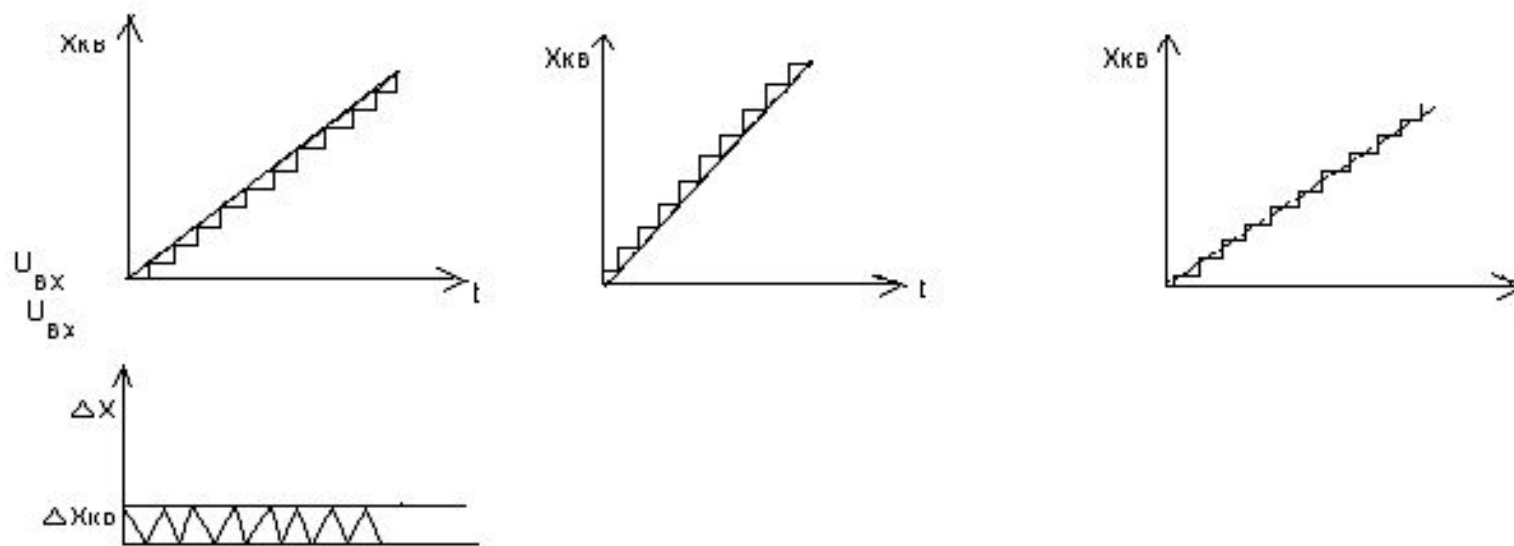

ТАҚЫРЫП 6. ДИСКРЕТТЕУ ЖӘНЕ КВАНТТАУ. КОТЕЛЬНИКОВ ТЕОРЕМАСЫ.



Дәріс жоспары:

1. Сигналдардың дискретизациясы;
2. Дискретизацияланған сигналдардың қалпына келуі;
3. Котельников Теоремасы.

Деңгей бойынша дискретизация (кванттау) деп кванттау шкаласының шешілген мәніне шаманың үздіксіз мәнін жатқызатын операцияны түсінеді. Математикалық көзқарастан кванттау операциясына сәйкес келетін шешу тәртібімен (кванттаудың төменгі шекарасынан жоғарғы шекарасына немесе оның ортасына) үздіксіз шаманың мәнін анықтауға байланысты. Сандық бағаны алу үшін деңгей бойынша кванттаудан кейін кодтау операциясына көшеміз.



6.1 Сурет. Бірқалыпты деңгей бойынша кванттау операциясы

Суретте бірқалыпты деңгей бойынша кванттау операциясы көрсетілген, үздіксіз шаманың мәнінің мүмкін диапазоны X кванттаудың тең интервалдарына n бөлінеді.

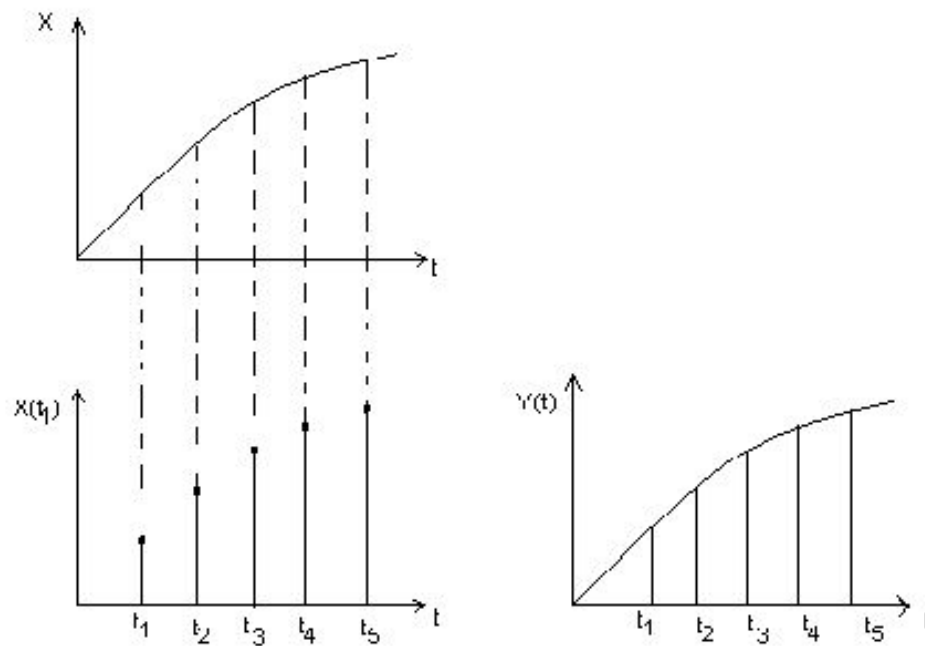
Кванттаудың әрбір интервалының ұзындығы **кванттау қадамы** деп аталады.

