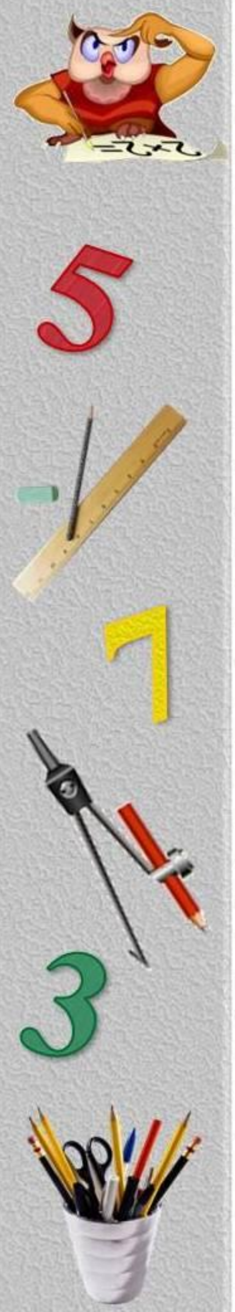
А. Байтұрсынов атындағы
Қостанай Мемлекеттік Университеті
Аграралық-техникалық институт
Математика және физика кафедрасы

Математика 3 пәні

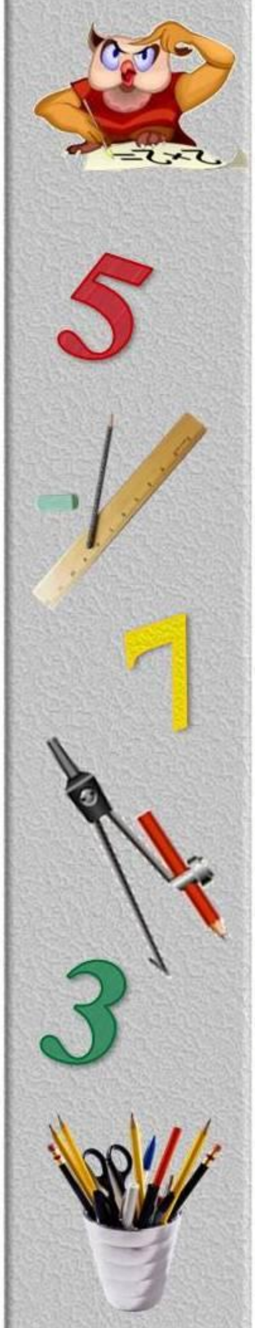
Математика және физика кафедрасының аға оқытушысы , Берденова Г.Ж.

Қостанай, 2020



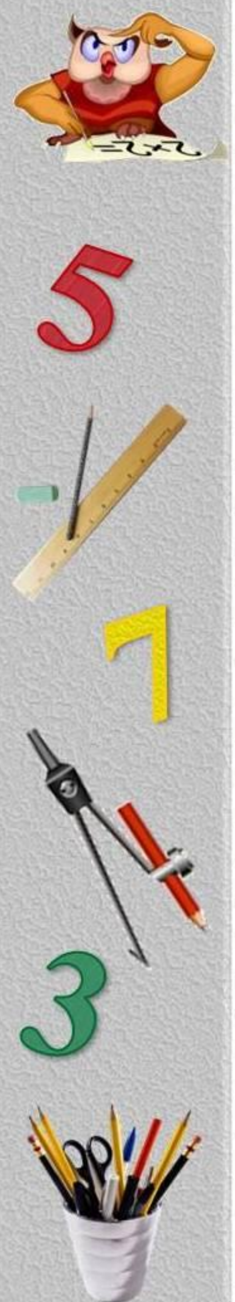
Тақырып:

Үлкен сандар заңы. Кездейсоқ шамалардың жүйелері.



Мақсат:

Үлкен сандар заңына жататын теоремаларды білу және оларды есеп шығаруға қолданып үйрену. Кездейсоқ шамалар жүйесі, оның үлестірім функциясы және үлестірім тығыздығы ұғымдарын енгізіп, олардың қасиеттері қарастыру. Кездейсоқ шамалар жүйесінің сандық сипаттамаларымен таныстыру.



