалии по времени из первого уравнения во второе, получаем:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = -\frac{\mu a(1-e^2)}{r^2} + \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) = \frac{\mu}{r^2 a} \left[ a^2 e^2 - (a-r)^2 \right]$$

Средняя угловая скорость движения:

$$n = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$$

Тогда уравнение преобразуется к виду:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{an}{r} \sqrt{a^2 e^2 - (a-r)^2}$$

$$ndt = \frac{rdr}{a\sqrt{a^2e^2 - (a-r)^2}} = (1 - e \cos E) dE$$

Интегрируем:

$$n(t - t_0) = (E - E_0) - e(\sin E - \sin E_0)$$

$$M = E - \sin E$$

Это уравнение называется уравнением Кеплера. Оно не имеет решения в элементарных функциях.

### Схема решения простых задач

1. Для заданных  $r$  и  $\theta$  найти  $t$ : по  $r$  и  $\theta$  находим  $E$ , затем  $M$ , после чего  $t$ .
2. Для заданного  $t$  найти  $r$  и  $v$ : по  $t$  находится  $M$ , затем методом итераций находится  $E$ :  
 $E_{n+1} = E_n + M$ , и затем определяются искомые величины.

Для круговых орбит, для которых  $e$  мало, истинная аномалия может быть выражена в виде ряда как функция  $M$ :

$$\theta = M + 2e \sin M + \frac{5}{4}e^2 \sin 2M + \dots$$

## ЗАДАЧА: ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ПО НАЧАЛЬНЫМ УСЛОВИЯМ

Дано:  $\mathbf{r}_0(t_0), \mathbf{v}_0(t_0)$ .

Найти: положение и форму орбиты, координаты и скорость тела на орбите.

Сразу можем найти постоянную момента количества движения:  $\mathbf{c} = \mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0$

Тогда параметр орбиты

$$p = \frac{c^2}{\mu}$$

Введем правую систему координат:  $i_x, i_y, i_z$  такую, что

$i_x, i_y$  – лежат в плоскости орбиты,

$i_x$  – направлена на перицентр,

$i_z$  – нормальна к плоскости орбиты (с положительного направления  $i_z$  орбитальное движение происходит против часовой стрелки).

$$V_r = \mathbf{v} \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{pe\dot{\theta} \sin \theta}{(1 + e \cos \theta)^2} = \frac{ec \sin \theta}{p}$$

$$V_\theta = r\dot{\theta} = \frac{c}{r} = \frac{c}{p}(1 + e \cos \theta)$$

Из этих формул следуют равенства для момента  $t_0$  с учетом  $\frac{c^2}{\mu}$

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОРБИТЫ

На момент  $t_0$  будем иметь:

$$\mu e \sin \theta_0 = \frac{c(\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v}_0)}{r_0}$$

$$\mu e \cos \theta_0 = \frac{c}{r_0^2} - \mu$$

Делим на  $\mu$ , возводим в квадрат, складываем уравнения и получаем эксцентриситет орбиты:

$$e^2 = \left( \frac{c^2}{\mu r_0} - 1 \right)^2 + \left( \frac{c}{\mu r_0} (\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v}_0) \right)^2$$

Единичный вектор  $\mathbf{i}_x$  (в направлении перицентра) равен

$$\mathbf{i}_x = \frac{1}{r_0} \left[ \mathbf{r}_0 \cos \theta_0 - (\mathbf{i}_z \times \mathbf{r}_0) \sin \theta_0 \right] = \frac{1}{\mu e} \left[ \left( \mathbf{v}_0^2 - \frac{\mu}{r_0} \right) \mathbf{r}_0 - (\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v}_0) \mathbf{v}_0 \right]$$

Итак, найдены величины:

$c, \mathbf{i}_z$  – определяют плоскость орбиты;

$\mathbf{i}_x, \mathbf{i}_y$  – определяют положение орбиты в плоскости;

$\mathbf{p}, e$  – определяют форму орбиты;

Таким образом, орбита определена полностью. Найдём положение и скорость тела на

## ПОЛОЖЕНИЕ И СКОРОСТЬ ТЕЛА НА ОРБИТЕ

Радиус-вектор тела найдется из геометрии с учетом формулы конического сечения:

$$\mathbf{r} = r \cos \theta \mathbf{i}_x + r \sin \theta \mathbf{i}_y = \frac{p}{1 + e \cos \theta} (\mathbf{i}_x \cos \theta + \mathbf{i}_y \sin \theta)$$

Дифференцируя это соотношение и принимая во внимание выражения для радиальной и тангенциальной компоненты скорости, получаем скорость в тех же координатах:

$$\mathbf{v} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} [-\mathbf{i}_x \sin \theta + \mathbf{i}_y (\cos \theta + e)]$$

Последние два уравнения справедливы, в том числе и для начальной точки движения, что позволяет определить вектора через начальные значения скорости и положения

$$\mathbf{i}_x = \frac{e + \cos \theta_0}{p} \mathbf{r}_0 - \frac{r_0 \sin \theta_0}{\sqrt{\mu p}} \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{i}_y = \frac{\sin \theta_0}{p} \mathbf{r}_0 + \frac{r_0 \cos \theta_0}{\sqrt{\mu p}} \mathbf{v}_0$$

Подставляя это в выражения для векторов положения и скорости, получаем следующие зависимости текущих векторов положения и скорости в функции от истинной аномалии:

$$\mathbf{r} = \left\{ 1 - \frac{r_0}{p} [1 - \cos(\theta - \theta_0)] \right\} \mathbf{r}_0 + \frac{r r_0}{\sqrt{\mu p}} \sin(\theta - \theta_0) \mathbf{v}_0$$

$$\mathbf{v} = \left\{ \frac{\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v}_0}{p r_0} [1 - \cos(\theta - \theta_0)] - \frac{1}{r_0} \sqrt{\frac{\mu}{p}} \sin(\theta - \theta_0) \right\} \mathbf{r}_0 + \left\{ 1 - \frac{r_0}{p} [1 - \cos(\theta - \theta_0)] \right\} \mathbf{v}_0$$

Истинная аномалия вычисляется разложением в ряд (см. выше), где  $M$  – линейная функция времени.

Ричард Бэттин предложил формулы для текущих значений положения и скорости на эллиптической орбите, справедливые для любых орбит и эксцентриситетов:

$$\mathbf{r} = \left\{ 1 - \frac{a}{r_0} [1 - \cos(E - E_0)] \right\} \mathbf{r}_0 + \left\{ t - \frac{(E - E_0) - \sin(E - E_0)}{\sqrt{\mu/a^3}} \right\} \mathbf{v}_0$$

$$\mathbf{v} = -\frac{\sqrt{\mu a}}{r r_0} \sin(E - E_0) \mathbf{r}_0 + \left\{ 1 - \frac{a}{r} [1 - \cos(E - E_0)] \right\} \mathbf{v}_0$$

Уравнение Кеплера, по которому для заданного времени необходимо определить соответствующую ему эксцентрическую аномалию:

$$\sqrt{\frac{\mu}{a^3}} t = (E - E_0) + \frac{\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v}_0}{\sqrt{\mu a}} [1 - \cos(E - E_0)] - \left( 1 - \frac{r_0}{a} \right) \sin(E - E_0)$$

Решение этого уравнения находится методом последовательных итераций:

$$E_{n+1} = E_n + \frac{dE}{dt} (t_{n+1} - t_n)$$



Ричард Бэттин (1925 – 2014) главный конструктор навигационных систем кораблей «Аполлон», директор программы «Аполлон», профессор аэронавтики и астронавтики Массачусетского технологического института.

## КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ ОРБИТАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Рассматривая формулу для скорости тела на эллиптической орбите

$$V^2 = \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

можно видеть, что минимальной по затратам скоростью, сообщаемой КА ракетой-носителем, является скорость на круговой орбите на минимальной высоте. Положив в уравнении  $r = a$ , получим

$$V = \sqrt{\frac{\mu}{r}}$$

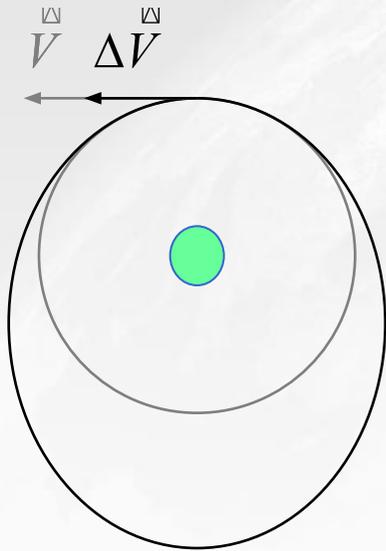
Эта скорость называется **первой космической**.

