ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА

- **1. НЕПРЕРЫВНОСТЬ, ТОЧКИ РАЗРЫВА ФУНКЦИИ**
  - **Определение 1.** Функция $y = f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** a, принадлежащей области определения $D(f)$, если функция $y = f(x)$ имеет в точке a конечный предел, равный числу $f(a)$, то есть

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a). \qquad (1)$$

  - **Определение 2.** Функция $y = f(x)$ называется ***непрерывной справа (слева) в точке*** a из $D(f)$, если в точке a существует конечный правый (левый) предел функции $y = f(x)$, равный числу $f(a)$, то есть

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА

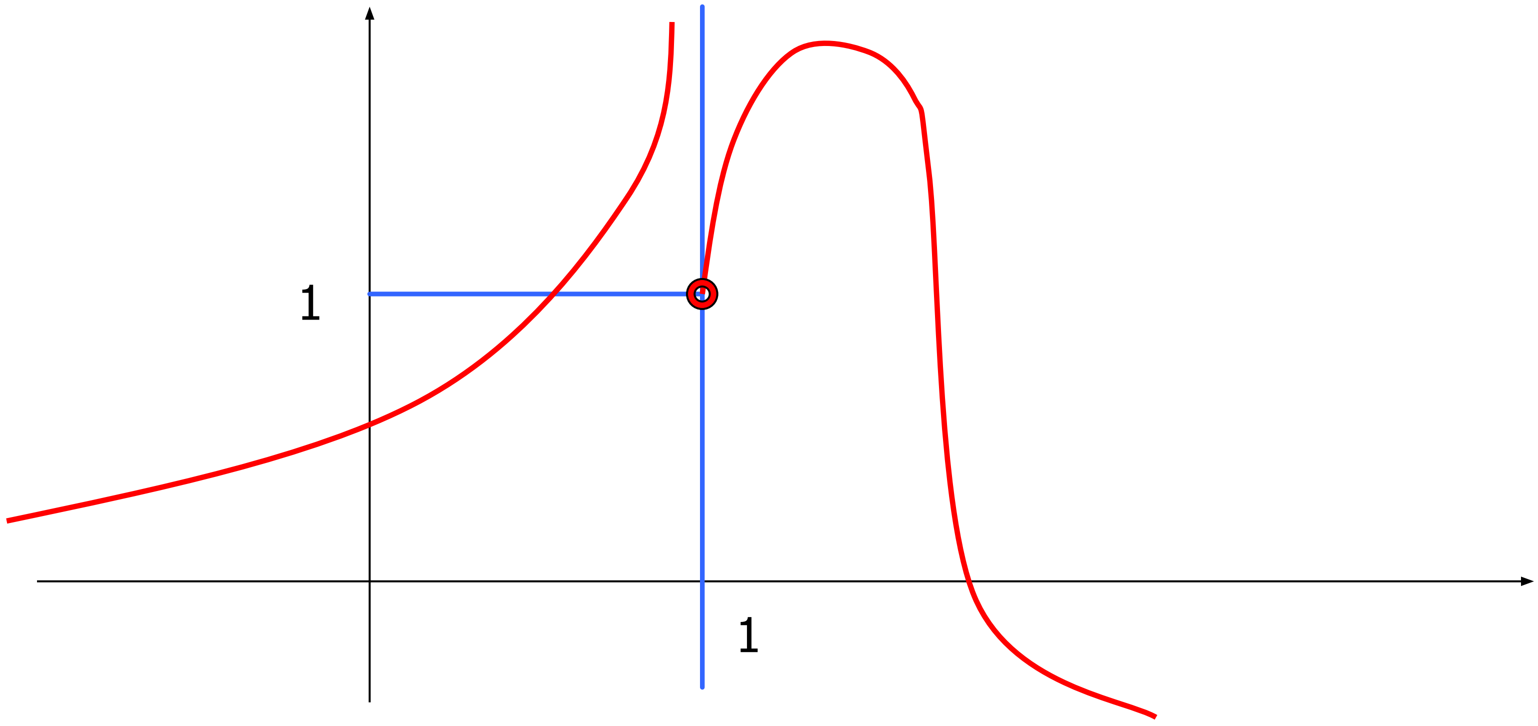
$$f(a+0) = \lim_{x \to a+0} f(x) = f(a); \qquad \left(f(a-0) = \lim_{x \to a-0} f(x) = f(a) \right).$$