Қарастырылатын сұрақтар:

- 1. Үлкен сандар заңы ұғымы.
- 2. Чебышев теңсіздігі және теоремасы.
- 3. Бернулли теоремасы.
- 4. Пуассон және Хинчин теоремалары.
- 5. Орталық шектік теорема
- 6. Кездейсоқ шамалардың жүйесі ұғымы.
- 7. Кездейсоқ шамалардың жүйесінің үлестірім заңы.
- 8. Екі кездейсоқ шамалар жүйесінің үлестірім функциясы және үлестірім тығыздығы..
- 9. Екі кездейсоқ шамалар жүйесінің сандық сипаттамалары.

А.Н.Колмогоровтың тұжырымы

Академик А.Н.Колмагоровтың тұжырымдауы бойынша *үлкен сандар заңы* деп мына жалпы принцип алынады: кездейсоқ факторлардың өте үлкен санының жиынтық әсері кездейсоқтықтан тәуелсіз нәтижеге келтіреді.

Үлкен сандар заңы деп бірнеше теоремалар жиыны аталады, олардың әрқайсысында тәжірибелер саны өте үлкен болғанда олардың орта сипаттамалары нақты тұрақтыға жуықтап жақындайтыны тағайындалады.

Үлкен сандар деп аталатын теоремалар $X_1, X_2, \ldots, X_n$ кездейсоқ шамаларының арифметикаық ортасына қатысты теоремалар болып саналады.

П.Л. Чебышев теоремасы

Теорема Егер X кездейсоқ шамасының дисперсиясы бар болса, онда кез келген оң ε саны үшін $P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$ теңсіздігі орындалады.

Осы теңсіздіктен мына теңсіздік шығады: $P(|X - M(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$.

Үлкен сандар заңының негізгісі және жалпы маңыздысы Чебышев теоремасы. Ол кездейсоқ шаманың бақыланған мәндерінің арифметикалық ортасы мен оның математикалық үмітінің арасындағы байланысты орнатады.

Теорема Тәуелсіз тәжірибелер саны шектеусіз артқанда шектеулі дисперсиясы бар кездейсоқ шаманың бақыланған мәндерінің арифметикалық ортасы ықтималдығы бойынша оның математикалық үмітіне жинақты.

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}-M(X)\right|<\varepsilon\right)=1$$

Чебышев теоремасын жалпы жағдайға, яғни кездейсоқ шаманың сипаттамалары бір тәжірибеден екінші тәжірибеге көшкенде өзгерсе де қолдануға болады. Енді Чебышевтің осы жалпыланған теоремасын береміз.

Теорема Егер $X_1, X_2, \ldots, X_n$ тәуелсіз кездейсоқ шамаларының тұрақты С санымен шектелген дисперсиялары бар болса, онда кез келген оң ε саны үшін

$$P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}-\frac{M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n)}{n}\right|<\varepsilon\right)\to 1$$

Я.Бернулли теоремасы үлкен сандар заңының маңыздысы және тарихи алғашқы формасы. Ол оқиғаның жиілігі мен оның ықтималдығы арасындағы байланысты орнатады.

Теорема Егер n тәуелсіз рет тәжірибе жүргізгенде A оқиғасының пайда болу саны m болса, онда бір тәжірибен екінші тәжірибеге өткенде $P(A)=p$, $P(\overline{A})=q$, $p+q=1$ ықтималдықтары тұрақты болып қалса, онда кез келген ε оң саны үшін

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)\underset{n\to\infty}{\to} 1.$$

Бұл теорема швейцар математигі Якоб Бернулли есімімен аталады. Енді Бернуллидің жалпыланған теоремасын береміз. Ол теорема француз математигі Пуассон есімімен аталады.

Теорема Егер тәуелсіз тәжірибелер тізбегінде A оқиғасының k-шы тәжірибедегі ықтималдығы p_k болса, онда $P\left(\left|\frac{m}{n}-\frac{p_1+p_2+\ldots+p_n}{n}\right|<\varepsilon\right)\underset{n\to\infty}{\to}1.$

Мұнда m – тәуелсіз n тәжірибе жүргізгенде А оқиғасының пайда болу саны.

