

Муниципальное образовательное учреждение средняя школа №110
Кировского района г. Волгограда

Геометрия куполов

Работу выполнила Васильева Алина,
учащаяся 10 «А» класса
Руководитель: Натачаев Федор Николаевич,
учитель математики

Волгоград, 2016

Цель: исследовать понятие куполов с точки зрения геометрии, религии и архитектуры.

Задачи:

- Рассмотреть понятие купола, изучить историю его возникновения и исследовать многообразие форм.
- Изучить способы построения купола.
- Исследовать понятие «золотого сечения», изучить его роль в проектировании храмов.

Объект исследования: храмы русской православной церкви.

Предмет исследования: геометрия построения архитектурных памятников («золотое сечение»), храмов русской православной церкви (эскизы, чертежи, описание построения храмов и куполов).

Храм (от праславянского: *храмъ* — «дом») — культовое сооружение, предназначенное для совершения богослужений и религиозных обрядов. В православии храмом является только то сооружение, в котором есть алтарь.

Православный храм завершает купол, напоминая о небе, куда верующий устремляет свои мысли.

Купол — пространственная несущая конструкция, по форме близкая к полусфере или другой поверхности вращения кривой (эллипса, параболы и т. п.).

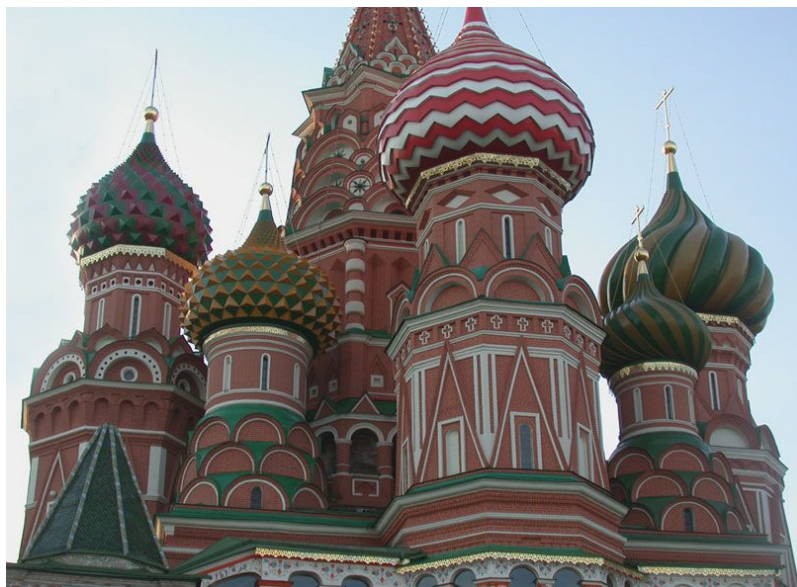
История куполов началась в доисторические времена. Купола стали использовать при строительстве храмов и больших общественных сооружений примерно в 128 году нашей эры. Купола занимают важное место в христианской и мусульманской архитектуре.



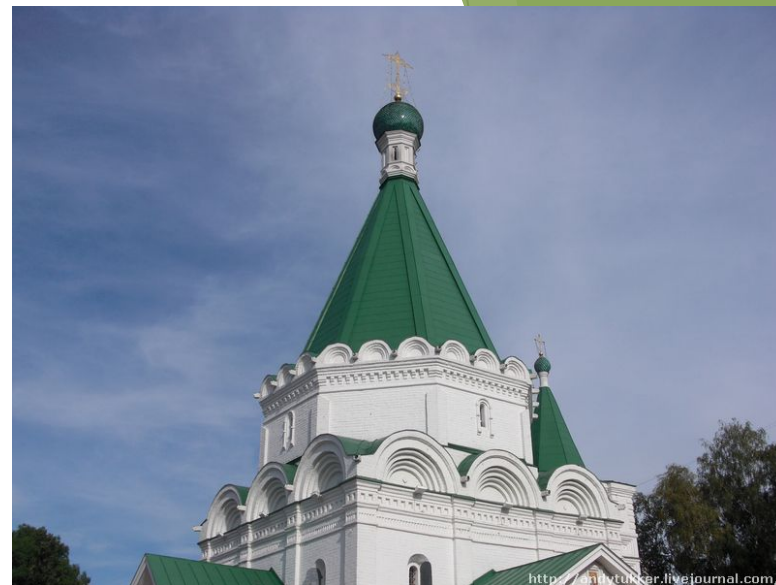
Купола, а точнее, главы над храмами бывают шлемовидными, луковичными, грушевидными и конусовидными.



