

***ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТИ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
СТАТИСТИКА***

Лекция 4.

Основные изучаемые вопросы:

- **Случайные величины**
- **Основные числовые характеристики дискретной случайной величины.**
- **Биномиальный и пуассоновский законы распределения.**
- **Геометрическое распределение.**

Случайные величины

- **Случайная величина** - это переменная, которая в результате испытания принимает одно из своих возможных значений, причем заранее не известно, какое именно.
- *Примеры случайных величин:*
 - число очков, выпавших на верхней грани игрального кубика;
 - число студентов, пришедших на лекцию;
 - расстояние от центра мишени до точки попадания при выстреле;
 - сумма выплаты по очередному страховому случаю и т. п.

Для определения случайной величины необходимо задать ее закон распределения.

- **Закон распределения** - соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими вероятностями, с которыми случайная величина принимает эти значения.
- Для практического применения не всегда необходимо иметь полное представление о случайной величине, достаточно знать некоторые ее **числовые характеристики**, дающие суммарное представление о случайной величине, к которым, прежде всего, относятся **математическое ожидание** и **дисперсия**.
- **Математическое ожидание $M(X)$** - это число, характеризующее **среднее значение случайной величины X** .
- **Свойства математического ожидания:**
 - математическое ожидание постоянной величины равно этой величине

$$M(C) = C;$$

- **математическое ожидание произведения постоянной величины C и случайной величины X** равно произведению этой константы на математическое ожидание случайной величины (константу можно вынести за знак математического ожидания):

$$M(C \cdot X) = C \cdot M(X);$$

- **математическое ожидание алгебраической суммы n случайных величин X_1, X_2, \dots, X_n** равно алгебраической сумме математических ожиданий этих случайных величин:

$$M(X_1 \pm X_2 \dots \pm X_n) = M(X_1) \pm M(X_2) \dots \pm M(X_n);$$

- **математическое ожидание произведения n независимых случайных величин X_1, X_2, \dots, X_n** равно произведению математических ожиданий этих случайных величин:

$$M(X_1 X_2 \dots X_n) = M(X_1) \cdot M(X_2) \dots M(X_n);$$

- *математическое ожидание алгебраической суммы случайной величины X и постоянной величины C равно алгебраической сумме этой константы и математического ожидания случайной величины:*

$$M(X \pm C) = M(X) \pm C,$$

в частности, $M(X - M(X)) = 0$.

- *Дисперсия характеризует разброс или рассеяние значений случайной величины около ее математического ожидания.*
- *Дисперсия - это математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:*

$$D(X) = M[X - M(X)]^2.$$

- *Свойства дисперсии:*

- дисперсия постоянной величины C равна нулю:

$$D(C) = 0;$$

- **дисперсия произведения постоянной величины C и случайной величины X** равна произведению квадрата этой константы на дисперсию случайной величины (константу можно вынести за знак дисперсии, возведя ее в квадрат):

$$D(C \cdot X) = C^2 \cdot D(X);$$

- **дисперсия алгебраической суммы n независимых случайных величин X_1, X_2, \dots, X_n** равна сумме дисперсий этих случайных величин:

$$D(X_1 \pm X_2 \dots \pm X_n) = D(X_1) + D(X_2) \dots + D(X_n);$$

- **дисперсия алгебраической суммы случайной величины X и постоянной величины C** равна дисперсии случайной величины:

$$D(X \pm C) = D(X),$$

в частности, $D(C_1 \cdot X - C_2) = C_1^2 D(X)$.

- **Формула упрощенного вычисления дисперсии** имеет вид:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2.$$

Дискретная случайная величина

Дискретная случайная величина - случайная величина, которая принимает конечное или бесконечное, но счетное число отдельных изолированных значений (т. е. их можно перенумеровать натуральными числами).

- Для дискретной случайной величины простейшей формой задания закона распределения является **ряд распределения**, представляющий собой таблицу, в верхней строке которой указаны возможные значения x_i дискретной случайной величины X , а в нижней - вероятности p_i , того, что X примет значение x_i .