ε - кез келген оң сан.

Теорема Егер тәуелсіз және бірдей үлестірімді $X_1, X_2, ..., X_n$ кездейсоқ шамаларының математикалық үміттері бар болса, онда кез келген оң ε саны үшін

$$P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} - a\right| < \varepsilon\right) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 1. \quad \text{Мұнда} \quad a = M(X)$$

Бұл теорема математик Хинчин есімімен аталады.

Орталық шектік теорема қосылғыштар саны шексіз артқанда $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ қосындысының шектік үлестірім заңы қалыпты болу шартын тағайындайды. Осы теорема Ляпунов теоремасы деп аталады.

Теорема Егер $X_1, X_2, ..., X_n$ кездейсоқ шамалары өзара тәуелсіз және олардың математикалық үміті a және дисперсиясы σ^2 болатын үлестірім заңдары бірдей, әрі үшінші ретті бастапқы моменті ν^3 бар болса, онда n шектеусіз артқанда $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ қосындысының үлестірім заңы қалыптыға шектеусіз жақындайды.

Кездесоқ шамалардың жүйесі

Кездейсоқ құбылыстарды зерттегенде кездейсоқ шамалардың екі, үш немесе одан да көп санын қолдануға тура келеді. Мысалы, снарядтың түсу нүктесі екі кездейсоқ шамамен анықталады: абцисса және ордината. Снарядтың кеңістікте жарылу нүктесі үш кездейсоқ шамамен анықталады.

Екі немесе бірнеше кездейсоқ шамаларды бірге қарастыру кездейсоқ шамалардың жүйесіне келтіреді. $X, Y, Z, \ldots, W$ кездейсоқ шамаларының жүйесін $(X, Y, Z, \ldots, W)$ деп белгілейміз. Кездейсоқ шамалардың жүйесін қарастырғанда жүйені құрайтын әр кездейсоқ шаманы зерттеумен қатар жүйені құратын кездейсоқ шамалардың арасындағы байланысты немесе тәуелділікті де қарастыру қажет.

Кездейсоқ шамалар жүйесінің *үлестірім заңы* деп кездейсоқ шамалар жүйесінің мүмкін мәндері облысы мен осы облыста жүйенің пайда болу ықтималдығы арасындағы байланысты тағайындайтын қатынас аталады.

X және $У$ дискретті кездейсоқ шама, ал оның мүмкін мәндері (x_i, y_i) $(i=1,2,...,n;\ j=1,2,...,m)$ болсын. Сонда осындай кездейсоқ шамалар жүйесінің үлестірімі X кездейсоқ шамасы x_i мәнін $У$ кездейсоқ шамасы y_j мәнін қабылдау ықтималдығын $p_{ij} = P(X=x_i \quad Y=y_j)$ көрсету арқылы сипатталуы мүмкін. p_{ij} ықтималдықтары мына түрдегі кестеге жазылады

x_i y_j	x_1	x_2	...	x_n
y_1	p_{11}	p_{21}	...	p_{n1}
y_2	p_{12}	p_{22}	...	p_{n2}
			...	
y_m	p_{1m}	p_{2m}	...	p_{nm}

Мұндай кесте екі дискретті кездейсоқ шамалар жүйесінің *үлестірім кестесі* деп аталады.

Барлық мүмкін болатын оқиғалар ($X=x_i$ $Y=y_j$) ($i=1,2,...,n$; $j=1,2,...,m$) үйлесімсіз оқиғалардың толық тобын құратын болғандықтан $\sum\limits_{i,j} \mathrm{p_{ij}} = \sum\limits_{i,j} \mathrm{P}\left(X = x_i, Y = y_j\right) = 1$ болады. Сонымен қатар $\sum\limits_{j} \mathrm{p_{ij}} = \sum\limits_{j} \mathrm{P}\left(X = x_i, Y = y_j\right) = \mathrm{P}\left(X = x_i\right)$ және $\sum\limits_{i} \mathrm{p_{ij}} = \sum\limits_{i} \mathrm{P}\left(X = x_i, Y = y_j\right) = \mathrm{P}\left(Y = y_j\right)$.