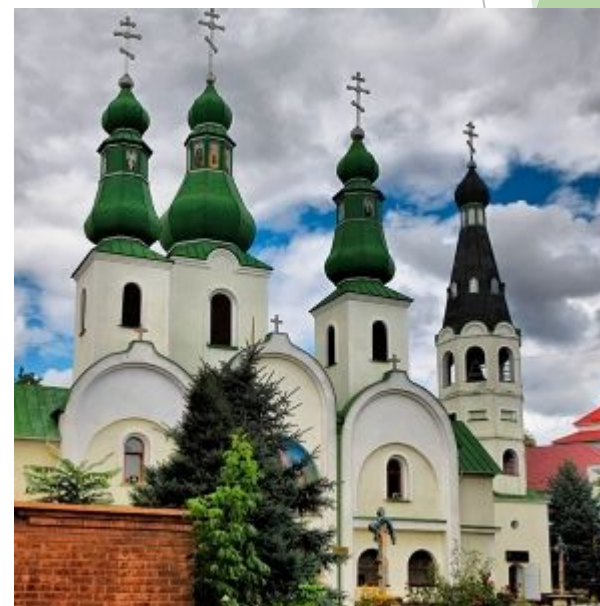
Шлемовидная глава



Луковичные главы



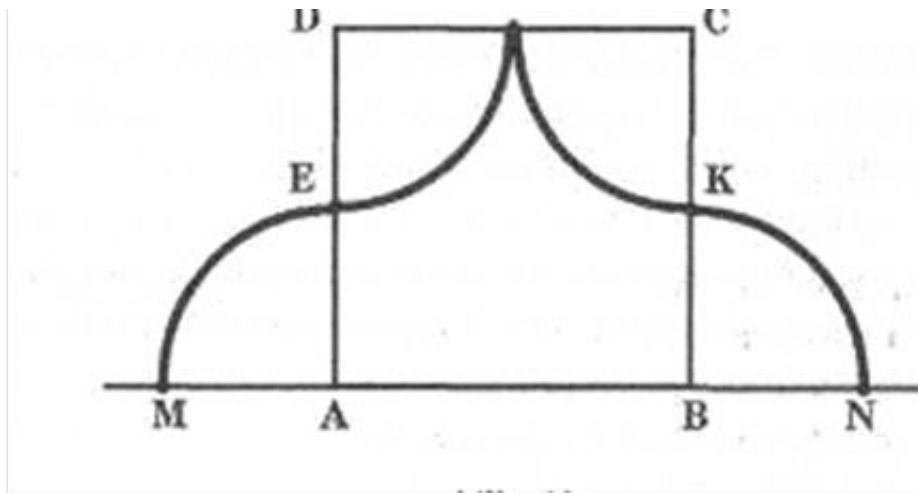
Конусовидные главы



Грушевидные главы

Геометрическое построение церковного купола

Самый простой эскиз купола строится таким образом: в квадрате $ABCD$ отмечаются середины E , F , K его сторон AD , DC и CB соответственно. Из точек A , B , C , D как из центров проводят дуги радиусом, который составляет половину стороны квадрата. Продолжение стороны AB квадрата пересекают двое из дуг в точках M и N .

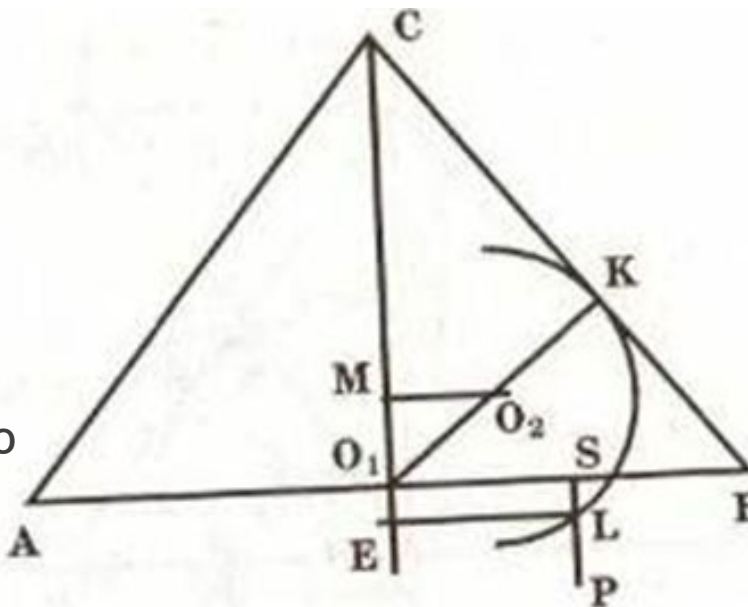


«Золотым сечением» (делением), «божественной пропорцией» называли математики древности и средневековья деление отрезка, при котором длина всего отрезка так относится к длине его большей части, как длина большей части к меньшей. Это отношение приблизительно равно 0,618 или $5/8$.

Обозначим её через Φ , установив, что $\phi = (\sqrt{5}+1)/2 = 1,6$. Допустим: $AB : O_1C \approx 1,6$. Как построить отрезки AB и O_1C ?