- Из свойств предела вытекает следующее утверждение.
- **Теорема 1.** Функция $y = f(x)$ непрерывна в точке a тогда и только тогда, когда в этой точке справедливы равенства:

$$f(a) = f(a+0) = f(a-0).$$

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА

- *Пример:* Рассмотрим функцию $y = f(x)$,



ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА

- **О п р е д е л е н и е 3.** Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в интервале* $(b; c)$, если она непрерывна в любой его точке.

  Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной на отрезке* $[b; c]$, если она непрерывна в интервале $(b; c)$, непрерывна справа в точке $x = b$, непрерывна слева в точке $x = c$.

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА

- **Т е о р е м а 2.** Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке a, то она непрерывна в этой точке. *Обратное утверждение неверно.*
- **О п р е д е л е н и е 4.** Точка $x = a$, являющаяся предельной точкой множества $D(f)$, называется точкой *разрыва функции* $y = f(x)$ если в точке a эта функция либо не определена, либо определена, но нарушено условие непрерывности.

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА

- **Определение 5.** Точка разрыва $x = a$ называется *точкой устранимого разрыва* функции $y = f(x)$, если в этой точке предел функции $f(x)$ существует, но $f(x)$ в точке a либо не определена, либо значение $f(a)$ не совпадает с найденным пределом, то есть

$$f(a-0) = f(a+0) \neq f(a).$$

- Пример Функция

$$y = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{при } x \neq 0 \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

Имеет в точке x=0 устранимый разрыв, т.к: $y(a-0) = y(a+0) = 1.$ $y(0) = 0$

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА

- **Определение 6.** Точка разрыва $x = a$ называется *точкой разрыва первого рода* функции $y = f(x)$, если в этой точке функция имеет конечные, но не равные друг другу правый и левый пределы, то есть: $f(a-0) \neq f(a+0)$.
- Пример:

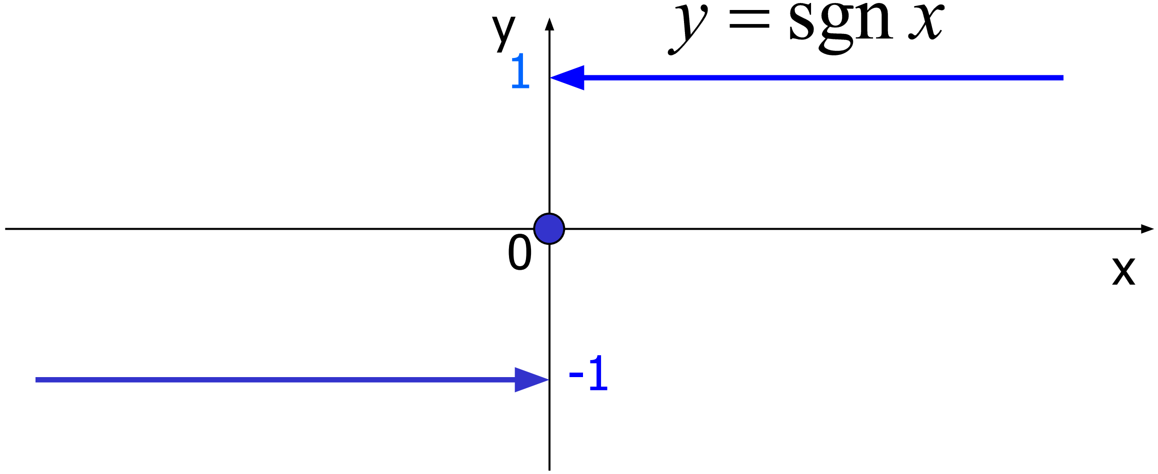
$$y = \operatorname{sgn} x = \left[\begin{array}{lll} 1 & при & x > 0 \\ 0 & при & x = 0 \\ -1 & при & x < 0 \end{array}\right.$$