Екі кездейсоқ шамалар жүйесінің ықтималдықтарының *үлестірім функциясы* деп ($X<x$; $Y<y$) оқиғасының пайда болу ықтималдығына тең екі аргументті $F(x,y)$ функциясы аталады, яғни

$$F(x,y)=P(X<x;\ Y<y).$$

Екі кездейсоқ шамалар жүйесінің үлестірім функциясының қасиеттері

1. $\lim\limits_{y \to +\infty} F(x,y) = F_1(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x,y) = F_2(y)$;

2. $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} F(x,y) = 1$;

3. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x,y) = \lim\limits_{y \to -\infty} F(x,y) = \lim\limits_{\substack{x \to -\infty \\ y \to -\infty}} F(x,y) = 0$;

4. Үлестірім функциясы кемімейтін функция:

   $x_2 > x_1 \ \Rightarrow F(x_2,y) \geq F(x_1,y)$

   $y_2 > y_1 \ \Rightarrow F(x, y_2) \geq F(x,y_1)$;

5. $P(a \leq X < b, c \leq Y < d) = F(b,d) - Fa,d) - F(b,c) + F(a,c)$

(X,Y) үзіліссіз кездейсоқ шамалар жүйесінің үлестірім тығыздығы мына $f(x,y)=\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=F''_{xy}(x,y)$ формуламен табылады.

Үзіліссіз (X,Y) кездейсоқ шамалар жүйесінің ықтималдықтар үлестірімінің функциясы ықтималдықтар тығыздығы арқылы мына формуламен өрнектеледі:

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy.$$

(X,Y) үзіліссіз кездейсоқ шамалар жүйесінің үлестірім тығыздығының қасиеттері:

1. үлестірім тығыздығы теріс емес функция $f(x,y)\geq 0$;
2. $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy=1.$

Математикалық үміт және коварияция

Анықтама. Кездейсоқ шамалар жүйесіне кіретін бір кездейсоқ шама нақты мән қабылдаған шартта табылған екінші кездейсоқ шаманың үлестірім заңы *шартты үлестірім заңы* деп аталады.

Шартты үлестірім заңдары мына түрде жазылады:

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} \quad \text{және} \quad f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)}.$$

Осы шартты үлестірім заңдары арқылы екі кездейсоқ шамалар жүйесінің ықтималдықтар тығыздығы мына түрде жазылады:

$$f(x,y) = f_1(x) f\left(\frac{y}{x}\right) = f_2(y) f\left(\frac{x}{y}\right).$$

Екі өлшемді кездейсоқ шаманың сандық сипаттамалардың ішінде ең маңыздысы шартты математикалық үміт және ковариация болып табылады.

X=x болғанда *У* дискретті кездейсоқ шамасының *шартты математикалық үміті* деп *У*-тің мүмкін мәндері мен олардың сәйкес шартты ықтималдықтарының көбейтінділерінің қосындысы аталады

$$M(Y/X=x)=\sum_{j=1}^{m} y_j p(y_j/x)$$

Үзіліссіз кездейсоқ шамалар үшін шартты математикалық үміт мына интегралмен анықталады:

$$M(Y/X=x)=\int_{-\infty}^{+\infty} yf(y/x)dy$$

У=у болғанда *X* дискретті кездейсоқ шамасының *шартты математикалық үміті* деп *X*-тің мүмкін мәндері мен олардың сәйкес шартты ықтималдықтарының көбейтінділерінің қосындысы аталады

$$M(X/Y=y)=\sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i/y)$$

Үзіліссіз кездейсоқ шамалар үшін шартты математикалық үміт мына интегралмен анықталады:

$$M(X/Y=y)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x/y)dx.$$

$M(Y/X=x)$ шартты математикалық үміті x айнымалысына тәуелді функция болады. Оны $\mu_y(x)$ деп белгілейміз. Сонда *У шамасының Х-ке регрессиясы* деп $m_y(x)$ аталады. Осы сияқты *Х шамасының У-ке регрессиясы* $M(X/Y=y)$ шартты математикалық үміті аталады және $\mu_x(y)$ деп белгіленеді.