Планета	1-я косм. скорость
Меркурий	3 км/с
Венера	7,3 км/с
Земля	7,9 км/с
Марс	3,6 км/с
Юпитер	42,2 км/с
Сатурн	25,1 км/с
Луна	1,7 км/с

**Вторая космическая скорость** – это минимальная скорость ухода от планеты. Если в формуле для скорости тела положить большую полуось, равной бесконечности, получим

$$V_2 = \sqrt{2} V_1$$

## МГНОВЕННЫЙ ИМПУЛЬС ПО НАПРАВЛЕНИЮ СКОРОСТИ



Дифференцируя по времени интеграл энергии, получим:

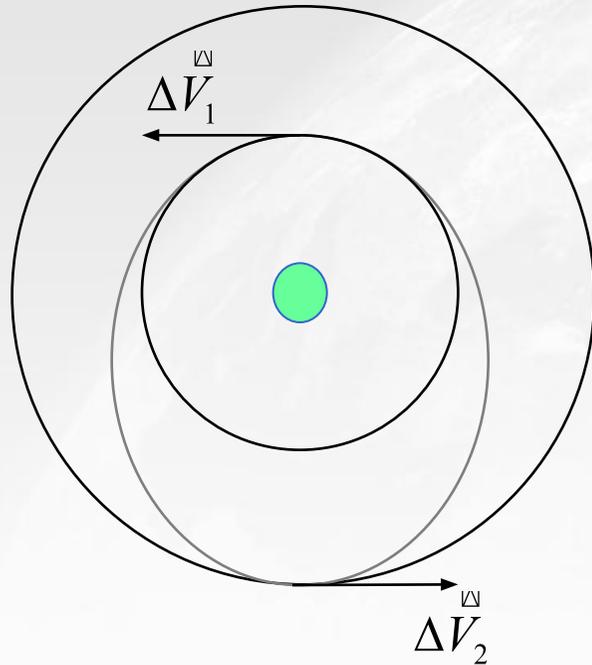
$$2VdV = \mu \frac{da}{a^2}$$

Разделив это выражение на выражение для интеграла энергии, принимая  $r = a$ , будем иметь:

$$2 \frac{dV}{V} = \frac{da}{a}$$

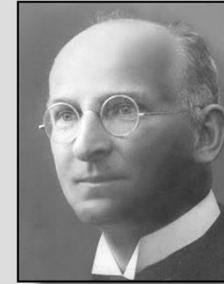
Пусть орбита имеет радиус 6600 км и круговую скорость 8 км/с. Тогда если изменение скорости происходит на 1 м/с, что составляет  $1/8000 = 1,25 \cdot 10^{-4}$ , то соответствующее увеличение высоты составит  $2,5 \cdot 10^{-4} \cdot 6600 \text{ км} = 1,65 \text{ км}$ . Такое же уменьшение скорости (импульс гашения скорости) приведет к такому же изменению высоты орбиты, но в сторону ее уменьшения. Посадочный импульс изменения скорости порядка 100 м/сек понижает высоту орбиты в противоположной точке примерно на 170 км, захват атмосферой КА происходит на высоте примерно 100 км.

## ДВУХИМПУЛЬСНЫЙ ПЕРЕХОД



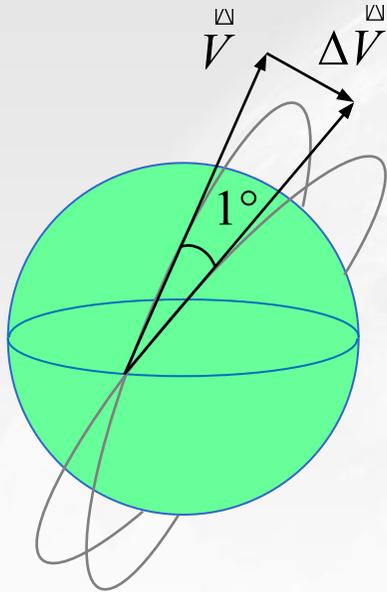
Первый импульс  $\Delta V_1$  создает эллипс, касающийся малой и большой окружности.

Второй импульс  $\Delta V_2$  превращает траекторию в круговую орбиту.



Вальтер Гоман (1880–1945) – немецкий ученый в области механики космического полета, в 1925 году доказавший энергетическую оптимальность двухимпульсных перелетов.

## ИЗМЕНЕНИЕ НАКЛОНЕНИЯ ОРБИТЫ



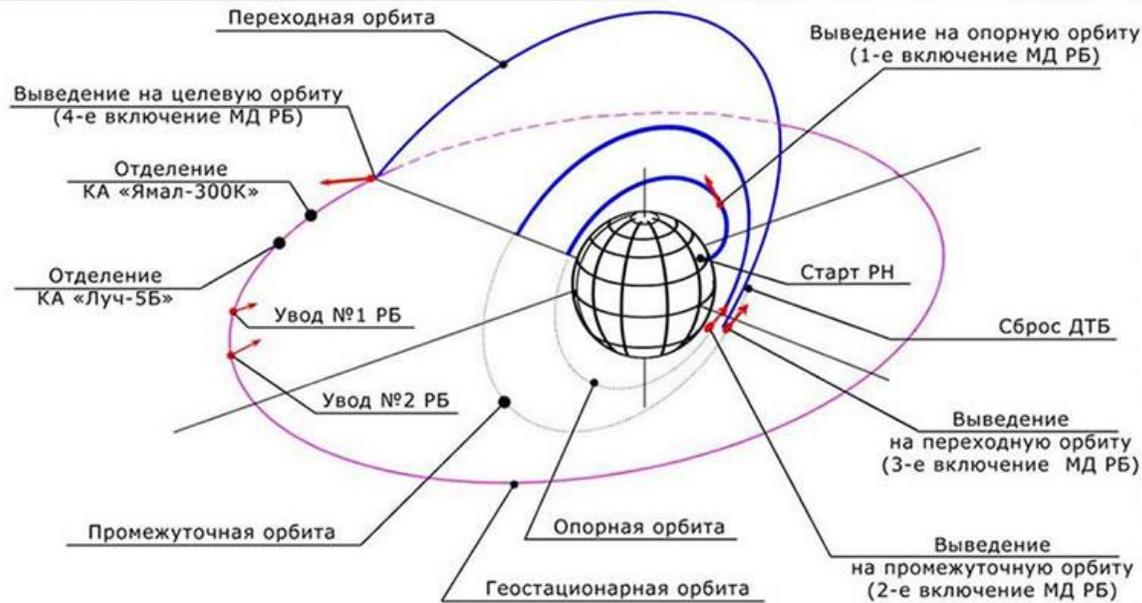
Рассмотрим задачу изменения наклона орбиты. Чтобы выполнить эту операцию, нужно выдать импульс изменения скорости в восходящем узле орбиты. Из векторного треугольника сложения скоростей видно, что для изменения наклона даже на один градус нужно выдать импульс по нормали к плоскости орбиты в этой точке величиной

$$\Delta V = 8000 \cdot \operatorname{tg} 1^\circ \approx 140$$

По этой причине формирование плоскости орбиты, как правило, возлагается на этап выведения КА, а все орбитальные операции выполняются на компланарных орбитах.

К примеру, задача сближения транспортного корабля со станцией предполагает, что старт корабля и его выведение на промежуточную орбиту ожидания выполняется в тот момент времени, когда точка старта на поверхности Земли проходит через плоскость орбиты цели.

# СХЕМА ВЫВЕДЕНИЯ «ЯМАЛ-300К» НА ГЕОСТАЦИОНАРНУЮ ОРБИТУ



Для просмотра анимации нажмите

F5

Ракета-носитель выводит КА с разгонным блоком на низкую орбиту с наклоном  $51,4^\circ$ . Затем разгонный блок серией импульсов по направлению орбитальной скорости формирует сильно вытянутую эллиптическую орбиту так, чтобы ее апогей находился в плоскости экватора на высоте геостационарного спутника (36 тыс. км). Орбитальная скорость в апогее уменьшается пропорционально расстоянию, т.е. примерно в 5 раз, соответственно, уменьшается импульс скорости, необходимый для того, чтобы «повернуть» эту скорость в плоскость экватора. Импульс коррекции направления скорости совмещается со вторым импульсом превращения эллиптической орбиты в круговую.