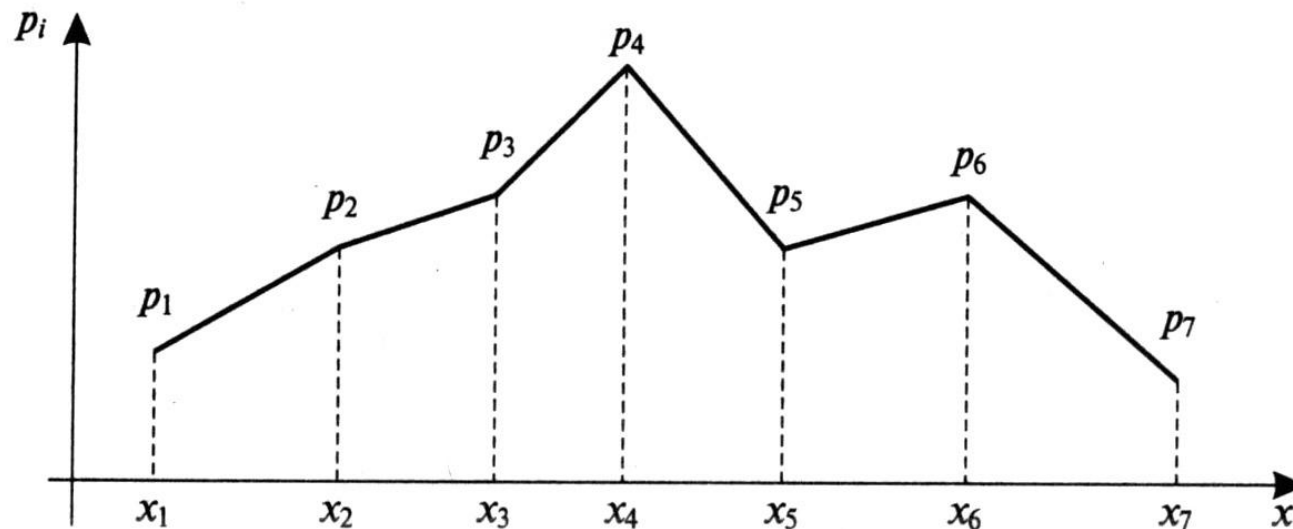
x_i	x_1	x_2	...	x_n
$p_i = P(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

При построении ряда распределения необходимо помнить, что:

$0 \leq P_i \leq 1$, по свойству вероятности;

$\sum_{i=1}^n P_i = 1$, так как события $(X = x_1), (X = x_2), \dots, (X = x_n)$ составляют полную группу попарно несовместных событий.

- *Графическое представление ряда распределения называется многоугольником (полигоном) распределения.*



Полигон распределения дискретной случайной величины X

Функция распределения дискретной случайной величины

- **Функция распределения (интегральная функция) $F(x)$** определяет для каждого возможного значения x вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее x :

$$F(x) = P(X < x).$$

- **Функция распределения дискретной случайной величины $F(x)$** равна сумме вероятностей всех значений x_i , меньших заданного значения x :

$$F(x) = \sum_{i: x_i < x} P(X < x).$$

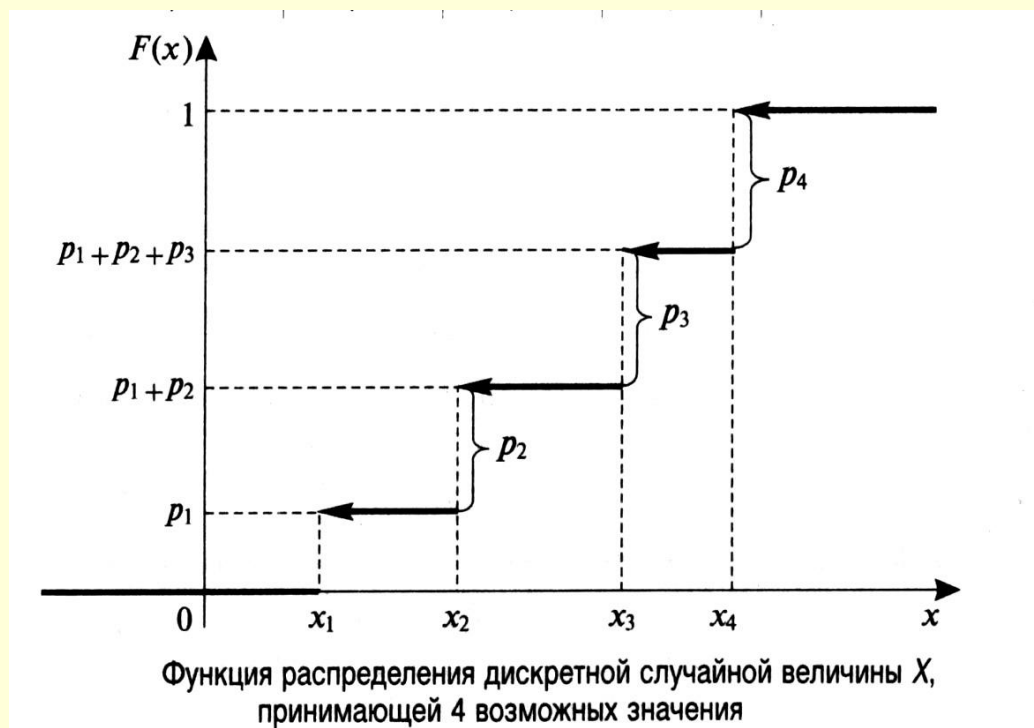
Свойства интегральной функции распределения дискретной случайной величины:

1. Функция распределения может принимать любые значения от 0 до 1, так как по определению является вероятностью:
 $0 < F(x) < 1$.