Х және *У* кездейсоқ шамаларының *ковариациясы* немесе *корреляциялық моменті* деп осы кездейсоқ шамалардың математикалық үмітінен ауытқуларының көбейтіндісінің математикалық үміті аталады:

$$\mu_{xy}=M[(X-M(X))(Y-M(Y))].$$

Корреляция коэффициенті және сызықты регрессиясының теңдеуі

X және $У$ кездейсоқ шамаларының *корреляция коэффициенті* деп ковариацияның осы шамалардың орта квадраттық ауытқуларының көбейтіндісіне қатынасы аталады:

$$r_{xy} = \mu_{xy} / (\sigma_x \sigma_y), \qquad -1 \le r_{xy} \le 1.$$

$x = m_x(y)$ және $y = m_y(x)$ теңдеулері сәйкес X -тің $У$-ке және $У$ -тің X-ке *регрессиясының теңдеулері* деп аталады.

$У$-тің X-ке сызықты регрессиясының теңдеуі мына түрде болады:

$$y_x = M(Y) + r_{xy} \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - M(X)).$$

1. Дискретті кездейсоқ шама мына үлестірім заңымен берілген

x	-1	0	2	4	6
p	0,2	0,4	0,3	0,05	0,05

Чебышев теңсіздігін пайдаланып $|X - M(X)| < 5$ теңсіздігінің орындалу ықтималдығын бағалаңыз.

Шешуі: Математикалық үміт пен дисперсияны есептейміз:

M(X) = -0,2+0,6+0,2+0,3 = 0,9;

$M(X^2)$ = 0,2+1,2+0,8+1,8 = 4;

$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 4 - 0{,}81 = 3{,}19$.

Енді Чебышев $|P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - D(X)/\varepsilon^2$ теңсіздігін пайдаланып $|X - 0{,}9| < 5$ теңсіздігінің орындалу ықтималдығын бағалаймыз.

$P(|X - 0{,}9| < 5) \geq 1 - \dfrac{3{,}19}{25} = 0{,}8725$. Сонда $P(|X - 0{,}9| < 5) \geq 0{,}8725$.

Мысал

Дискретті кездесоқ шама X келесі үлестірім заңымен берілген:

x	2	3	5	7
p	0,3	0,2	0,1	0,4

У=2X болатын кездесоқ шаманың үлестірім заңын тап

$Y_1 = 2x_1 = 2 \cdot 2 = 4$; $Y_2 = 2x_2 = 2 \cdot 3 = 6$; $Y_3 = 2x_3 = 2 \cdot 5 = 10$; $Y_4 = 2x_4 = 14$.

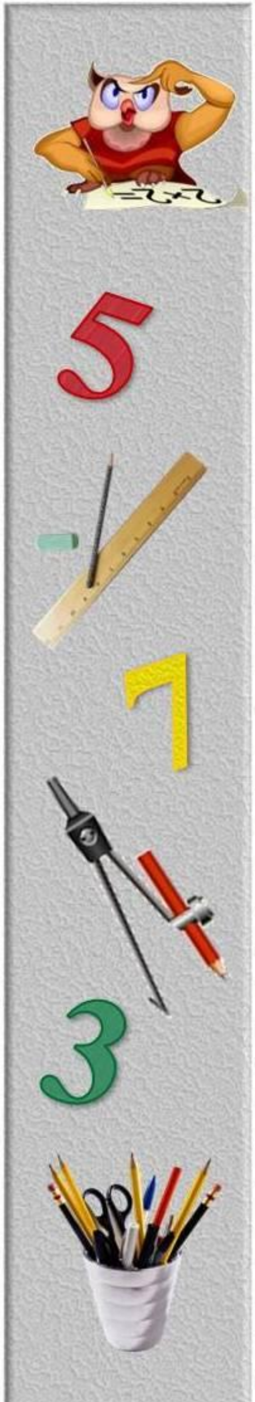
$P(y_i) = P(x_i)$,

$P(Y = 4) = P(X = 2) = 0{,}3$; $P(Y = 6) = P(X = 3) = 0{,}2$;

$P(Y = 10) = P(X = 5) = 0{,}1$; $P(Y = 14) = P(X = 7) = 0{,}4$.