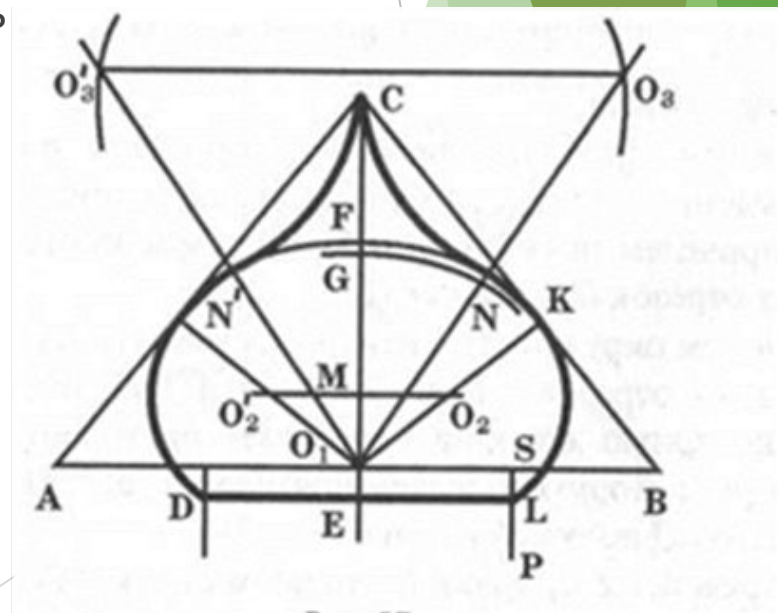
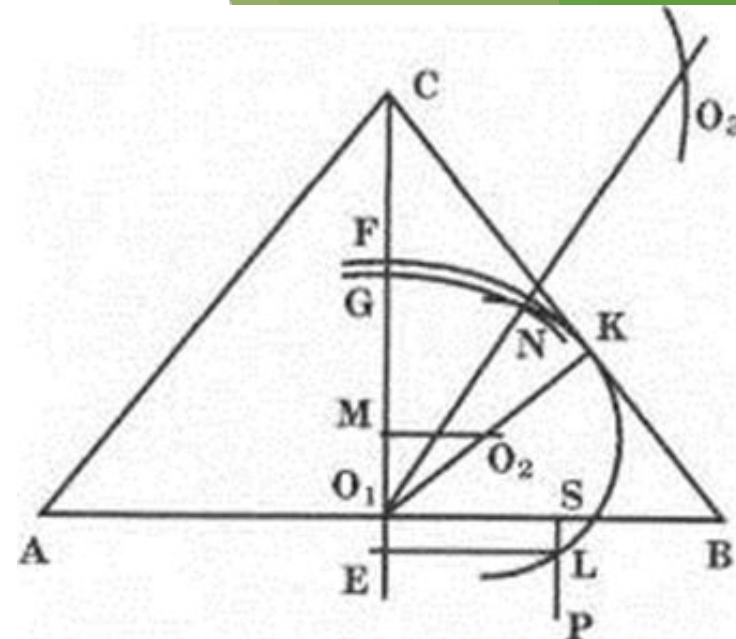
Прежде всего, выберем единицу измерения — отрезок e . Затем выполним преобразования $AB : O_1C = 1,6 = 16:10 = 8:5$. Это значит, что $AB = 8e$, а $O_1C = 5e$.

Представим себе, что нам следует построить равнобедренный треугольник ABC , у которого основание AB и высота O_1C составляют золотую пропорцию. Тогда мы строим отрезок $AB = 8e$, делим его пополам точкой O_1 , и проводим перпендикуляр к AB через точку O_1 , на которой откладываем отрезок $O_1C = 5e$. Треугольник ACB послужит основой для нового эскиза купола православной церкви.



План построения

1. Проведем перпендикуляр O_1K к стороне BC .
 2. На высоте CO_1 , отметим точку M так, чтобы $CM = O_1B$, и через точку M проведем прямую, перпендикулярную прямой CO_1 , которая пересекает отрезок O_1K в точке O_2 .
 3. Проведем окружность с центром в точке O_2 и радиусом O_2K .
 4. Разделим отрезок O_1B точкой S и через нее проведем прямую SP , перпендикулярную AB . Она пересекает построенную окружность в точке L , через которую проведем прямую, параллельную AB . В пересечении с осью CO получится точка E .
 5. На прямой CE от точки C отложим отрезок $CG = 2e$. Из точки O , как из центра проведем окружность, радиусом O_1G которая пересечет предыдущую окружность в точке N , и окружность радиусом O_1K , пересекающую высоту CO_1 в точке F .
 6. Через точки E и N проведем прямую. Из точки C как из центра проведем окружность радиусом EF , которая пересечет прямую EN в точке O_3 .
 7. Затем из O_3 проведем дугу радиусом O_3N до ее пересечения с точкой C .
- Линия, составленная из двух построенных дуг LKN и NC , образует половину эскиза купола. Вторая половина получается при выполнении симметрии относительно оси CO_1 .



Следующее построение эскиза купола использует золотое сечение и его «производную».