Уход с орбиты Земли требует приращения скорости как минимум

$$\Delta V = V_2 - V_1 = \left( \frac{\text{км}}{\sqrt{2}} \right) V_1 \approx 3,2$$

Если интегралу энергии придать вид

$$V^2 = \frac{\mu}{r} \left( 2 - \frac{r}{a} \right)$$

то можно видеть, что второе слагаемое при  $a \gg r$  ( $2a$  – расстояние до орбиты назначения) не влияет существенно на энергетику полета.

Энергия межорбитального перелета будет определяться скоростью ухода от Земли и скоростью перелета от орбиты Земли к орбите планеты.

При подлете к планете назначения нужно опять затратить энергию перехода – уменьшения скорости, чтобы перейти к эллиптической орбите около этой планеты, и, возможно, энергию для формирования орбиты требуемого радиуса.

**Характеристическая скорость миссии** – это суммарное изменение скорости КА, которое требуется для выполнения его миссии. Для корабля «Союз-ТМА» характеристическая скорость миссии составляет 280–300 м/с для орбитального участка полета.

Характеристическая скорость миссии – это величина, на которую КА **должен** увеличить свою скорость для проведения необходимых операций.

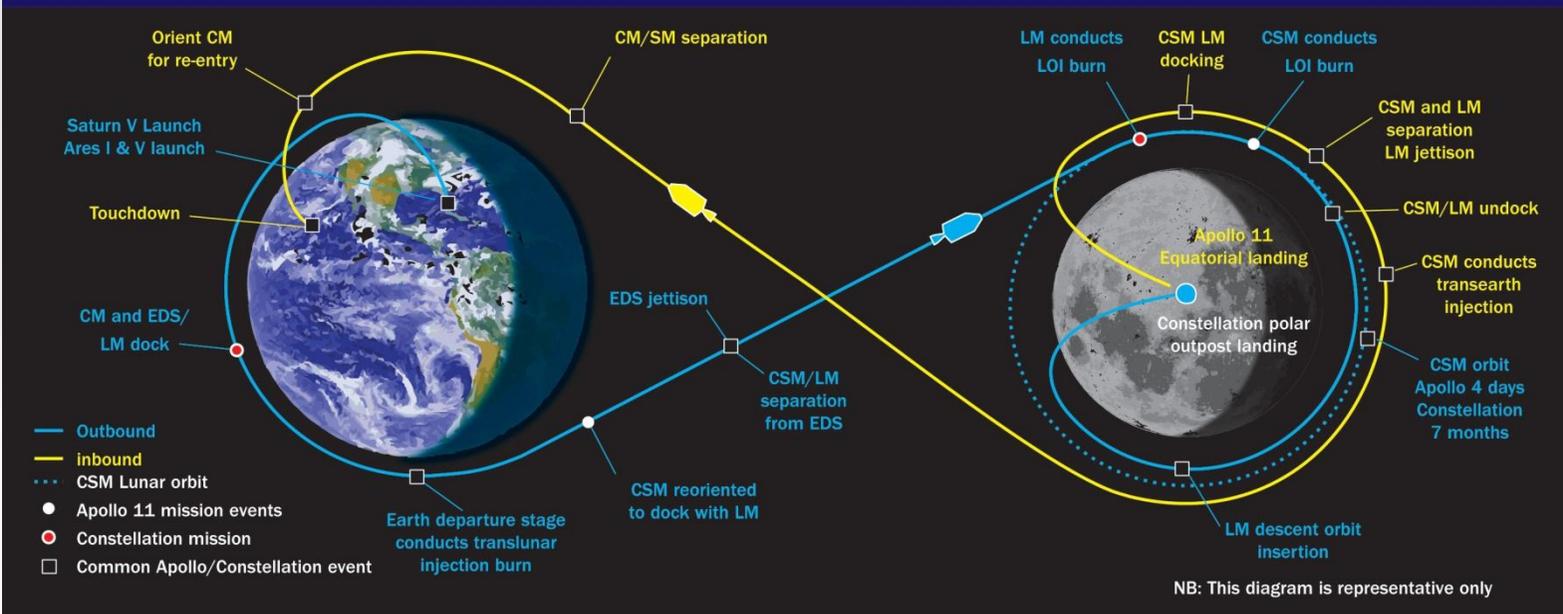
**Характеристическая скорость КА** – это возможная величина суммарного маневра по изменению скорости с использованием своей двигательной установки и запасов топлива. Характеристическая скорость корабля «Союз-ТМА» составляет 350–400 м/с.

Характеристическая скорость КА – это величина, на которую КА **может** увеличить свою скорость.

**Характеристическая скорость корабля выбирается больше скорости миссии, что позволяет в реальном полете иметь запас топлива на повторение некоторых операций при нештатных ситуациях.** Достижение большой характеристической скорости КА возможно с помощью использования многоступенчатых конструкций.

# ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ СКОРОСТЬ МИССИИ «АПОЛЛОН»

SIGNIFICANT EVENTS OF THE APOLLO 11 AND PROPOSED CONSTELLATION MISSION



## Операция лунной миссии

Хар.  
скорость

Переход с околоземной орбиты на орбиту перелета к Луне

3200 м/с

Переход с орбиты перелета к Луне на орбиту спутника Луны

700 м/с

Сход с орбиты спутника Луны и посадка

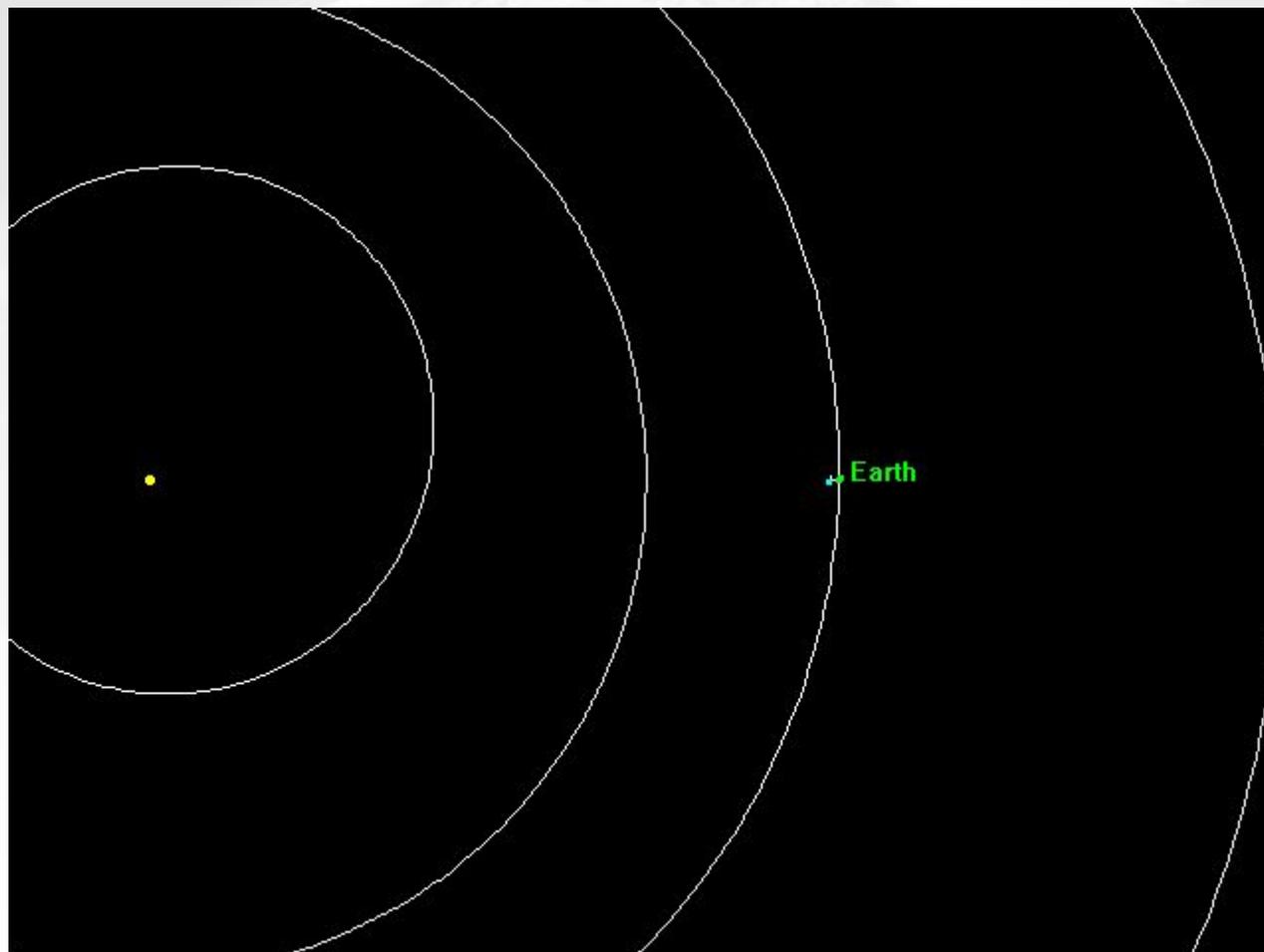
1800 м/с

Старт с Луны, выход на орбиту спутника Луны, сближение с орбит. модулем

1800 м/с

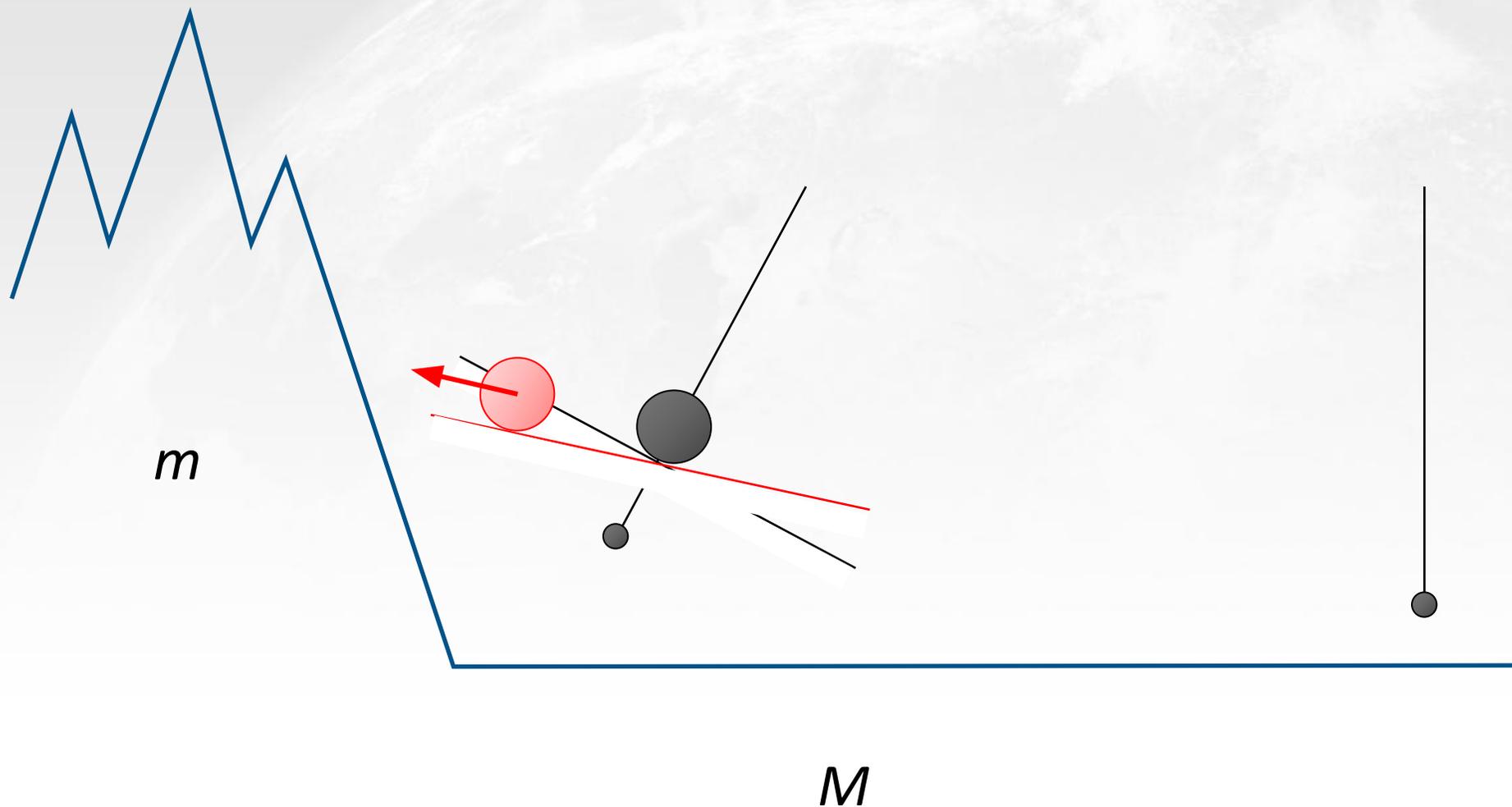
3. Переход с орбиты спутника Луны на орбиту перелета к Земле

650 м/с

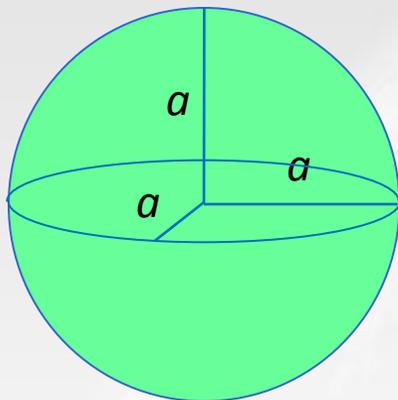


Траектория 3-й ступени ракеты «Сатурн-5» в 2002–2003 годах.  
14 ноября 1969 года ракета вывела на орбиту корабль «Аполлон-12».  
L1 – точка Лагранжа системы Солнце – Земля.

# ГРАВИТАЦИОННЫЕ АНОМАЛИИ

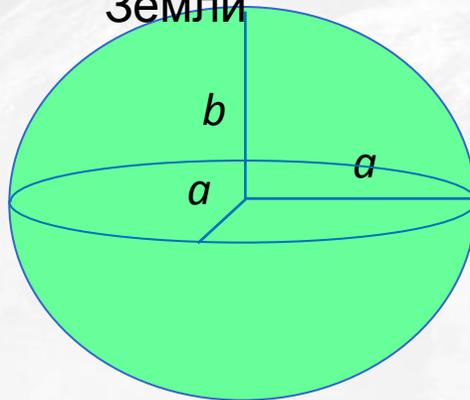


## Различные приближения формы Земли



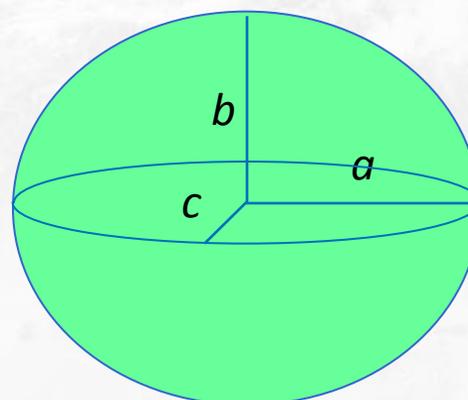
Шар

$$a = 6\,378\,140 \text{ м}$$



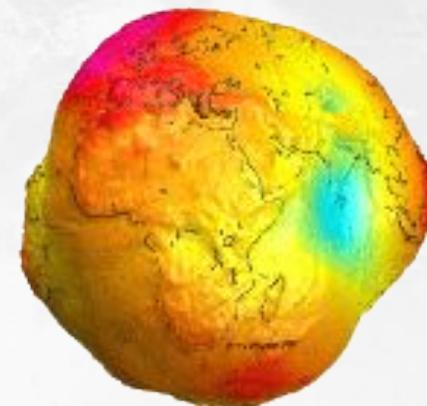
Эллипсоид вращения

$$\begin{aligned} a &= 6\,378\,137 \text{ м} \\ b &= 6\,356\,751 \text{ м} \end{aligned}$$