2. **Интегральная функция распределения является неубывающей:**

$$F(x_2) > F(x_1), \text{ если } x_2 > x_1$$

3. **Функция распределения любой дискретной случайной величины есть разрывная ступенчатая функция, скачки которой происходят в точках, соответствующих возможным значениям случайной величины и равны вероятностям этих значений. Сумма всех скачков равна 1.**



Основные числовые характеристики дискретной случайной величины

- 1. **Математическое ожидание** дискретной случайной величины определяется по формуле:

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i.$$

- 2. **Дисперсия** дискретной случайной величины определяется по формуле:

$$D(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - M(X))^2 p_i.$$

Говорят: **дисперсия есть математическое ожидание квадрата центрированной случайной величины.**

- 3. **Среднее квадратическое отклонение:**

$$\sigma_X = \sqrt{D(X)}.$$

Пример. Вероятность всхожести семян некоторого растения равна 0,8. Составить закон распределения числа взошедших семян из трех посеянных. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

• **Решение.**

Случайная величина X - число взошедших семян из трех посеянных. X может принимать числовые значения: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$.

- Для каждого из 3 семян вероятность события A - семя взошло - по условию постоянна и равна:

$$p(A) = p = 0,8; P(A) = q = 1 - p = 0,2.$$

- Вероятность того, что взойдут все три семени:

$$p_4 = p^3 = 0,8^3 = 0,512.$$

- Вероятность того, что все они не взойдут:

$$p_1 = q^3 = 0,2^3 = 0,008.$$

- Вероятность того, что взойдет ровно одно семя:

$$p_2 = 3pq^2 = 3 \cdot 0,8 \cdot 0,2^2 = 0,096.$$

- Вероятность того, что взойдут ровно два семени:

$$p_3 = 3p^2q = 3 \cdot 0,8^2 \cdot 0,2 = 0,384.$$

- Правильность составления закона подтверждается равенством:

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0,008 + 0,096 + 0,384 + 0,512 = 1.$$

Найдем числовые характеристики случайной величины – числа взошедших семян.

- 1. Математическое ожидание равно:

$$M(X) = 0 \cdot 0,008 + 1 \cdot 0,096 + 2 \cdot 0,384 + 3 \cdot 0,512 = 2,4.$$

- 2. Дисперсия равна

$$D(X) = (0-2,4)^2 \cdot 0,008 + (1-2,4)^2 \cdot 0,096 + (2-2,4)^2 \cdot 0,384 + (3-2,4)^2 \cdot 0,512 = 0,48.$$

- 3. Среднее квадратическое отклонение равно

$$\sigma_X = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0,48} = 0,69.$$

Основные законы распределения дискретных случайных величин

Биномиальный закон распределения - закон распределения дискретной случайной величины X , представляющей собой число m наступлений события A в серии n независимых испытаний, в каждом из которых событие может произойти с одной и той же вероятностью p .

- По условию **вероятность наступления события A** в каждом испытании **постоянна** $P(A_i) = p$ и **испытания независимы**. Поэтому вероятность того, что событие A наступит в n испытаниях ровно m раз, рассчитывается по формуле Бернулли:

$$P(X = m) = P_n(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m (1-p)^{n-m}.$$

- Дискретная случайная величина имеет **биномиальный закон распределения**, если она принимает целочисленные неотрицательные значения $0, 1, 2, 3, \dots, m, \dots, n$ с вероятностями, вычисляемыми по формуле Бернулли.

Математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины X , имеющей биномиальный закон распределения, равны:

$$M(X) = n \cdot p, \quad D(X) = n \cdot p \cdot q.$$

Пример. Вернемся к последней рассмотренной задаче. Число опытов, связанных с выращиванием трех зерен, $n = 3$. Вероятность того, что зерно взойдет в опыте $p = 0,8$, а что не взойдет $q = 1 - p = 0,2$.

Найдем математическое ожидание и дисперсию случайной величины по формулам, приведенным выше:

$$M(X) = n \cdot p = 3 \cdot 0,8 = 2,4,$$

$$D(X) = n \cdot p \cdot q = 3 \cdot 0,8 \cdot 0,2 = 0,48.$$

Ответ, как и следовало ожидать, не отличается от полученного ранее.