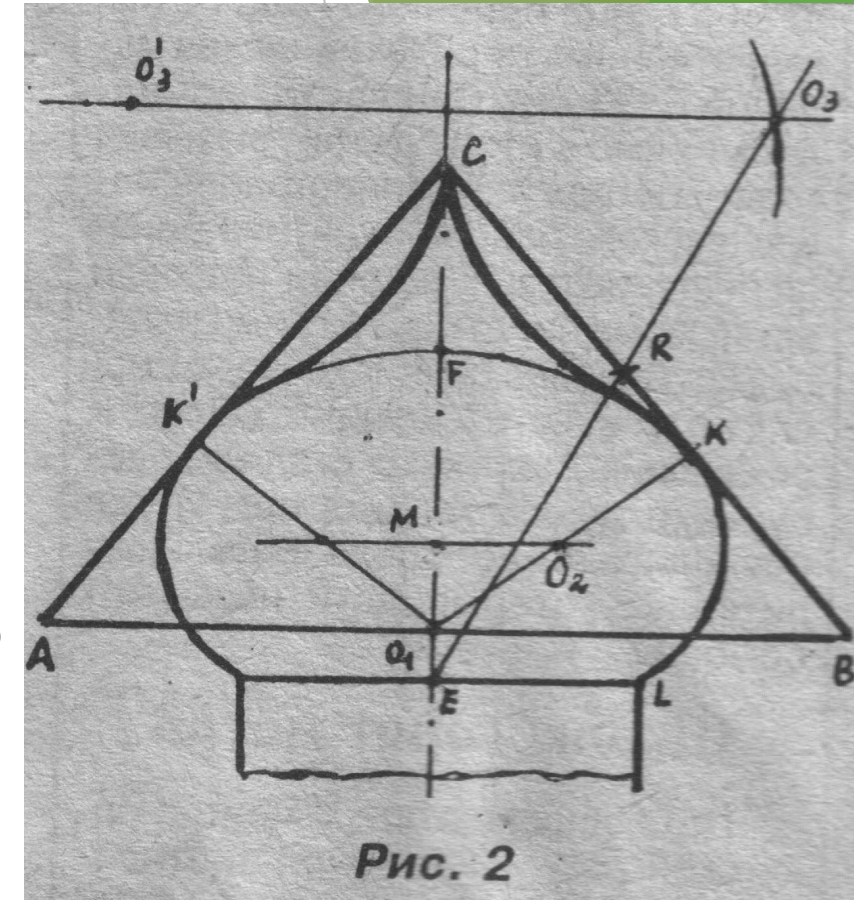
Строится равнобедренный треугольник ACB , в котором $AB/CO_1 = \phi$ ($\phi \sim 1,618$). Проводится перпендикуляр OTK к боковой стороне BC ; На высоте CO_1 отмечается точка M так, что $CM = O_1B$; через точку M проводится прямая, перпендикулярная CO_1 , которая пересекает отрезок O_1K в точке O_2 . Из точки O_2 чертится окружность радиуса O_2K ;

Отрезок O_1B делится пополам и через полученную середину проводится прямая, перпендикулярная AB , она пересекает построенную окружность в точке L ; через неё далее проводится прямая, параллельная AB , а в пересечении с осью симметрии купола получается точка E ;

Из точки O_1 строится окружность радиуса O_1K , которая пересекает CO_1 в т. F , из точки O_2 проводится окружность радиуса MF так, чтобы она пересекала сторону BC в точке R .

Затем из точки C проводится окружность радиуса EF и строится прямая ER ; эти две фигуры пересекаются в точке O_3 , из которой проводится окружность радиуса EF ; три перечисленные окружности, пересекаясь, образуют из своих частей линию, определяющую половину контура купола; вторая половина купола получается при выполнении симметрии относительно оси CO_1 .

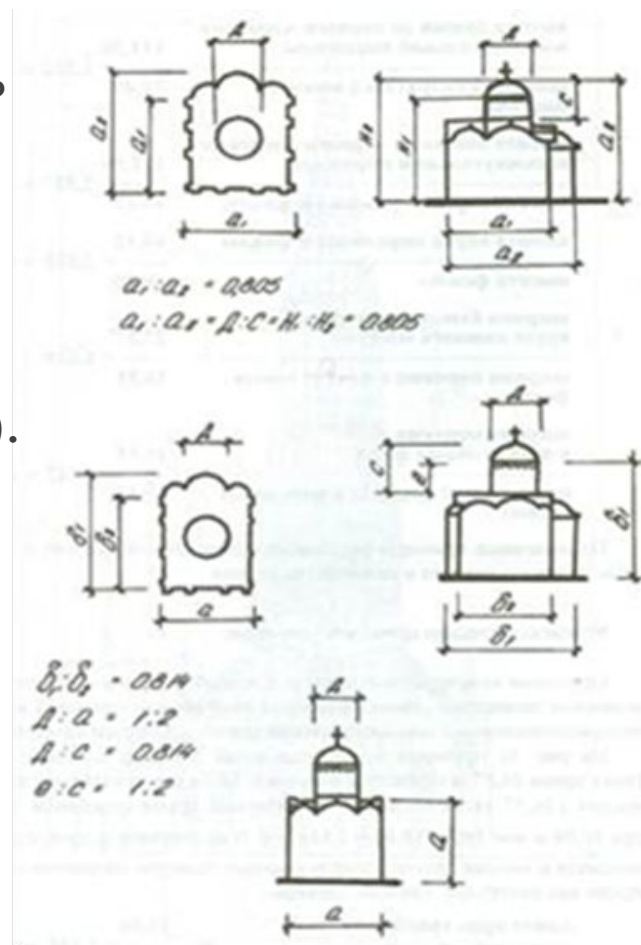
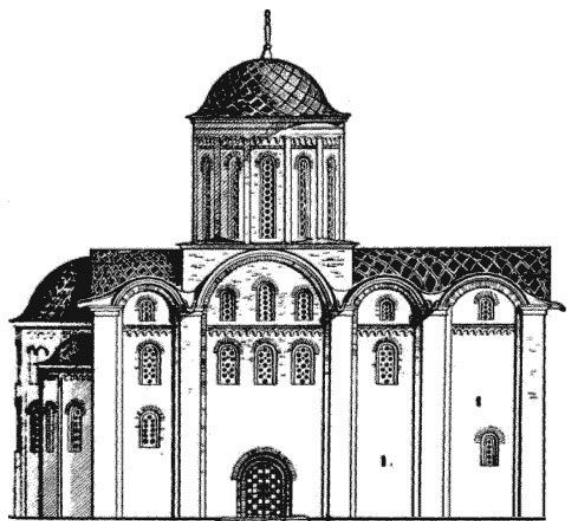
На её основе сажени строится квадрат $ABCD$. В нем проводится диагональ AC , которая тогда соответствует великой кривой сажени, диагональ AE прямоугольника $ADEF$ будет сажень без чети, диагональ AM прямоугольника $ALMF$ (с точками K и L сторона данного квадрата делится на три равные части) - прямая сажень, диагональ AP прямоугольника $ALPB$ - косая сажень и диагональ AN прямоугольника $ALNB$ - трубная сажень.



