Лекция 1. Тройной интеграл

2.1. Определение тройного интеграла и его свойства

Аналогично двойному интегралу

Пусть в области T, отнесенной к пространственной системе координат и ограниченной замкнутой поверхностью S, задана ограниченная функция $u = f(x, y, z)$. Тело T с помощью сети поверхностей произвольным образом разобьем на n частей $T_1, T_2, \ldots, T_n$, объемы которых обозначим $\Delta V_1, \Delta V_2, \ldots, \Delta V_n$.

Пусть $\max \Delta V_i$ − наибольший из объемов $\Delta V_1, \Delta V_2, \ldots, \Delta V_n$. из областей T_i выберем произвольную точку $P_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, затем вычислим значение функции в ней $f(P_i)$ и умножим его на отрезке элементарной области T_i - объем ΔV_i. составим сумму вида

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta V_i;$$

ее называют *интегральной суммой* для функции u=f(x, y, z) по области T.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Конечный предел интегральной суммы S_n при $\max \Delta V_i \to 0$($n \to \infty$), если он существует и не зависит ни от способа разбиения области T на элементарные части, ни от выбора в них точки, называется тройным интегралом от функции $f(x, y, z)$ по области T и обозначается символом $\iiint\limits_T f(P)dV$ или $\iiint\limits_T f(x, y, z)dxdydz$.

$$\iiint\limits_T f(P)dV = \lim_{\substack{\max \Delta V_i \to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta V_i. \qquad (1)$$

Механический смысл тройного интеграла. Если u=f(x, y, z) - объемная плотностью вещества в области T. Если в каждой частичной области T_i плотность постоянна и равна ее значению в точке P_i, выражение $f(P_i)\Delta V_i$ определяет приближенное значение массы всего тела. Тогда предел этой суммы есть масса тела. Таким образом, если u=f(x, y, z) есть объемная плотность распределения вещества в области T, то интеграл (1) дает массу всего вещества, заключенного в объеме T.

2.1. Определение тройного интеграла и его свойства. Продолжение

Свойства $1^0 - 5^0$ (линейности, аддитивности, монотонности, оценка интеграла по модулю) аналогично двойному интегралу.

6^0. (Теорема об оценке интеграла).

Если m и M – наименьшее и наибольшее значения функции f(x, y, z) в области T, то значение тройного интеграла от нее удовлетворяет неравенству (где V – объем области T)

$$m \cdot V \le \iiint\limits_T f(x, y, z) dV \le M \cdot V$$

7^0 . (Теорема о среднем значении).

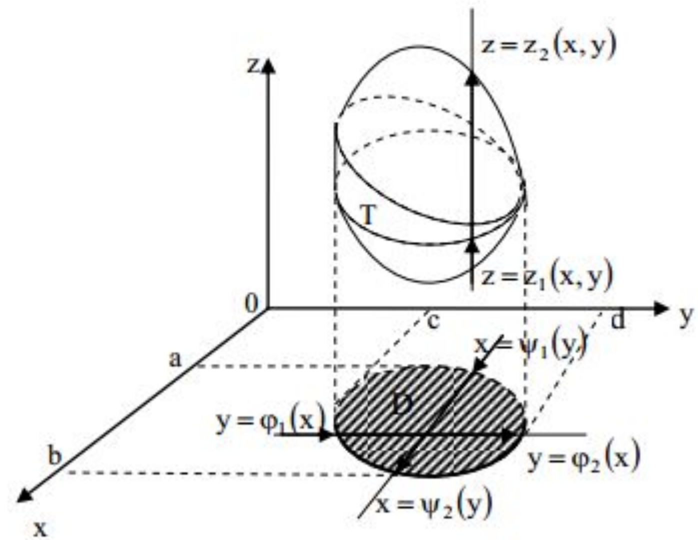
В области T найдется по крайней мере одна такая точка P, для которой выполняется равенство

$$\iiint\limits_T f(x, y, z) dV = f(P) \cdot V.$$

2.2. Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах

Пусть область T, ограниченная замкнутой поверхностью σ , такая, что: 1) всякая прямая, параллельная оси Oz, проведенная через внутреннюю точку области T, пересекает поверхность σ − границу данной области – в двух точках; 2) вся область T проектируется на плоскость xOy в правильную (относительно какой-либо координатной оси) область D. Область T обладающую перечисленными свойствами, называют *правильной* в направлении оси Oz.

Пусть область интегрирования T, правильная в направлении оси Oz, ограничена снизу поверхностью $z = z_1(x, y)$, сверху поверхностью $z = z_2(x, y)$ ($z = z_1(x, y) \le z = z_2(x, y)$), с боков прямым цилиндром (в частном случае боковая поверхность цилиндра может отсутствовать); проекцией тела T на плоскость xOy является двумерная область D.