Закон распределения Пуассона - закон распределения дискретной случайной величины X , представляющей собой число m наступлений события A в заданном промежутке времени или пространства при заданной **интенсивности λ** .

- В отличие от биномиального с параметрами n (число независимых испытаний) и p (вероятность наступления события A в каждом испытании), закон распределения Пуассона определяется **интенсивностью λ наступления события A** .
- Случайная величина X , распределенная по закону Пуассона, может принимать все неотрицательные целые значения: $0, 1, 2, \dots, n, \dots$

Вероятность того, что **событие A наступит ровно m раз**, определяется по формуле:

$$P(m) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}.$$

Дискретная случайная величина имеет **закон распределения Пуассона** с параметром λ , если она принимает целочисленные неотрицательные значения $0, 1, 2, 3, \dots, m, \dots, n, \dots$ (бесконечное, но счетное множество значений) с вероятностями, вычисляемыми формуле Пуассона:

x_i	0	1	...	m
p_i	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$...	$\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$

где $\lambda = n \cdot p$ - **параметр распределения Пуассона**.

Так как вероятность наступления события A в каждом испытании мала, **закон распределения Пуассона еще называют законом редких событий**.

Числовые характеристики закона Пуассона определяются формулами:

$$M(X) = D(X) = \lambda = n \cdot p.$$

Пример. В приемное время врача посещает в среднем 7 человек в час. Составить закон распределения числа пациентов, посетивших врача в течение часа.

- *Решение.*
- Случайная величина X - число пациентов, посетивших врача в течение часа. Таким образом, оценивается число m наступлений события A (пациент пришел к врачу в течение часа) при заданной интенсивности $\lambda = 7$ (среднее число посетителей в час определяется в соответствии с формулой: $M(X) = \lambda = 7$, что и было задано в условии задачи).
- Следовательно, случайная величина X подчиняется закону распределения Пуассона с параметром $\lambda = 7$.

- Случайная величина X может принимать числовые значения: $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, \dots$ с вероятностями p_i равными:

$$p_0 = P(X = 0) = \frac{7^0}{0!} e^{-7} = 0,00091 ;$$

$$p_1 = P(X = 1) = \frac{7^1}{1!} e^{-7} = 0,00638 ;$$

$$p_2 = P(X = 2) = \frac{7^2}{2!} e^{-7} = 0,02234 ;$$

$$p_3 = P(X = 3) = \frac{7^3}{3!} e^{-7} = 0,05213 ; \dots$$

- Таким образом, закон распределения случайной величины X - числа пациентов, посетивших врача в течение часа, имеет вид:

X_i	0	1	2	3	...
P_i	0,00091	0,00638	0,02234	0,05213

Геометрическое распределение

- Если дискретная случайная величина может принимать только значения целых натуральных чисел с вероятностями

$$P(X = k) = pq^{k-1}, k = 1, 2, 3...$$

где $0 < p < 1$, $q = 1 - p$,

то говорят, что *дискретная случайная величина подчиняется геометрическому распределению.*

С помощью геометрического распределения оценивают *вероятность проведения некоторого числа испытаний для достижения успеха.*

Математическое ожидание и дисперсию определяют по формулам

$$M(X) = 1/p; D(X) = q/p^2.$$

- **Пример.** Вероятность поражения мишени стрелком равна $p = 0,7$. Случайная величина X – это число выстрелов до первого попадания в мишень. Определить вероятности попадания в мишень при осуществлении двух, трех, четырех и пяти выстрелов, а также математическое ожидание и дисперсию случайной величины X .

$$P(X = 2) = p \cdot q = 0,7 \cdot 0,3 = 0,21;$$

$$P(X = 3) = p \cdot q^2 = 0,7 \cdot 0,3^2 = 0,063;$$

$$P(X = 4) = p \cdot q^3 = 0,7 \cdot 0,3^3 = 0,0189;$$

$$P(X = 5) = p \cdot q^4 = 0,7 \cdot 0,3^4 = 0,006;$$

$$M(X) = 1/p = 1/0,7 = 1,43;$$

$$D(X) = q/p^2 = 0,3/0,7^2 = 0,61.$$

Задание для самостоятельной работы

- Дискретная случайная величина X в результате проведения 20 опытов получала следующие значения:

2, 3, 5, 6, 4, 1, 1, 2, 6, 5, 4, 3, 3, 4, 1, 2, 5, 4, 5, 6.

- *Определить математическое ожидание и дисперсию случайной величины.*
- *Построить ряд распределения (полигон распределения) случайной величины.*
- *Определить вероятность того, что случайная величина X примет значения, меньшие 6, но большие 2:*

$$P(2 < X < 6).$$