Использование соотношения «золотого сечения» при строительстве храма

Примером может служить Успенская Елецкая церковь в Чернигове. Расчет размеров этой церкви позволил выявить, что композиционный замысел целиком связан с золотым сечением.

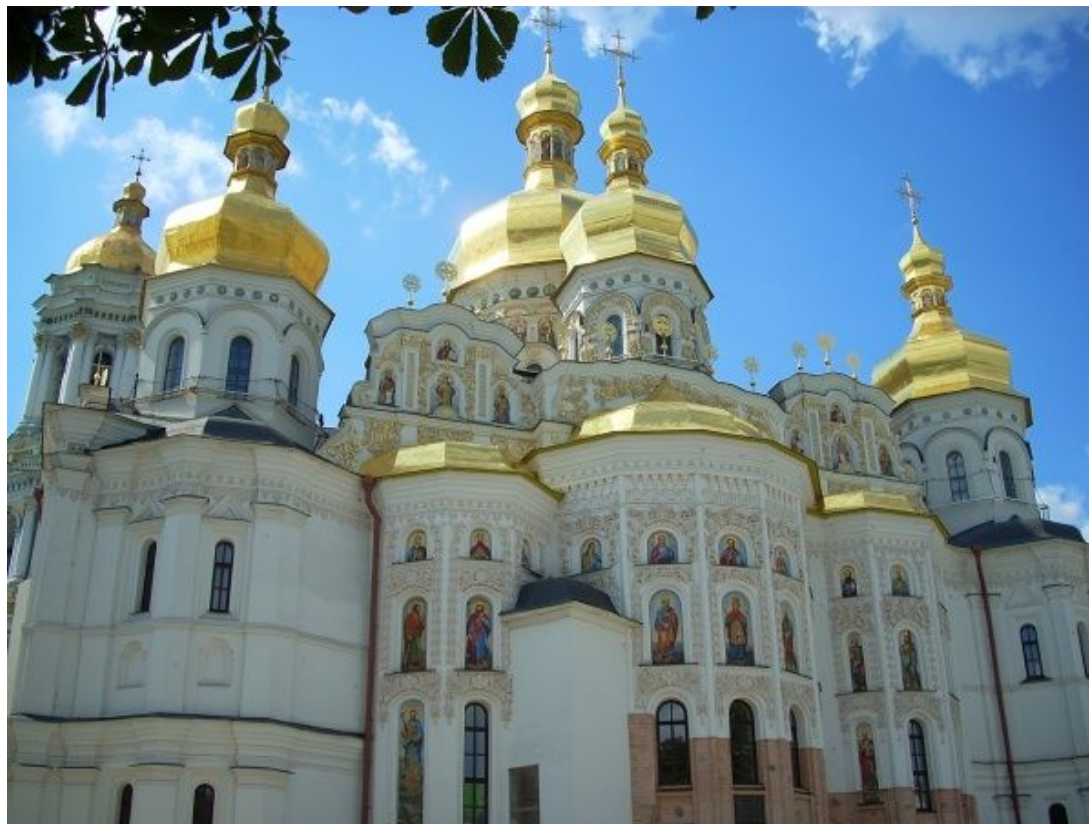
Длина храма 26,57 м относится к ширине 16,24 м в отношении золотого сечения ($26,57/16,24 = 1,636 \approx d$).
Ширина храма относится к длине ядра 10,06 м как $16,24/10,06 = 1,614 \approx d$.



Композиционный замысел

Установлено, что основой пропорционального строя Печерской церкви является отношение $2/\sqrt{5}$, которое хорошо видно на фасаде и разрезе реконструкции размерной структуры церкви. Отношение $2/\sqrt{5}$ также можно выразить через золотую пропорцию, что свидетельствует о её связи с основными размерами церкви.