Трёхосный эллипсоид

$$\begin{aligned} a &= 6\,379\,351 \text{ м} \\ b &= 6\,356\,863 \text{ м} \\ c &= 6\,378\,139 \text{ м} \end{aligned}$$



Геоид по данным спутника GOCE

Для просмотра анимации нажмите F5

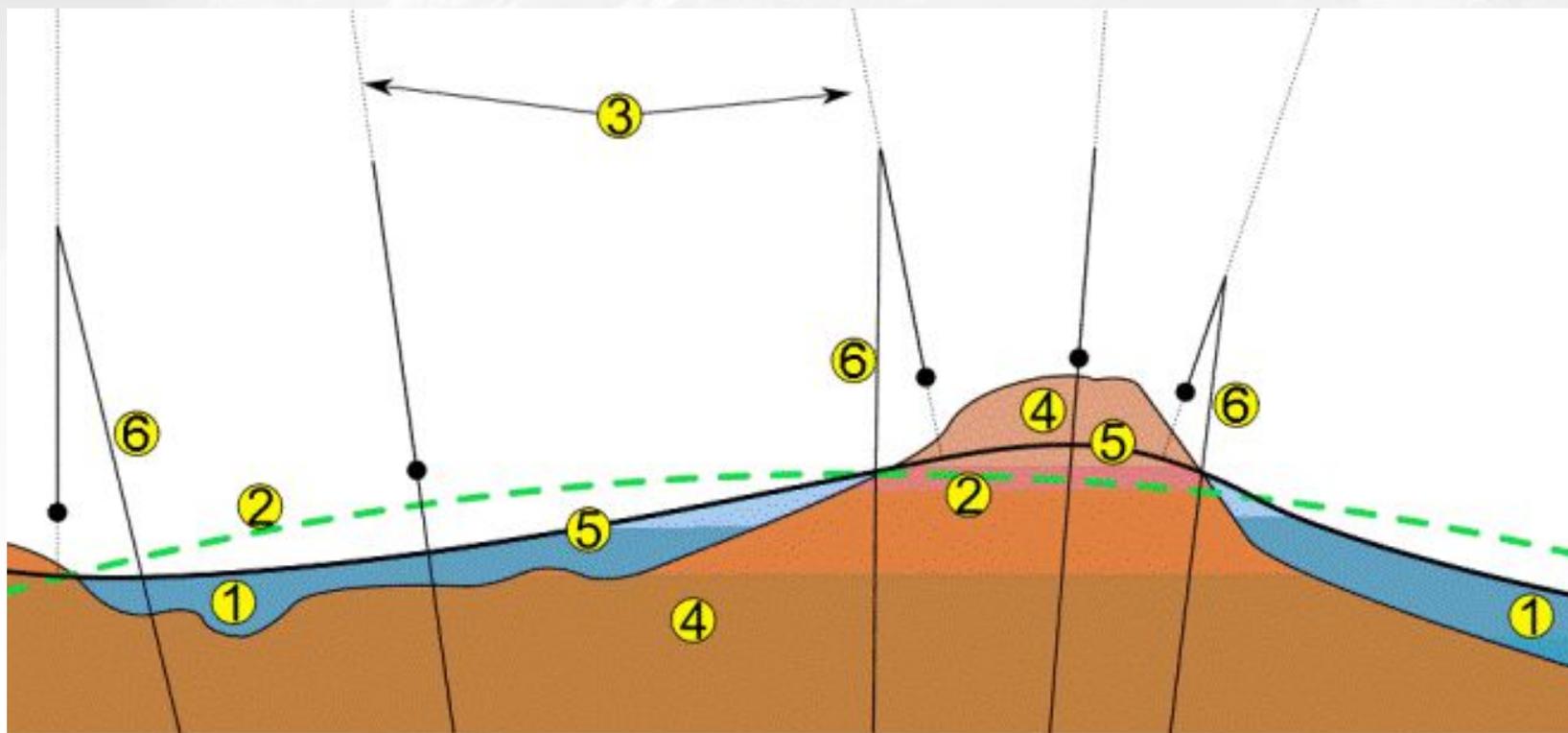
**Референц-эллипсоид** — приближение формы поверхности Земли (а точнее, геоида) эллипсоидом вращения, используемое для нужд геодезии на некотором участке земной поверхности (территории отдельной страны или нескольких стран). В России с 1946 года используется эллипсоид Красовского.

# ГЕОИД

**Геоид** – это поверхность, всюду перпендикулярная отвесной линии.

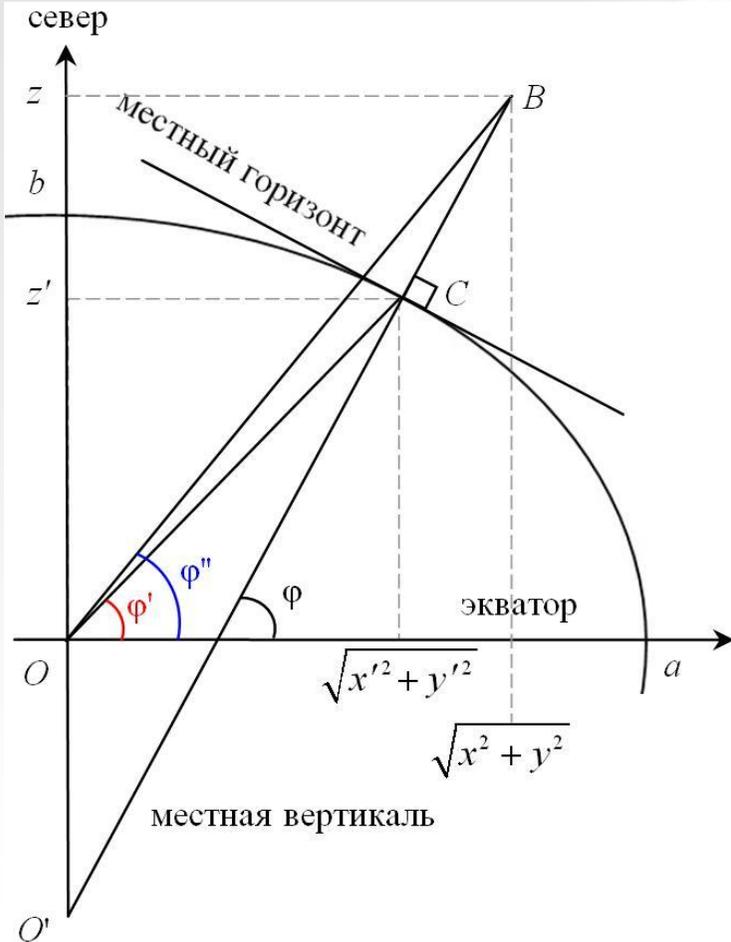
Геоид с точностью до 1 м совпадает со средним уровнем вод Мирового океана и условно продолжается под материками.

Относительно геоида ведется отсчёт высот над уровнем моря.

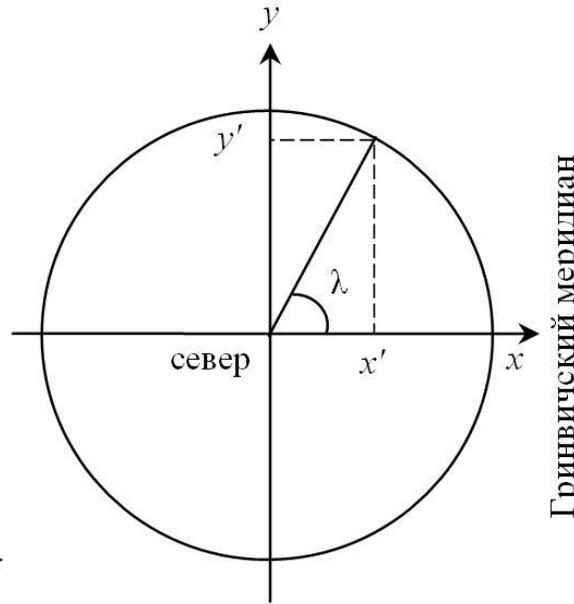


1 - мировой океан, 2 - земной эллипсоид, 3 - отвесные линии,  
4 - тело Земли, 5 - геоид, 6 - нормаль к земному эллипсоиду