Осылайша Y шамасының ықтималдықтарының үлестірім кестесін аламыз:

y	4	6	10	14
p	0,3	0,2	0,1	0,4



Мысал Дискретті кездесоқ шама келесі үлестірім заңымен берілген.

x	-3	-2	-1	0	1	2
p	0,1	0,2	0,2	0,1	0,3	0,1

У=Х^2 болатын кездейсоқ шаманың мәндерін табыңыз

Шешімі: У=Х^2 болатын кездейсоқ шаманың мәндерін табамыз

$Y_1=(-3)^2=9$; $Y_2=(-2)^2=4$; $Y_3=(-1)^2=1$; $Y_4=0^2=0$; $Y_5=1^2=1$

; $Y_6=2^2=4$. $Y_1=9$ және $Y_4=0$ бір реттен кездеседі, ал $Y_2=Y_6=4$ мәндері тең болып тур, сондық тан $Y=4$, шаманың ыктималдыгы, ыктималдыктардың косындысына тең болады, ягни 0,2 + 0,1 = 0,3.

Дәл осылай , $Y_3=Y_5=1$, сондық тан $P(Y=1)=0{,}2+0{,}3=0{,}5$.

Ү шаманың үлестірім заңын өсу ретімен орналастырып жазамыз

y	0	1	4	9
p	0,1	0,5	0,3	0,1

Мысал Дискретті кездесоқ шамалар Х , У келесі үлестірім заңымен берілген.

x	-3	-1	3	4
p	0,3	0,1	0,5	0,1

y	0	1	2
p	0,4	0,1	0,5

а) $Z = X + Y$; б) $Z = 2X - Y$; в) $Z = XY$; г) $Z = XY^2$. болатын кездесоқ шамалардың үлестірімін жаз

Шешімі: Көрсетілген шаманылардың үлестірімін мәндерді және олардың ықтималдығын табу қажет. Барлық есептеулерді кестеге орналастырамыз

X	Y	$Z=X+Y$	$Z=2X-Y$	$Z=XY$	$Z=XY^2$	$P(Z)=P(X)P(Y)$
−2	1	−1	−5	−2	−2	0,3 · 0,4 = 0,12
−2	2	0	−6	−4	−8	0,3 · 0,1 = 0,03
−2	3	1	−7	−6	−18	0,3 · 0,5 = 0,15
−1	1	0	−3	−1	−1	0,1 · 0,4 = 0,04
−1	2	1	−4	−2	−4	0,1 · 0,1 = 0,01
−1	3	2	−5	−3	−9	0,1 · 0,5 = 0,05
3	1	4	5	3	3	0,5 · 0,4 = 0,20
3	2	5	4	6	12	0,5 · 0,1 = 0,05
3	3	6	3	9	27	0,5 · 0,5 = 0,25
4	1	5	7	4	4	0,1 · 0,4 = 0,04
4	2	6	6	8	16	0,1 · 0,1 = 0,01
4	3	7	5	12	36	0,1 · 0,5 = 0,05
						1,00

Бірдей мәндерді біріктіріп және оларды өсу ретімен орналастырып, келесі үлестірімді аламыз:

А)

$Z = X + Y$	−1	0	1	2	4	5	6	7
P	0,12	0,07	0,16	0,05	0,2	0,09	0,26	0,05

Б)

$Z = 2X - Y$	−7	−6	5	−4	−3	3	4	5	6	7
P	0,15	0,03	0,17	0,01	0,04	0,25	0,05	0,25	0,01	0,04

В)

$Z = XY$	−6	−4	−3	−2	−1	3	4	6	8	9	12
P	0,15	0,03	0,05	0,13	0,04	0,2	0,04	0,05	0,01	0,25	0,05

Г)

$Z = XY^2$	−18	−9	−8	−4	−2	−1	3	4	12	16	27	36
P	0,15	0,05	0,03	0,01	0,12	0,04	0,2	0,04	0,05	0,01	0,25	0,05

1. Фирма нан өндіретін шағын заводтар шығарады. Жарнамаға нақты бір қаражат жұмсалады. Төмендегі кестеде бір ай ішінде сатылған заводтар саны (X) және жарнамаға жұмсалған қаражат көлемі (Y) келтірілген. (X, Y) кездейсоқ шамасының (x_i,y_i) әрбір жұбына сәйкес $p(x_i,y_i)$ ықтималдығы қойылған.