Бірінші және *екінші* жағдайда да абсолютті қателік кванттау қадамына тең, *соңғысында* – кванттау қадамының жартысына .

Сандық өлшеу аспаптарында кванттау автоматты түрде орындалады. Деңгей бойынша кванттау, экспериментатордың аналоготы аспабының шкаласынан саналатын, сандық регистрация бойынша орындалады.

Уақыт бойынша дискретизация. Уақыт бойынша үздіксіз функциядан дискретті уақыт функциясына өтудің ең қарапайым тәсілі, белгілі дискретті уақыт кезінде функция санауынан алу жолмен орындалады. Нәтижесінде үздіксіз функциясы эп-сәттегі мәндердің жиынтығымен алмастырылады. мәндері бойынша берілген дәлдікпен алдыңғысың қалпына келтіретін жаңа функцияны қалпына келтіруге болады.

$Y(t)$



Интервал аз болған сайын, функцияның қалпына келуі дәлдірек болады. Котельников теоремасына сәйкес кванттаудың ең тиімді интервалы таңдалады, ол келесідей болады: егер функция $X(t)$ жиілігі қию жиілігінен жоғары болмаса f_c , онда ол сол уақытта толығымен өзінің әп-сәттегі мәнімен анықталады, бір-бірінен $\Delta t = \frac{1}{2f_c}$, сек шамаға қалады.

Дискретизация – үзіліссіз уақытты функцияны дискретті уақытты функцияға айналдыру мәндерінің жиынтығы координаталар деп аталады, олардың мәндері бойынша берілуші функция берілген дәлдікте қалпына келтіріледі.

Дискретизация әдістерін классификациялау.

Дискретизация әдістерін келесі белгілермен өтуі мүмкін.

- 1) Өлшеу жиілігі;
- 2) Дискреттеу және қалпына келтіру дәлдік бағасының критерийі;
- 3) Базистік функциялар;
- 4) Жақындау принципі;



1. Өлшеу жиілігі

Өлшеу жиілігі бойынша дискреттеу әдісі *бірқалыпты* және *бірқалыпсыз* болып екіге бөлінеді.

$\Delta T_i = t_i - t_{i-1} = \text{const} \rightarrow$ бірқалыпты;

$\Delta T_i = \text{var} \rightarrow$ ыпсыз.

(адаптивті және программаланған).

Адаптивті әдіс үшін ΔT_i интервалы сигналдарды беру параметрлерінің ағымдық өзгерумен тәуелді өзгереді. Программаланған әдістер үшін ΔT интервалының өзгеруі (F_0 ұранысының жиілігі) түскен ақпаратты талдау негізіндегі оператормен, немесе алдын ала орнатылған программалық жұмыспен сәйкес өндіріледі.

2. Дәлдік бағасының критерийі

$x(t)$ сигналының мәні, $V(t)$ туынды функция, сонда $\varepsilon(t)$ дискретизация ағаттығы немесе сәйкес қалпына келтіру

$$\varepsilon(t) = x(t) - V(t)$$

Ағаттық бағасы жеке және көпше сигнал беруде өндіріледі.

Көп жағдайда туынды функциясының $V(t)$ $\Delta T_i = t_i - t_{i-1}$ интегралында $x(t)$ сигналынан ауытқуы келесі критерийлермен бағаланады.

1. Көбірек ауытқу критерийі $\varepsilon_m = \max_{t \in \Delta T_i} |\varepsilon(t)| = \max_{t \in \Delta T_i} |x(t) - v(t)|$

2. Орташа квадратты критерийі $\overline{\varepsilon^2} = \sqrt{\frac{1}{\Delta T_i} \int_{\Delta T_i} \varepsilon^2(t) dt}$

3. $V(t)$ - дан $x(t)$ ауытқу шарасы тәрізді интегралдың критерий келесі түрде болады:

$$\varepsilon = \int_{\Delta T_i} \varepsilon^2(t) dt$$

4. Ықтималдық критерийі $p\{\varepsilon(t)\varepsilon_0\} = p_0$ қатынасы мен анықталады.