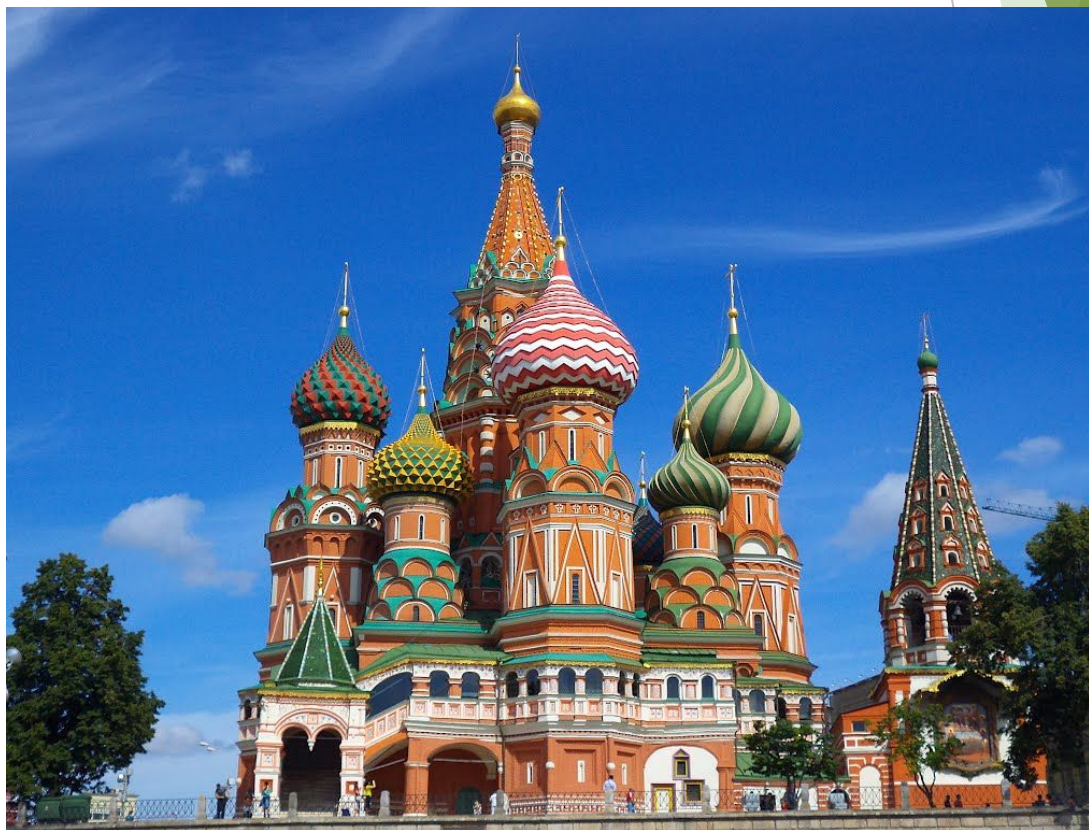
$$\frac{2d}{d+2} = \frac{2d}{d^2+1} = 0,894 = \frac{2}{\sqrt{5}},$$



Печерская церковь

Храм Василия Блаженного в Москве - это еще один пример, показывающий, насколько органично золотое сечение входит в архитектурные пропорции. За «целое» $a = 1$ принята высота храма. Пропорции храма определяются восемью членами ряда золотого сечения: 1, ϕ , ϕ^2 , ϕ^3 , ϕ^4 , ϕ^5 , ϕ^6 , ϕ^7 .

Многие из членов ряда неоднократно повторяются в пропорциях этого затейливого архитектурного сооружения, но всегда благодаря свойству золотого сечения, части сойдутся в целое, т.е. $\phi + \phi^2 = 1$, $\phi^2 + \phi^3 = \phi$ и т.д.

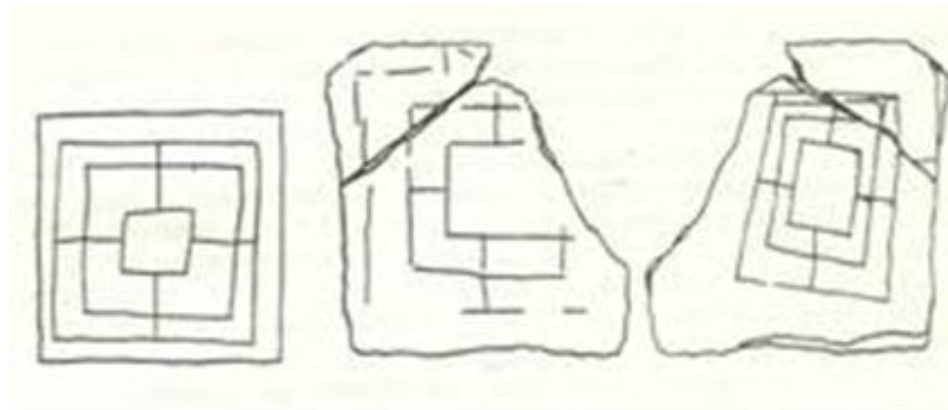


Серьезное изучение методов формообразования в древнерусском зодчестве было начато К. Н. Афанасьевым. В результате обобщения аналитических данных он пришел к выводу, что в русских церковных постройках XI-XIII вв. «размер центрального купола или подкупольного квадрата неизменно является начальным звеном цепи построения соразмерностей.