# ЗЕМНОЙ ЭЛЛИПСОИД



Сечение по меридиану параллели



Сечение по

Гринвичский меридиан

Сжатие:

$$f = \frac{a-b}{a} = \frac{1}{298,26}$$

Первый эксцентриситет:

$$\varepsilon^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = f(2 - f)$$

Рассмотрим точки:

$$B = (r, z)$$

$$C = (x', y', z') = (r', z')$$

$O'C$  – местная вертикаль

$OC$  – геоцентрическая вертикаль

$\varphi$  – географическая широта

$\varphi'$  – геоцентрическая широта т.  $C$

$\varphi''$  – геоцентрическая широта т.  $B$

$$\rho = OB$$

$$\rho' = OC$$

# СВЯЗЬ МЕЖДУ ГЕОЦЕНТРИЧЕСКОЙ И ГЕОГРАФИЧЕСКОЙ ШИРОТОЙ

$$\varphi' = (1 - f)^2 \varphi = (1 - \varepsilon^2) \varphi$$

## КООРДИНАТЫ ТОЧКИ С ЧЕРЕЗ ГЕОГРАФИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ

Выражение для декартовых координат точки  $C=(R',Z')$  на поверхности Земли через географическую широту  $\varphi$  и величину экваториального радиуса Земли  $a$ .

$$R' = \rho' \cos \varphi' = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1 + f(f-2) \sin^2 \varphi}}$$

$$Z' = \rho' \sin \varphi' = a \sin \varphi \frac{(1-f)^2}{\sqrt{1 + f(f-2) \sin^2 \varphi}}$$

МОЖНО ВВЕСТИ НОВЫЙ ПАРАМЕТР  $N=O'C$ , С УЧЕТОМ КОТОРОГО

$$R' = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi}} = N \cos \varphi$$

$$Z' = a \sin \varphi \frac{(1-f)^2}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi}} = (N - a) \sin \varphi$$

а сам параметр

$$N = a \left( 1 - \sin^2 \varphi \right)^{-\frac{1}{2}} = a^2 \left( \cos^2 \varphi + \frac{f^2}{1-f} \sin^2 \varphi \right)^{-\frac{1}{2}}$$

Выражение для декартовых координат точки  $B=(R,Z)$  на высоте  $h$ :

$$R = (N + h) \cos \varphi$$

$$Z = (N - \frac{1}{2} N^2) \sin \varphi$$

Отсюда получаем связь между геоцентрической и географической широтой для объекта  $B$  на высоте  $h$ :

$$\operatorname{tg} \varphi' = \frac{Z}{R} = \frac{N(1 - \frac{1}{2} N^2) \sin \varphi + h}{(N + h) \cos \varphi}$$

Можно видеть, что при уменьшении высоты эта формула переходит в формулу для тангенса геоцентрической широты точки на поверхности Земли.

## ГЕОГРАФИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ ЧЕРЕЗ КООРДИНАТЫ ОБЪЕКТА

Выражение для высоты  $h$  и географической широты  $\varphi$  из декартовых координат точки  $B=(R,Z)$ :

$$h = \frac{R}{\cos \varphi} - N$$

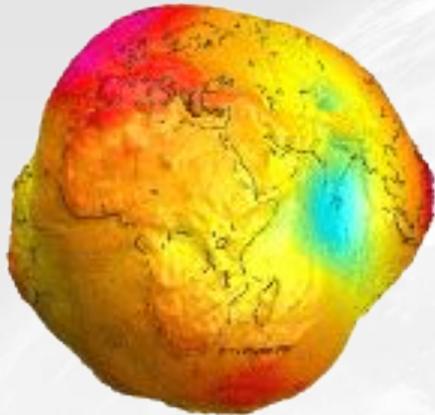
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{Z}{R} \left[ \frac{N+h}{N(1-\varepsilon^2) + h} \right] = \frac{Z}{R} \left[ 1 - \varepsilon^2 \frac{N}{N+h} \right]^{-1}$$

Величина  $N$  также зависит от  $\varphi$ . Найти  $h$  и  $\varphi$  можно итерационным методом:

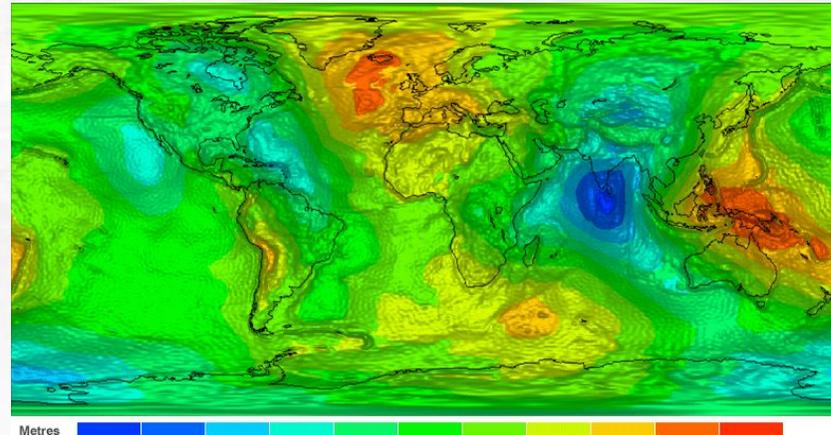
$$N_1 = \frac{A^2}{\sqrt{A^2 \cos^2 \varphi_1 + B^2 \sin^2 \varphi_1}}, \quad h_1 = \frac{R}{\cos \varphi_1} - N_1; \quad \varphi_1 = \arctan \left[ \frac{Z}{R} (1 - \varepsilon^2)^{-1} \right]$$

$$N_k = \frac{A^2}{\sqrt{A^2 \cos^2 \varphi_k + B^2 \sin^2 \varphi_k}}; \quad h_k = \frac{R}{\cos \varphi_k} - N_k; \quad \varphi_{k+1} = \arctan \left[ \frac{Z}{R} \left( 1 - \varepsilon^2 \frac{N_k}{N_k + h_k} \right)^{-1} \right]$$

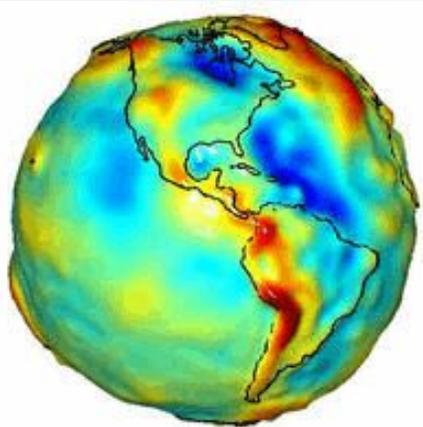
# ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ ЗЕМЛИ



Геоид

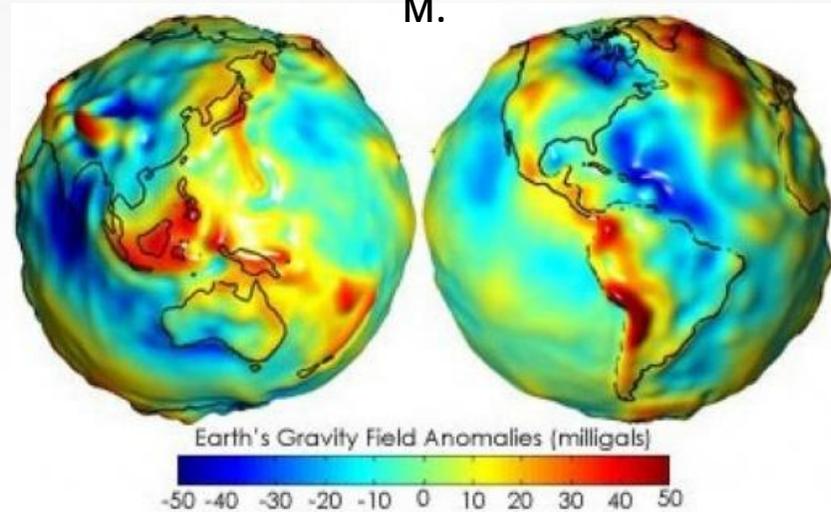


Геоид относительно земного эллипсоида,  
М.