Y \ X	0	1	2
1	0,12	0,15	0,10
2	0,08	0,10	0,12
3	0,05	0,10	0,18

Әрбір X және Y шамалары үшін ықтималдықтардың үлестірім кестесін және X=2 болғанда Y шамасының ықтималдықтар үлестірімінің шартты заңын өрнектеу керек.

Шешуі: Әрбір x_i мәнімен y_i –тің үш мәні сәйкес келеді, яғни оқиғалардың толық тобы болады, ал олардың ықтималдықтарының қосындысы 1-ге тең болатындықтан $\sum_{j=1}^{3} p(x_i, y_i) = \sum_{j=1}^{3} p(x_i)p(y_i / x_i) = p(x_i)\sum_{j=1}^{3} p(y_i / x_i) = p(x_i).$

Олай болса $p(x_i)$ оқиғасының ықтималдығы әрбір колонкада $p(x_i,y_i)$ ықтималдықтарының қосындысына тең.

Нәтижесінде X шамасының ықтималдықтарының үлестірім кестесін аламыз:

x	0	1	2
p	0,25	0,35	0,4

Осылайша Y шамасының ықтималдықтарының үлестірім кестесін аламыз:

y	0	1	2
p	0,37	0,3	0,33

Әрбір шама үшін олардың ықтималдықтарының қосындысы 1-ге тең болу керек $\sum_{j=1}^{3} p(x_i) = 0,25 + 0,35 + 0,4 = 1;$ $\sum_{j=1}^{3} p(y_i) = 0,37 + 0,3 + 0,33 = 1;$

X=2 болғанда Y шамасының шартты ықтималдықтарын табамыз:

$$P(Y=1/ X=2)=P(Y=1, X=2)/ P(X=2)=0,10/0,4=0,25;$$
$$P(Y=2/ X=2)=P(Y=2, X=2)/ P(X=2)=0,12/0,4=0,30;$$
$$P(Y=3/ X=2)=P(Y=3, X=2)/ P(X=2)=0,18/0,4=0,45.$$

2. (X,Y) екі өлшемді кездейсоқ шаманың үлестірім кестесі берілген:

Y \ *X*	0	1	2
1	0,07	0,16	0,10
2	0,13	0,09	0,18
3	0,10	0,05	0,12

Әрбір *X* және *Y* шамалары үшін ықтималдықтардың үлестірім кестесін құр.

Тексеруге арналған сұрақтар:

1. Чебышев теңсіздігі не үшін қолданылады?
2. Чебышев теоремасы не үшін қолданылады?
3. Бернулли теоремасы не үшін қолданылады?
4. Кездейсоқ шамалар жүйесінің үлестірім заңы дегеніміз не?.
5. Екі кездейсоқ шамалар жүйесінің үлестірім функциясы деп не аталады және оның қасиеттері қандай?
6. Екі кездейсоқ шамалар жүйесінің үлестірім тығыздығы деп не аталады және оның қасиеттері қандай?
7. Екі кездейсоқ шамалар жүйесінің сандық сипаттамаларына не жатады? Олар қалай анықталады?

Ұсынылатын әдебиеттер тізімі

1 Жаңбырбаев Б.С. Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика элементтері.- Алматы: «Қайнар», 2018.- 384б.