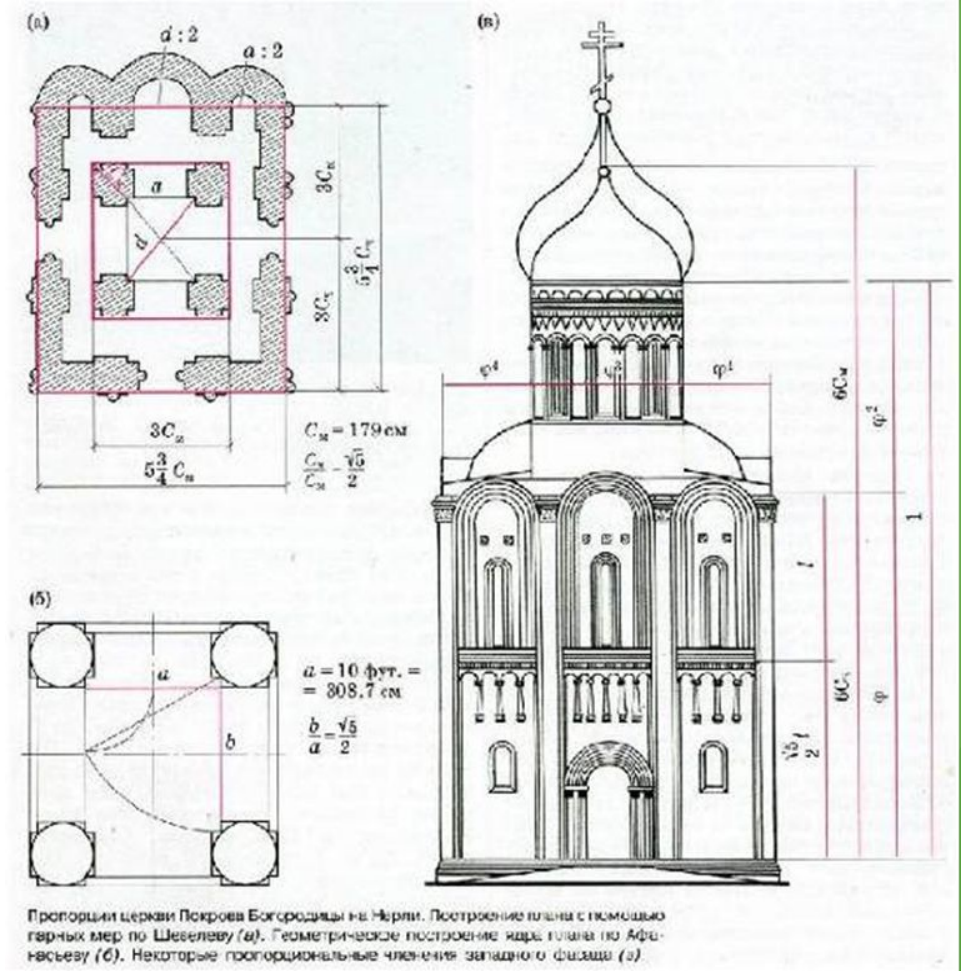
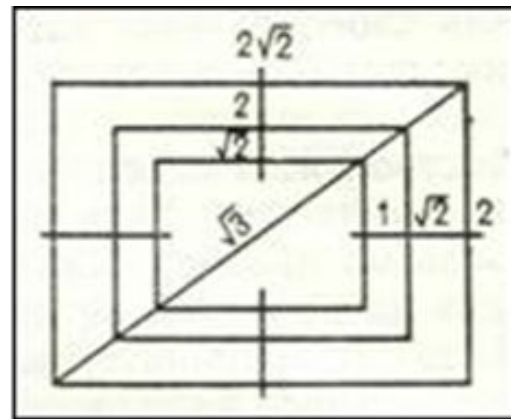
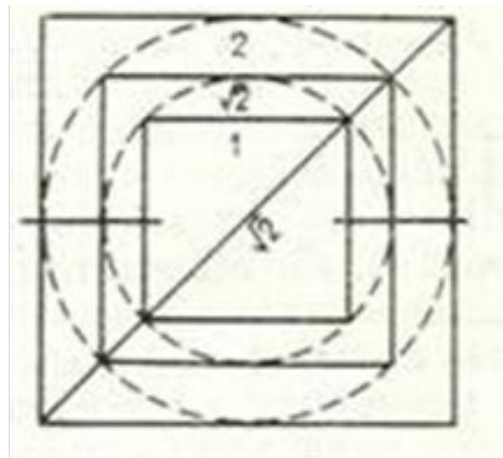
Подкупольный квадрат, определявший самый ответственный конструктивный и композиционный элемент церкви - центральную главу, мог являться и часто являлся основой для геометрических построений.

Широкое использование квадрата и его производных имело в древнерусском зодчестве глубокие корни. Древние изображения вписанных друг в друга квадратов с четырьмя линиями, соединяющими их стороны в средней части называют вавилонами.

Вавилоны - символические схемы «зодческой мудрости», связанные с приемами разбивки планов зданий.



Древнерусские мастера - использовали в своей работе взаимосвязанные меры длины. В основе взаимосвязанных мер длины лежали соотносимые величины системы двух квадратов. Геометрические построения на базе двух квадратов позволяют получить почти все распространенные в строительстве пропорциональные отношения, в том числе и характерные для древнерусской метрологии (простая сажень к косой - $1:\sqrt{2}$ или мерная сажень к «сажени без чети» - $2:\sqrt{5}$).