ε_0 — ағаттықтың берілген мәні;

p_0 — ағаттықтың, ε_0 мәнін асып кетпеу мүмкіндігінің ықтималдығы.

3. Базистік функциялар

Дискреттеу есебінің түсіндірмесі келесідей: $[a,b]$ кесіндісінде анықталған, R функциясының классына жататын, берілген $x(t)$ үшін, $[a,b]$ кесіндісінде t_i бөлігінде нүктелер саны минималды немесе $\varepsilon(t) \leq \varepsilon_0$ болатын $p(t)$ функциясын немесе $V(t) \in S$ табу керек (мұндағы S - функцияның кейбір тұрғызылған классы), мұнда ε_0 - ағаттықтың жіберілген мәні, $\varepsilon(t)$ - алынған $P(t)$ критерийімен жақындатылған, сәйкес $V(t)$ дан $x(t)$ ауытқу бағасы.

Базистің типін тандау.

Базистік функциялар типін тандау негізінен дискреттеу құрылғысының қиындық шектелуінің талап етілуімен және сигналды қалпына келтірумен анықталады. Алғашқы сигналды қалпына келтіру үшін $x(t)$ таңдалуының жиынтығы кейбір көпмүшелерге сәйкес қойылады.

$$v(t) = \sum_{j=0}^n a_j \varphi_j(t)$$

t_i есептеу нүктесіндегі мән $x(t)$ функциясының мәнімен сәйкес келеді. $V(t)$ туынды функциясы көбіне жақындағылармен сәйкес келеді, жалпы жағдайда олардан ерекшеленуі де мүмкін.



Дискреттеу есебінде қолданылатын функциялардың негізгі типтері: Фурье қатары, Котельников қатары, Чебышева полиномы, Лежандра полиномы, дәрежелі полиномы, Уолта функциялары, Хаара функциясы, гипергеометриялық.

4. Жақындау принципі.

Жақындау принципі бойынша әдістердің үш тобын бөліп алуға болады:

- интерполяциялық;
- экстраполяциялық;
- комбинациялық;

Экстраполяциялық әдістерін дискреттеу үшін сигналдың кідіруін талап етпейді, яғни нақты уақытта жұмыс істейтін, басқарушы жүйелерде қолданылуы мүмкін.

Интерполяциялық экстраполяциялық әдіспен салыстырғанда аралық есептеуді азайтуға қамтамасыз етеді, бірақ интерполяция интервалында сигналдың кідіруін талап етеді.

Интерполяциялық-экстраполяциялы әдістер үшін $p(t)$ жақын функциясын табу процедурасы екі этапқа белінеді. Бірінші этапта интерполяция әдістері болып ΔT_i

бастапқы бөлігі үшін $P(t)$ жақындатылған функциясы табылады. Екінші этапта табылған функция $t > t_{i-1} + \Delta T_i$ мәні үшін экстраполяцияланады және бұл функциядан сигналдың ауытқуы тексеріледі.



Дискреттеу қадамын таңдау үшін сигналдардың әртүрлі моделдері қарастырылады және сәйкес есептеу критерийлері енгізіледі.

1) Санақ арасындағы интервал дискреттелген сигналдың жиілік спектрі есебімен таңдалатын жиілік критерийі;

2) Корреляциялы сигнал интервалдарымен санап шығарулар арасындағы интервалдар байланысын орнататын санап шығарудың корреляциялы критерийі;

3) Сигналдың детерминалды моделі үшін берілетін және сигналдың деңгейі мен бірінші туындысы бойынша квантты саты мәнімен санақ арасындағы интервалдар тәуелділігін орнататын, санап шығарулардың квантты критерийі;

Котельников теоремасы бойынша санақ шығарудың жиілігін таңдау.

Котельниковпен шектелген спектрімен функция үшін теорема дәлелденген. Егер $x(t)$ үздіксіз функция Дирихле шарттарын (үздіксіз шектелген және экстремумдарды соңғы санымен тұрады) канағаттандырады және оның спектрі кейбір f_m жиілігімен шектелген болса, онда $F_0 = 2f_m$ мұндағы: f_m - $x(t)$ сигналының $S(j\omega)$ спектріндегі максималды жиілік, функциясымен алынған, өз мәнінің дискретті жиынымен толық анықталады. Бұл жағдайда, функция $x(t) - x(t_i)$ таңдауының нақты мәндері бойынша ағаттық мына түрде калпына келтірілуі мүмкін:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta T) \frac{\sin \omega_m (t - k\Delta T)}{\omega_m (t - k\Delta T)}, (*)$$

мұндағы: $\omega_m = 2\pi f_m$

Интерполяциялық қатар **Котельников қатары** деп аталады.

(*) дан шығатыны, шектелген жиілік спектрімен тұратын $x(t)$ функциясы әрбір қосылғыш мына функция $Z = y \cdot (\text{Sinx}) / X$, мұндағы $y = x(k\Delta T)$, $x = \omega_m (t - k)$ мына түрде өрнектеліп қосынды (шексіз) түрінде қажеттеледі.