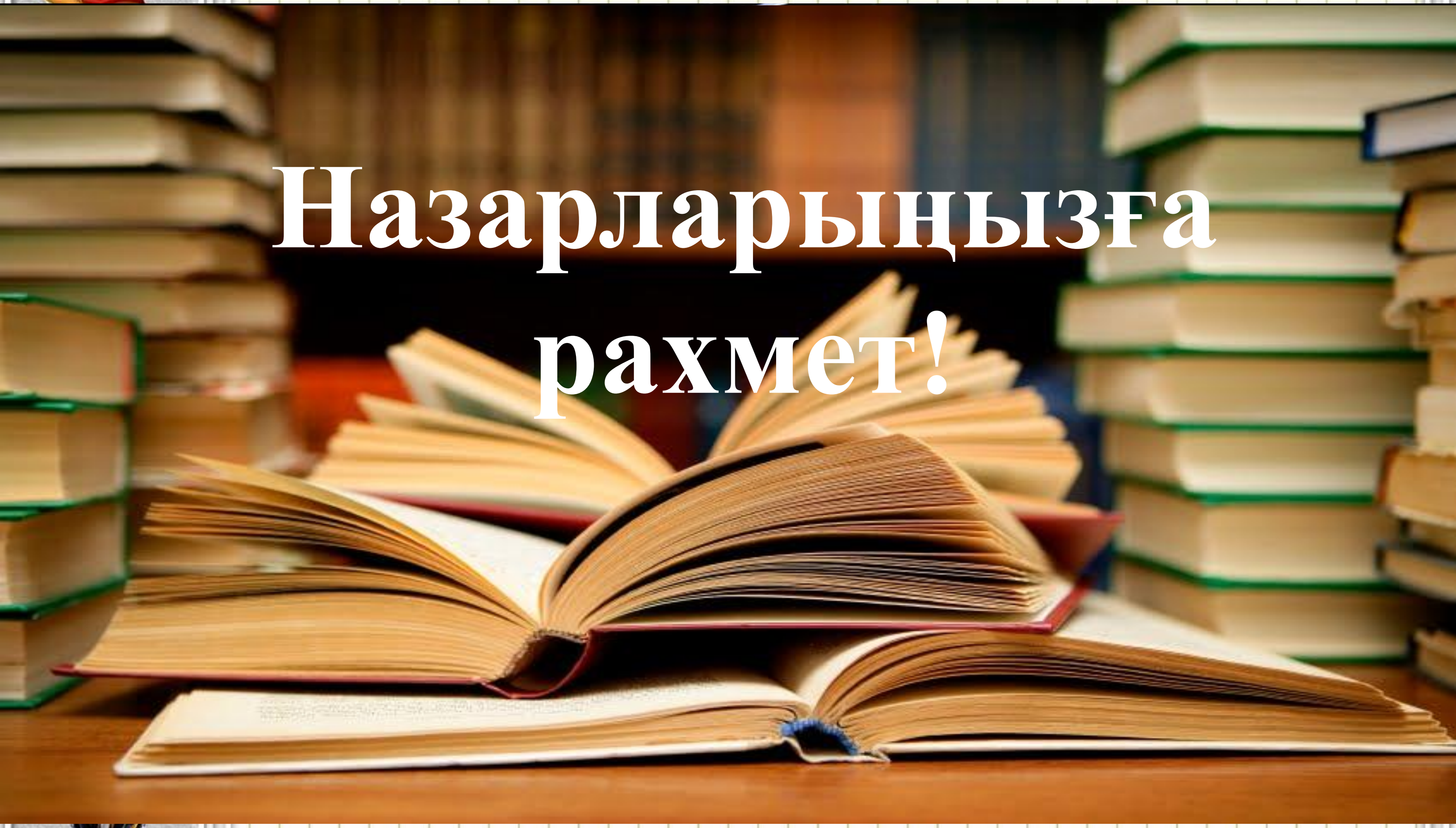
2 Бектаев Қ. Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика. Алматы: «Рауан», 2011ж.

3 Казешев А, Абенов М, Қойлышев Ү. Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика бойынша есептер жинағы.–А.: Ғылым, 2005.-183 б.

4 Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика.- М.: Высшая школа, 2000.- 479 б.

5 Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике.- М.: Высшая школа, 2000.- 400 б.

6 Виленкин Н.Я., Потапов В.Г. Задачник практикум по теории вероятности и математической статистике – М. Просвещение, 2010. -108 б.


Назарларыңызға
рахмет!