Отношение порядка. Отношение эквивалентности

Свойства отношений

- **Определение 1**

Пусть $P \subseteq A^2$. Р называют

а) рефлексивным, если $\forall x \in A \quad (x,x) \in P$,

б) антирефлексивным, если $\forall x \in A \quad (x,x) \notin P$,

в) симметричным, если $\forall x, y \in A \quad (x,y) \in P \Rightarrow (y,x) \in P$,

г) антисимметричным, если $\forall x, y \in A \quad \big((x,y) \in P \wedge (y,x) \in P\big) \Rightarrow (x = y)$

д) транзитивным, если $\forall x, y, z \in A \quad \big((x,y) \in P \wedge (y,z) \in P\big) \Rightarrow (x,z) \in P$

е) линейным, если $\forall x, y \in A \quad x \neq y \Rightarrow (x,y) \in P \vee (y,x) \in P$

Пример

$$A = \{2;3;4;6;8\}, P = \{(x, y) \mid x \vdots y\}$$

$$P = \{(2;2),(3;3),(4;4),(6;6),(8;8),(4;2),(6;2),(6;3),(8;2),(8;4),(8;4)\}$$

А) Рефлексивность - да

Б) Антирефлексивность - нет

В) Симметричность - нет

Г) антисимметричность - да

Д) транзитивность - да

Е) линейность - нет

Отношение порядка

- **Определение 2**

- Антисимметричное, транзитивное отношение называют отношением порядка. При этом рефлексивное отношение порядка называют отношением нестрогого порядка $\preccurlyeq$, антирефлексивное отношение порядка называют отношением строгого порядка .
- Линейное отношение порядка называют отношением линейного порядка. Отношение порядка, не обладающее свойством линейности, называют отношением частичного порядка.

Примеры

1) Естественный порядок на R^2

$$P = \{(x, y) \mid x \le y\} \qquad Q = \{(x, y) \mid x < y\}$$

А) антисимметричность $x \le y \wedge y \le x \Rightarrow x = y$ $\quad x < y \wedge y < x \Rightarrow x = y$

Б) транзитивность $x \le y \wedge y \le z \Rightarrow x \le z$ $\quad x < y \wedge y < z \Rightarrow x < z$

В) линейность $\forall x, y \in R \quad x = y \vee x \le y \vee y \le x$ $\quad \forall x, y \in R \quad x \ne y \Rightarrow x < y \vee y < x$

Г) рефлексивность $\forall x \in R \quad x \le x$

Д) антирефлексивность $\forall x \in R \quad \overline{x < x}$

$P = \{(x, y) \mid x \le y\}$ -Отношение нестрогого линейного порядка

$Q = \{(x, y) \mid x < y\}$-Отношение строгого линейного порядка

Примеры

2) Рассмотрим множество всех подмножеств множества А, Обозначение *B(A)*.

Рассмотрим $S \subseteq$ *B*(A) × *B(A)*, $S = \{(X;Y) \mid X \subseteq Y\}$

А) антисимметричность $\forall X, Y \in B(A)\ \left(X \subseteq Y \wedge Y \subseteq X \right) \Rightarrow (X = Y)$

Б) транзитивность $\forall X, Y, Z \in B(A)\ \left(X \subseteq Y \wedge Y \subseteq Z \right) \Rightarrow X \subseteq Z$

В) рефлексивность $\forall X \in B(A)\ X \subseteq X$

Г) линейность

Отношение нестрогого частичного порядка, так как отношение не линейно.

Например, А={1,2,3}, *B*(A)$=\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

{1,2} и {1,3} - несравнимые элементы

Примеры

3) P={(x,y)| x старше y}, $P \subseteq A^2$, где A – студенты одного института

А) антисимметричность

Если x – старше y, y – старше x , то x=y (верно)

Б) транзитивность

Если x – старше y, y – старше z , то x старше z (верно)

В) антирефлексивность

Для любого x неверно, что x старше x

Г) линейность

Существуют несравнимые элементы (студенты одного возраста)

P- отношение частичного строгого порядка

Примеры

4) P={(x,y)| x не младше y}, $P \subseteq A^2$, где A – студенты одного института

А) антисимметричность — Если x – не младше y, y – не младше x , то x,y - одного возраста, но не обязательно x=y

Б) транзитивность — Если x – не младше y, y – не младше z , то x не младше z (верно)

В) рефлексивность — Для любого x x не младше x

Г) линейность — Любые студенты сравнимы в этом смысле

P- не является отношением порядка

Отношение эквивалентности

- **Определение 3**
- Рефлексивное, симметричное, транзитивное отношение называют отношением эквивалентности.
- Обозначение $\approx$

- **Примеры**

На множестве студентов, обучающихся на одной специальности одного вуза задано отношение $P = \{(x, y) \mid x - однокурсник\ \ y\}$

1) Рефлексивность Для любого x - x однокурсник x

2) Симметричность Если x – однокурсник y, то y – однокурсник x

3) Транзитивность Если x – однокурсник y, y – однокурсник z, то x – однокурсник z

$$x \approx y \Leftrightarrow x - однокурсник \text{ y}$$

Отношение эквивалентности

На множестве натуральных чисел задано отношение

$$Q = \{(x, y) \mid x - y \,\vdots\, 5\}$$

1) Рефлексивность $\forall x \in N \; x - x = 0 \,\vdots\, 5$

2) Симметричность $\forall x, y \in N \; x - y \,\vdots\, 5 \Rightarrow y - x \,\vdots\, 5$

3) Транзитивность $\forall x, y, z \in N \quad x - y \,\vdots\, 5 \wedge y - z \,\vdots\, 5 \Rightarrow (x - y) + (y - z) = x - z \,\vdots\, 5$

$$x \approx y$$

Классы эквивалентности

- **Определение 4**. Система множеств $A_i, i \in I$ называется разбиением множества A, если
- а) $\bigcup A_i(i \in I) = A$,
- б) $\forall i, j \in I\left(A_i \cap A_j \neq \varnothing \Rightarrow A_i = A_j\right)$.

- **Определение 5.** Пусть $P \subseteq A^2$ - отношение эквивалентности на A. Классом эквивалентности, порожденным элементом $a \in A$ называют множество

$$[a] = \{x \in A \mid x \sim a\}$$

Классы эквивалентности

- **Теорема**. Если P -отношение эквивалентности на A , то множество классов эквивалентности образуют разбиение A .

Пример

$$P = \left\{ (x, y) \in N^2 \middle| (x - y) \vdots 3 \right\}.$$

Перечислите все классы эквивалентности для данного отношения

$$\overline{a} = \left\{ x \in N \middle| x \equiv a \pmod{3} \right\}.$$

$$\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}$$