Аномалии гравитационного  
поля

Для просмотра анимации нажмите F5



Поправка к среднему значению  $g$ ,  $10^{-3}$  см/с<sup>2</sup>

## СПУТНИК GOSE – ИССЛЕДОВАТЕЛЬ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

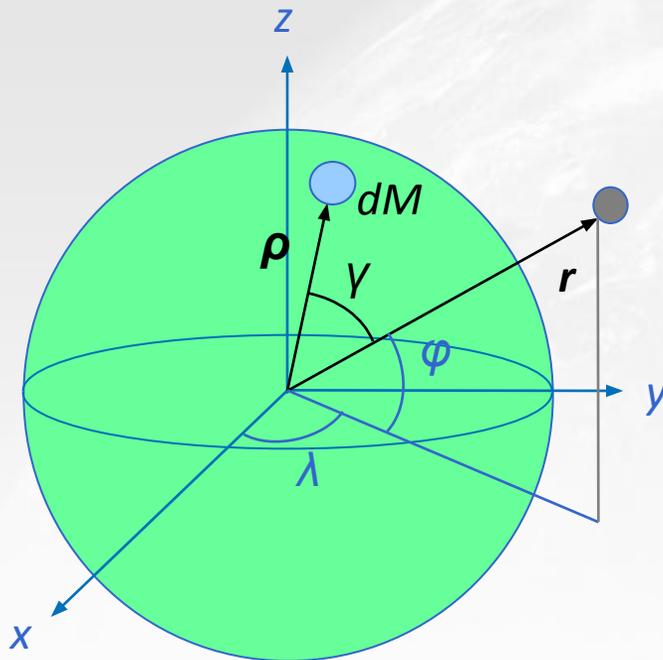


Длина: 5,3 м  
Диаметр: 2,3 м  
Масса: 1100 кг

Высота орбиты: 250 км  
Наклонение: 96°

Запуск: 17.03.2009  
с космодрома  
«Плесецк»

Окончание миссии:  
11.11.2013 г.



Гравитационный потенциал Земли

$$U(\mathbf{r}) = G \int_M \frac{dM}{\Delta r}$$

$G$  – гравитационная постоянная

$M$  – масса Земли

$\Delta r$  – расстояние от точки с массой  $dM$  до конца вектора  $r$ , которое определяется формулой

$$\begin{aligned} \Delta r &= \sqrt{(r_x - \rho_x)^2 + (r_y - \rho_y)^2 + (r_z - \rho_z)^2} = \\ &= \sqrt{(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho})^2} = \\ &= \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \gamma} \end{aligned}$$

$\varphi$  – угол между векторами  $\boldsymbol{\rho}$  и  $r$ .

В общем случае интеграл можно вычислить только при помощи ряда.

Наибольшее распространение получило разложение геопотенциала в ряд по сферическим функциям.

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка (уравнение Лежандра):

$$(1 - z^2) \frac{d^2 u}{dz^2} - 2z \frac{du}{dz} + n(n+1)u = 0$$

где  $z$  – комплексная переменная. Решения этого уравнения при целых  $n$  имеют вид многочленов, называемых многочленами (полиномами) Лежандра. **Полином Лежандра степени  $n$**  вычисляется по формуле:

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (z^2 - 1)^n}{dz^n}, \text{ а в полярных координатах } P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (\cos^2 \theta - 1)^n}{d(\cos \theta)^n}$$

где  $\theta$  – косинус полярного угла, отсчитываемого от оси  $z$ . Несколько первых  $P_n(z)$ :

$$P_0(z) = 1,$$

$$P_1(z) = z,$$

$$P_2(z) = \frac{1}{2}(3z^2 - 1),$$

$$P_3(z) = \frac{1}{2}(5z^3 - 3z).$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка

$$(1-z^2)\frac{d^2u}{dz^2} - 2z\frac{du}{dz} + \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{1-z^2} \right] u = 0$$

которое при  $m = 0$  переходит в уравнение Лежандра. Одним из решений данного уравнения является **присоединённая функция Лежандра**:

$$P_{n,m}(z) = (1-z^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n(z)}{dz^m}$$

где  $P_n(z)$  – полином Лежандра. Присоединённые функции Лежандра являются составными элементами сферических функций. Запишем несколько первых присоединённых функций Лежандра  $P_{n,m}(z)$ :

$$P_{01} = 0,$$

$$P_{11} = (1-z^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$P_{22} = 3(1-z^2),$$

$$P_{31} = \frac{3}{2}(-1+5z^2)(1-z^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Сферическая функция порядка  $n$  определяется формулой:

$$Y_n(\theta, \psi) = \sum_{m=0}^n P_{n,m}(\cos \theta) [A_{n,m} \cos m\psi + B_{n,m} \sin m\psi]$$

где  $P_{n,m}(\cos \theta)$  – присоединённая функция Лежандра,  $A_{n,m}$  и  $B_{n,m}$  – произвольные постоянные.

Область определения – сфера, аргумент записывается в сферических координатах через полярную широту  $\theta$ , долготу  $\psi$  и иногда радиус  $r$ :

$$x = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \theta$$

## РАЗЛОЖЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА В РЯД ПО СФЕРИЧЕСКИМ ФУНКЦИЯМ

Стандартная форма записи геопотенциала, принятая Международным астрономическим союзом:

$$U = \frac{\mu}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left[ \left( \frac{a}{r} \right)^n J_n P_{n,0}(\sin \varphi) - \sum_{m=1}^n \left( \frac{a}{r} \right)^n (C_{n,m} \cos m\lambda + S_{n,m} \sin m\lambda) P_{n,m}(\sin \varphi) \right] \right\}$$

$a$  – экваториальный радиус Земли;

$J_n$  – коэффициенты зональных гармоник;

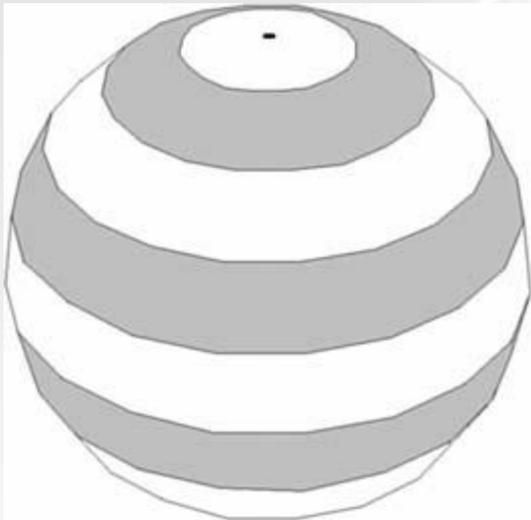
$C_{n,m}$  и  $S_{n,m}$  – коэффициенты секториальных гармоник при  $n=m$  и тессеральных – при  $n \neq m$ ;

$P_{n,m}(\sin \varphi)$  – присоединённые функции Лежандра.

**Чем больше учитывается гармоник, тем точнее геопотенциал, тем больше точность модели орбитального движения и тем меньше ошибка прогноза орбиты.**

КА	Порядок модели гравитационного поля	Ошибка прогноза орбиты на виток, м.
Ресурс-ДК	4	300
МКС	72	25

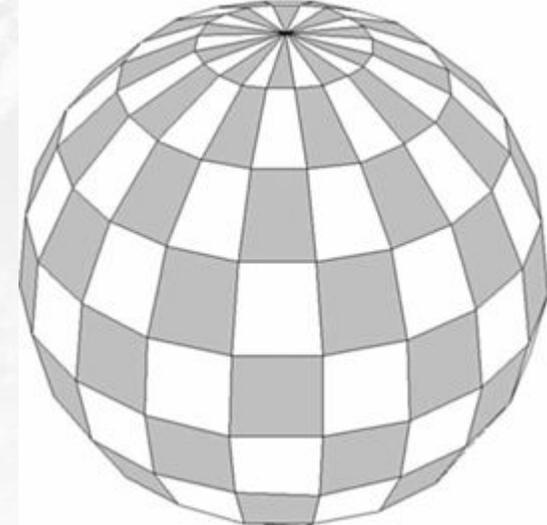
## СМЕНА ЗНАКА ГАРМОНИК ГЕОПОТЕНЦИАЛА



Зональные гармоники  
 $n = 8$



Секториальные  
гармоники  
 $n = m = 10$



Тессеральные гармоники  
(тетраэдра – четыре)  
 $n = 8, m = 10$

Конкретные знаки в зонах, секторах и четырёхугольниках зависят от коэффициентов гармоник. Коэффициенты  $J_{n'}$ ,  $C_{n,m}$  и  $S_{n,m}$  определяются путём геодезических и гравиметрических измерений, с помощью наблюдений за траекториями ИСЗ, с помощью измерений, проводимых научными спутниками (GOCE).

## ПЕРВЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ГАРМОНИК

$n$	$J_n, 10^{-6}$
2	1082,628
3	-2,538
4	-1,593
5	-0,230
6	-0,502
7	-0,361
8	-0,118
9	-0,100
10	-0,354

$n, m$	$C_{n,m}, 10^{-8}$	$S_{n,m}, 10^{-8}$
2, 2	241,29	-136,41
3, 1	196,98	26,015
3, 2	89,204	-63,468
3, 3	68,630	143,04
4, 1	-52,989	-48,765
4, 2	33,024	70,633
4, 3	98,943	-15,467
4, 4	-7,9692	33,928

Гармоника  $J_n$  характеризует полярное сжатие Земли. Остальные дают более мелкие детали. **Тессеральные гармоники** по своей величине являются существенно меньшими зональных, **становятся важными для геостационарных спутников**, поскольку те постоянно находятся в одной и той же точке по долготе (и широте), и происходит постоянное действие долготных гравитационных аномалий, которое необходимо учитывать.

Уравнение возмущённого движения :

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \mathbf{a}_{\text{ВОЗМ}}$$

Какие возмущения оказывают влияние на движение аппарата по орбите?

## ВОЗМУЩАЮЩИЕ УСКОРЕНИЯ ДЛЯ СПУТНИКОВ GPS

Возмущающий фактор	Ускорение, м/с <sup>2</sup>
Полярное сжатие Земли ( $J_2$ )	$5 \cdot 10^{-5}$
Другие гармоники геопотенциала	$3 \cdot 10^{-7}$
Гравитационное влияние Луны	$5 \cdot 10^{-6}$
Гравитационное влияние Солнца	$2 \cdot 10^{-6}$
Гравитационное влияние планет	$3 \cdot 10^{-10}$
Тектонические приливы	$2 \cdot 10^{-9}$
Океанские приливы	$5 \cdot 10^{-10}$
Солнечное давление	$1 \cdot 10^{-7}$
Лобовое сопротивление атмосферы	$4 \cdot 10^{-10}$
Релятивистские эффекты	$3 \cdot 10^{-10}$

*Источник:*

*Guochang Xu* GPS Theory, Algorithms and Applications 2<sup>nd</sup> Edition – Springer, 2007

## ОСКУЛИРУЮЩАЯ ОРБИТА

**Оскулирующая орбита** (в заданный момент времени  $t_0$ ) – это кеплерова орбита, которую аппарат (в соответствии с его фактическим положением и скоростью) имел бы при отсутствии в дальнейшем каких-либо возмущений.

Для оскулирующей орбиты положение и скорость КА можно вычислять с помощью соотношений задачи двух тел по интегралам движения.

На некотором интервале после  $t_0$  оскулирующая орбита хорошо описывает реальное движение, однако точность такого приближения ухудшается со временем пропорционально возмущению.

оскулирующая  
орбита



## ИЗМЕНЕНИЕ ОРБИТАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ

Изменение большой полуоси:

$$\frac{da}{dt} = \frac{2a^2}{\mu} \mathbf{v} \mathbf{a}_{\text{ВОЗМ}}$$

Изменение модуля момента количества движения:

$$\frac{dc}{dt} = \frac{1}{c} \left[ r^2 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_{\text{ВОЗМ}}) - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}_{\text{ВОЗМ}}) \right]$$

Изменение эксцентриситета:

$$\frac{de}{dt} = \frac{1}{\mu a e} \left[ (pa - r^2)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_{\text{ВОЗМ}}) + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}_{\text{ВОЗМ}}) \right]$$

Изменения наклона и долготы восходящего узла:

$$\begin{pmatrix} c \sin i \left( \frac{d\Omega}{dt} \right) \\ -\Omega \left( \frac{di}{dt} \right) i \\ \frac{dc}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Omega & \sin \Omega & 0 \\ \Omega \sin i \cos i \cos \Omega & i \cos \Omega \cos i \sin \Omega & \sin i \\ \sin \Omega \sin i & -\cos \Omega \sin i & \cos i \end{pmatrix} (\mathbf{r} \times \mathbf{a}_{\text{ВОЗМ}})$$

# ИЗМЕНЕНИЕ ОРБИТАЛЬНЫХ АНОМАЛИЙ

Изменение истинной аномалии:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{c}{r^2} + \frac{d\eta}{dt}$$

Изменение эксцентрической аномалии:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{na}{r} + \frac{d\beta}{dt}$$

Изменение средней аномалии:

$$\frac{dM}{dt} = n + \frac{d\gamma}{dt}$$

где

$$\eta(t_0 + \Delta t) = \theta(t_0 + \Delta t) - \theta(t_0)$$

$$\beta(t_0 + \Delta t) = E(t_0 + \Delta t) - E(t_0)$$

$$\gamma(t_0 + \Delta t) = M(t_0 + \Delta t) - M(t_0)$$

$n$  – среднее движение.

## ВЛИЯНИЕ ПОЛЯРНОГО СЖАТИЯ НА СМЕЩЕНИЕ ПЛОСКОСТИ ОРБИТЫ

Зональная гармоника  $J_2$  приводит к постоянному изменению долготы восходящего угла орбиты со скоростью

$$\Delta\Omega = -\frac{3}{2} J_2 \left( \frac{a}{p} \right)^2 n \cos i$$

где  $n$  – среднее движение.

Наклонение орбиты	Направление вращения плоскости орбиты
$i < 90^\circ$	противоположно направлению движению спутника
$i > 90^\circ$	по направлению движения спутника

Выбором параметров орбиты скорости движения восходящего угла можно сделать равной  $0,9856$  °/сутки, т.е. один полный оборот за год. **Такая орбита называется солнечно-синхронной**, поскольку ориентация плоскости относительно Солнца остаётся неизменной.

## ВЛИЯНИЕ ПОЛЯРНОГО СЖАТИЯ НА СМЕЩЕНИЕ ПЕРИГЕЯ

Зональная гармоника  $J_2$  приводит к изменению аргумента перигея со скоростью,

$$\Delta\omega = \frac{3}{4} J_2 \left( \frac{A}{p} \right)^2 n (4 - 5 \sin^2 i)$$

Из этого уравнения следует, что линия апсид неподвижна при

$$\begin{aligned} \sin^2 i &= \frac{4}{5} \\ i &= 63,453^\circ \end{aligned}$$

Наклонение орбиты	Направление вращения линии апсид
$i < 63,435^\circ$	в направлении орбитального движения
$i > 63,435^\circ$	против орбитального движения

1. *Бранец В.Н., Севастьянов Н.Н., Федулов Р.В.* Лекции по теории систем ориентации, управления движением и навигации. – Томск: ТГУ, 2013.
2. *Раушенбах Б.В., Овчинников М.Ю.* Лекции по динамике космического полета. – Москва: МФТИ, 1997.
3. *Бибенин Г.Г., Сребушевский Б.С., Соколов Г.А.* Системы управления полетом космических аппаратов. – Москва: Машиностроение, 1978.
4. *Лысенко Л.Н.* Наведение и навигация баллистических ракет. – Москва: МГТУ им. Баумана, 2007.
5. *Аксенов Е.П.* Теория движения искусственных спутников земли. – Москва: Наука, 1977.
6. *Бордовицына Т.В., Авдюшев В.А.* Теория движения искусственных спутников земли. – Томск: ТГУ, 2007.
7. *Бэттин Р.Х.* Наведение в космосе. – Москва: Машиностроение, 1966.
8. *Wertz J.R.* Spacecraft Attitude Determination and Control. – Kluwer Academic Publishers, 2002.
9. *Griffin M.D., French J.R.* Space Vehicle Design. – AIAA Education Series, 2004.
10. *Guochang Xu* GPS Theory, Algorithms and Applications 2<sup>nd</sup> Edition – Springer, 2007.



**СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ**