Церковь Покрова Богородицы на Нерли

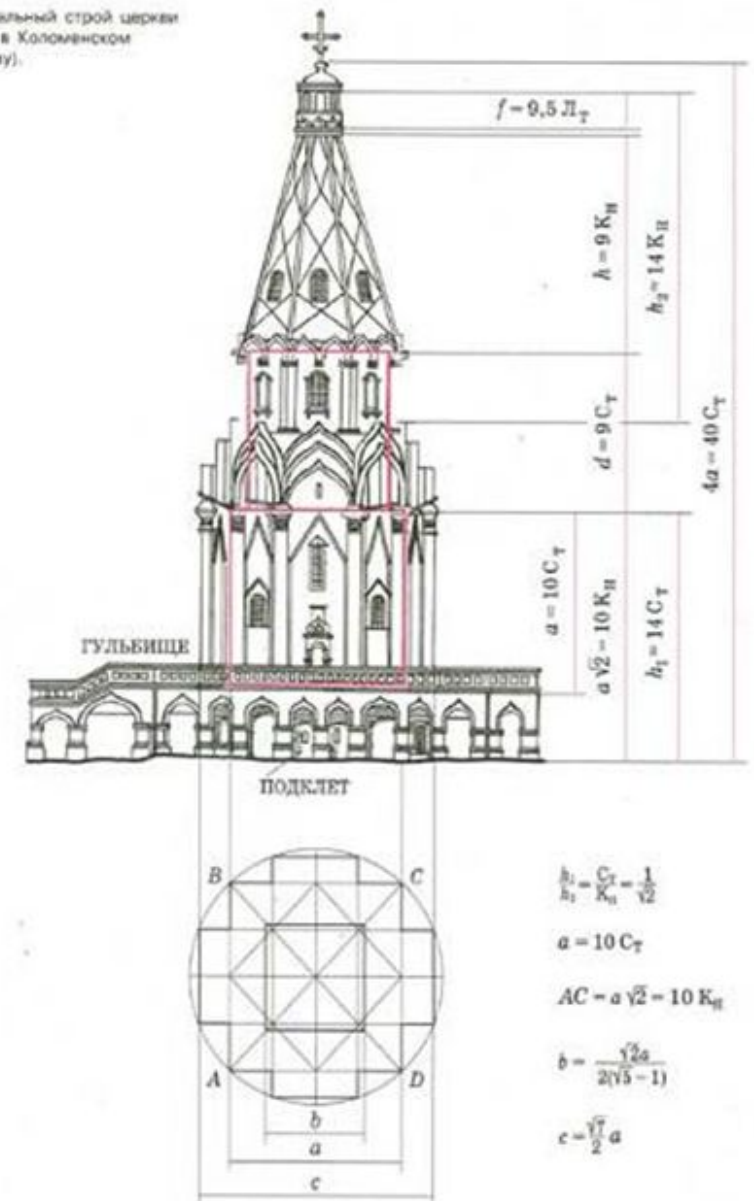
Церковь Вознесения называют архитектурным гимном геометрии. Соразмерность храма с предельной ясностью определены двумя парными мерами: горизонтальные - малой саженью $Ст$ и косою саженью $Кн$ ($Ст : Кн = 1 : \sqrt{2}$), вертикальные - малой саженью $Ст$ и мерной саженью $См$ ($Ст : См = 1 : (\sqrt{5}-1)$) и их комбинацией, дающей золотое сечение.

Основной объем храма составляет двадцатигранная призма. Её высота равна стороне исходного квадрата a . Таким образом, ядром основного объема является куб-четверик $a \cdot a \cdot a$ ($a = 10Ст$). Вместе с подклетом высота 20-гранной призмы равна диагонали исходного квадрата $a\sqrt{2} = 10\sqrt{2}Ст = 10Кн$.

Сторона и диагональ исходного квадрата полностью определяют вертикальные размеры основного объема. Двадцатигранная призма переходит в восьмигранную призму-восьмерик, который вписан в куб $d \cdot d \cdot d$ ($d = 9Ст$) и который переходит в восьмигранный шатер, высота которого $h = d\sqrt{2} = 9\sqrt{2}Ст = 9Кн$, т.е. шатер вписан в прямоугольный параллелепипед $9Ст \cdot 9Ст \cdot 9Кн$. Общая высота церкви равна $4a = 40Ст$, т.е. также выражается через исходный размер a .

Пропорции храма Вознесения определены двумя математическими закономерностями. Пропорцией $Ст : Кн = 1 : \sqrt{2}$, определяющей основание, а также пропорцией золотого сечения: $См : Ст = \phi$. При этом соблюден принцип встречного движения пропорций.

Пропорциональный строй церкви Вознесения в Коломенском (по Шевелеву).



Выводы

- ▶ Мною было рассмотрено понятие купола, изучена историю его возникновения и исследовано многообразие форм.
- ▶ Изучены способы построения купола.
- ▶ Исследовано понятие «золотого сечения», изучена его роль в проектировании храмов.

Спасибо за внимание!