- «знак» числа x имеет в точке x=0 разрыв первого рода, т.к:

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА

$$y(0-0)=1,\ y(0+0)=1,\ y(0)=0$$

$$y=\operatorname{sgn} x$$

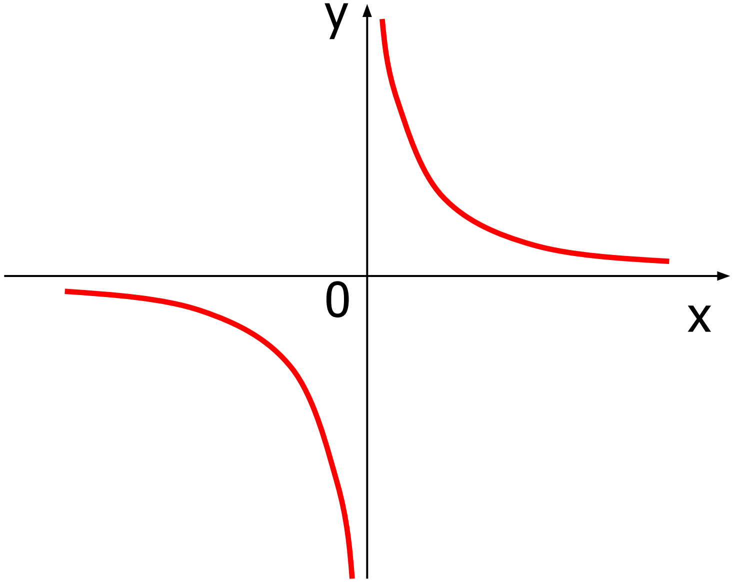


Определение 7. Точка разрыва $x=a$ называется *точкой разрыва второго рода* функции $y=f(x)$, если в этой точке функция $f(x)$ не имеет, по крайней мере, одного из односторонних пределов или хотя бы один из односторонних пределов равен бесконечности.

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА

- Пример Функция $y = \dfrac{1}{x}$ имеет в точке $x=0$ разрыв второго рода, так как в данном случае число $y(0)$ не определено

$$y(0-0) = -\infty,\ y(0+0) = +\infty$$



ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА

- **Теорема 3.** Если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке a и существует конечный предел $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)$, то справедливо равенство: $$\lim_{x\to a} f(f_1(x)) = f\left(\lim_{x\to a} f_1(x)\right)$$

- **Теорема 4.** Пусть функция $u = g(x)$ непрерывна в точке $x = a$ и функция $y = f(u)$ непрерывна в точке $u = g(a)$. Тогда сложная функция $y = f(g(x))$ непрерывна в точке $x = a$.
- **Теорема 5.** Сумма, разность, произведение, частное, суперпозиция конечного числа непрерывных функций (то есть любая элементарная функция) есть функция, непрерывная во всех точках области определения.

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА

- **2. АСИМПТОТЫ ГРАФИКА ФУНКЦИИ**
  - **Определение 8.** Прямая $x = x_0$ называется *вертикальной асимптотой* кривой $y = f(x)$, если точка $x = x_0$ является для функции $f(x)$ точкой разрыва второго рода.
  - **Определение 9.** Прямая $y = kx + b$ называется *наклонной асимптотой* кривой $y = f(x)$ *на* $+\infty$ (*на* $-\infty$), если

$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} \left(f(x) - (kx + b) \right) = 0.$$

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА

- **Т е о р е м а 6.** Кривая $y = f(x)$ имеет наклонную асимптоту $y = kx + b$ на $+\infty$ (на $-\infty$) тогда и только тогда, когда существуют конечные пределы:

$$k = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} \frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} \left(f(x) - kx \right).$$

- Пример Найти асимптоты графика функции:

$$y = \frac{(x-1)^2}{x+1}$$

- Область определения: $D(y) = (-\infty;-1) \cup (-1;+\infty)$
- непрерывна во всех точках области определения,