Тогда тройной интеграл вычисляется по формуле

$$\iiint_T f(x,y,z)dxdydz = \iint_D dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz. \qquad (2)$$

Записывая, двойной интеграл $\iint_D F(x,y)dxdy$ через один из повторных, получаем

$$\iiint_T f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2 x} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz \qquad (3)$$

или

$$\iiint_T f(x,y,z)dxdydz = \int_c^d dy \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2 x} dx \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz. \qquad (3')$$

2.2. Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах. Продолжение

Если T - параллелепипед, ограниченный плоскостями x=a, x=b, y=c, y=d, z=e, z=g, то (3) примет вид:

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d dy \int\limits_e^g f(x,y,z)dz.$$

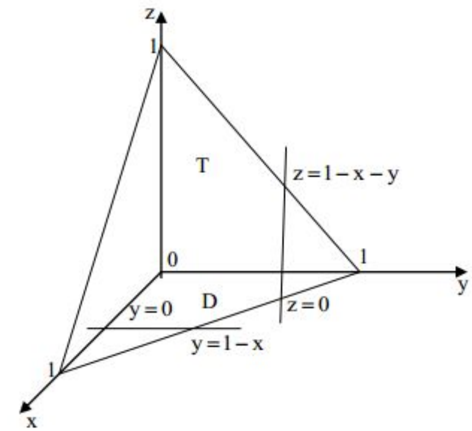
Если тело T ограничено поверхностями $x=x_1(y, z)$, $x=x_2(y, z)$ и цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными Ox, то в формуле (2) внутреннее интегрирование следует вести по x, а двойной интеграл брать по проекции тела на плоскость yOz.

Аналогично, если тело ограничено поверхностями $y=y_1(x, z)$, $y=y_2(x, z)$ и цилиндром с образующими, параллельными Oy. (При этом область T должна быть правильной в направлении оси Ox – в первом случае или в направлении оси Oy – во втором).

2.2. Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах. Пример

ПРИМЕР. Вычислить $\iiint\limits_T (x+y+z)dxdydz$ траэдр, ограниченный плоскостями $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=1.$

Правильную в направлении оси Oz область T спроектируем на плоскость xOy. Тогда нижней границей области T является часть плоскости $z = 0$, верхней $z = 1 - x - y$; областью D является правильный треугольник, в котором $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1 - x$.



Применив формулу (2), получим

$$\iiint\limits_T (x+y+z)dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_0^{1-x-y}(x+y+z)dz = \iint\limits_D \left[(x+y)z+\frac{z^2}{2}\right]_0^{1-x-y} dxdy =$$

$$= \iint\limits_D \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x+y)^2\right]dxdy = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}\left[1-(x+y)^2\right]dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1\left[y-\frac{(x+y)^3}{3}\right]_0^{1-x}dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1\left(\frac{2}{3} - x+\frac{x^3}{3}\right)dx=\frac{1}{8}.$$

Область T можно спроектировать на любую другую координатную плоскость (yOz или xOz). Так, данная область является правильной в направлении Ox; точка входа прямой в область находится на плоскости yOz и имеет абсциссу $x = 0$, точка выхода лежит на поверхности $x = 1 - y - z$. Областью D является треугольник плоскости yOz, где $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1 - y$. Поэтому :

$$\iiint\limits_T (x+y+z)dxdydz = \iint\limits_D dydz\int\limits_0^{1-y-z}(x+y+z)dx = \int\limits_0^1 dy\int\limits_0^{1-y}dz\int\limits_0^{1-y-z}(x+y+z)dx =$$

$$=\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^{1-x}\left[(y+z)x+\frac{x^2}{2}\right]_0^{1-y-z}dz = \int\limits_0^1 dy\int\limits_0^{1-y}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(y+z)^2\right]dz=\frac{1}{8}.$$

2.3. Замена переменных в тройном интеграле. Тройной интеграл в цилиндрических и сферических координатах

Если функции

$$x = x(u, v, \omega), \;\; y = y(u, v, \omega), \;\; z = z(u, v, \omega) \qquad (4)$$

устанавливают взаимно однозначное соответствие между точками P(x, y, z) области T пространства Oxyz и точками Q(u, v, ω) области T′ пространства $O_1uv\omega$ (при этом тройка чисел u, v,ω, соответствующая точке P(x, y, z) из области T, называется *криволинейными координатами* этой точки) и функциональный определитель Якоби I(u, v, ω), иначе Якобиан преобразования (4)

$$I(u, v, \omega) = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_\omega \\ y'_u & y'_v & y'_\omega \\ z'_u & z'_v & z'_\omega \end{vmatrix},$$