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА

- 1.Найдем *вертикальные асимптоты* графика:

$$\lim_{x\to -1-0}\frac{(x-1)^2}{x+1}=-\infty;\ \lim_{x\to -1+0}\frac{(x-1)^2}{x+1}=+\infty$$

- Точка $x = -1$ является точкой разрыва второго рода, значит прямая $x = -1$ является вертикальной асимптотой графика
- 2. Найдем *наклонную асимптоту* на $\pm\infty$. Вычислим:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x-1)^2}{x+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}{1+\frac{1}{x}}=1;$$

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{(x-1)^2}{x+1}-x\right)=$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-2x+1-x^2-x}{x+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-3x}{x+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x}-3}{1+\frac{1}{x}}=-3$$

- Наклонной асимптотой является прямая: $y=x-3$
- Ответ: x = -1 - вертикальная асимптота
- $y = x$ -3- наклонная асимптота при $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$.

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА

- **3. ВОЗРАСТАНИЕ, УБЫВАНИЕ, ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИИ**

- **О п р е д е л е н и е 10.** Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* *(убывающей)* в некотором промежутке, если для любых x_1 и x_2 из этого промежутка, удовлетворяющих условию $x_1 > x_2$, выполняется неравенство:

$$f(x_1) > f(x_2) \qquad \left(f(x_1) < f(x_2)\right).$$

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА

- **Определение 11.** Точки области определения функции, в которых производная $f'(x)$ равна нулю или не существует, называются *критическими*.
- **Определение 12.** Пусть функция $y = f(x)$ определена всюду в некоторой окрестности точки $x = x_0$. Точка $x = x_0$ называется *точкой максимума* (*минимума*) *функции* $y = f(x)$, если существует такая окрестность $u(x_0)$ с центром в точке x_0, что справедливо неравенство:

$$f(x) < f(x_0) \qquad (f(x) > f(x_0)) \qquad \forall x \in u(x_0) \setminus \{x_0\}.$$

- **Определение 13.** Максимумы и минимумы функции называются *экстремумами* функции.

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА

- **Т е о р е м а 7** *(достаточное условие возрастания (убывания)).* Пусть во всех точках некоторого интервала функция $y = f(x)$ дифференцируема и $f'(x) > 0$ $\left(f'(x) < 0\right)$. Тогда в этом интервале функция $y = f(x)$ возрастает (убывает).

- ***Т е о р е м а 8*** *(необходимое условие экстремума). Если функция* $y = f(x)$ *имеет экстремум в точке* $x = x_0$ *, то эта точка – критическая.*

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА

- **Теорема 9** *(достаточное условие экстремума).* Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности критической точки $x = x_0$ за исключением, быть может, самой этой точки. Если в пределах указанной окрестности функция $f'(x)$ имеет разные знаки слева и справа от точки x_0, то $-$ x_0 точка экстремума. Если при этом знак производной меняется

  с «−» на «+», то − точка минимума,

  с «+» на «−», то − точка максимума.

- Если в пределах указанной окрестности функция $f'(x)$ имеет один и тот же знак слева и справа от точки x_0 , то в x_0 экстремума нет.

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА

- **П р и м е р.** Найти интервалы возрастания, убывания и экстремумы функции: $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3.$

- Р е ш е н и е. 1) Функция определена $D(f)=(-\infty;+\infty)$

  2) Найдем производную $f'(x)$:

$$f'(x)=\left(\frac{1}{3}x^3-2x^2+3\right)'=x^2-4x=x(x-4)$$

при $f'(x)=0$ $x_1=0$ и $x_2=4$

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;4)$	4	$(4;+\infty)$
знак $y'(x)$	+	0	-	0	+
вывод о $y(x)$	↗ Возраст.	max $f(0)=3$	↘ убывает	min $f(4)=-\dfrac{23}{3}$	↗ Возраст.

Ответ: интервалы возрастания: $(-\infty;0)$; $(4;+\infty)$;

интервалы убывания: $(0;4)$;