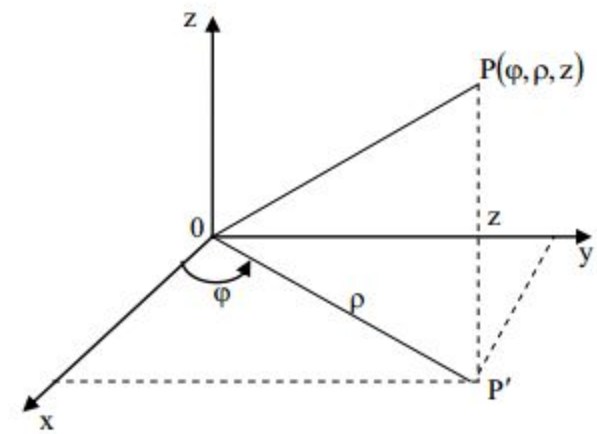
не обращается в нуль в области T′, то справедлива следующая формула замены переменных в тройном интеграле:

$$\iiint\limits_T f(x, y, z)\,dxdydz = \iiint\limits_{T'} f\big(x(u, v, \omega), y(u, v, \omega), z(u, v, \omega)\big)\,\big|I(u, v, \omega)\big|\,dudvd\omega. \qquad (5)$$

Наиболее используемыми из криволинейных координат являются цилиндрические и сферические.

2.3. Замена переменных в тройном интеграле. Тройной интеграл в цилиндрических и сферических координатах. Продолжение

Цилиндрические координаты. Положение точки P в пространстве определяется полярными координатами (ϕ,ρ) ее проекции P′ на плоско xOy и ее аппликатой z. Величины ϕ,ρ,z называются *цилиндрическими координатами* точки P. Декартовы координаты точки связаны с ее цилиндрическими координатами соотношениями



$$x = \rho\cos\varphi,\ \ y = \rho\sin\varphi,\ \ z = z \qquad (6)$$
$$(u = \varphi,\ v = \rho,\ \omega = z).$$

Для выполнения взаимно однозначного соответствия полагают

$$0 \le \varphi < 2\pi,\ \ 0 \le \rho < \infty,\ \ -\infty < z < \infty.$$

Якобиан преобразования (6) равен

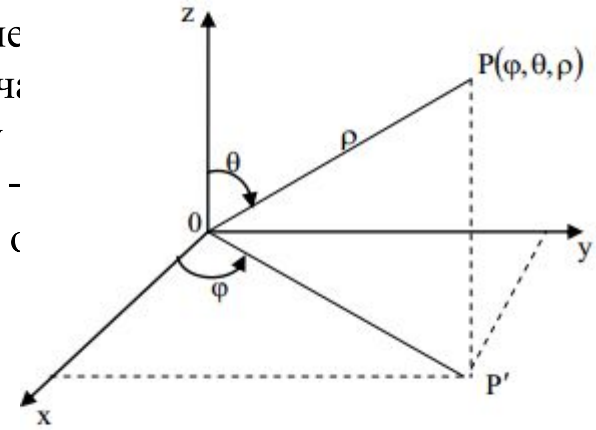
$$I(\varphi,\rho,z) = \begin{vmatrix} -\rho\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ \rho\cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\rho.$$

Преобразование тройного интеграла к цилиндрическим координатам в соответствии с (5) осуществляется по формуле

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_T f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)\rho d\varphi d\rho dz. \qquad (7)$$

Цилиндрическими координатами при вычислении тройного интеграла фактически пользуются тогда, когда после интегрирования по z, есть необходимость перехода в получившемся двойном интеграле к полярным координатам.

2.3. Замена переменных в тройном интеграле. Тройной интеграл в цилиндрических и сферических координатах. Продолжение



Сферические координаты. В сферических координатах положение точки P определяется числами ϕ, θ, ρ; ρ − расстояние точки P от нача координат или длина радиуса – вектора этой точки, ϕ − угол между проекцией радиуса – вектора точки на плоскость xOy и осью Ox, θ − угол между радиусом-вектором и осью Oz, который отсчитывается о положительного направления оси Oz.

Связь между декартовыми и сферическими координатами точки

$$x = \rho\cos\varphi\sin\theta,\ \ y = \rho\sin\varphi\sin\theta,\ \ z = \rho\cos\theta, \qquad (8)$$
$$(u = \varphi,\ v = \theta,\ \omega = \rho)$$

при этом $0 \le \varphi < 2\pi,\ \ 0 \le \theta \le \pi,\ \ 0 \le \rho < \infty.$

Якобиан преобразования (8) равен $I(\phi,\theta,\rho) = -\rho^2\sin\theta$ и переход от прямоугольных координат к сферическим координатам ϕ, θ, ρ осуществляется по формуле

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_T f(\rho\cos\varphi\sin\theta,\ \rho\sin\varphi\sin\theta,\ \rho\cos\theta)\rho^2\sin\theta d\varphi d\theta d\rho \qquad (9)$$

Переход к сферическим координатам в тройном интеграле целесообразен в следующих случаях:

1 . Подынтегральная функция f(x, y, z) содержит в своем выражении $(x^2 + y^2 + z^2)$;
2 . Уравнение поверхности, ограничивающей тело T содержит $(x^2 + y^2 + z^2)$;
3 . Наличие условий 1 и 2.

Применение сферических координат особенно удобно в тех случаях, когда область T – шар с центром в начале координат или шаровое кольцо.