Знаходження оберненої матриці

Квадратна матриця А називається невиродженою, якщо визначник $\det A \neq 0$ В протилежному випадку матриця А називається виродженою.

Оберненою матрицею по відношенню до даної *невиродженої квадратної* матриці *A n - ного* порядку, називається матриця, яка, помножена ліворуч, і праворуч на дану матрицю, дає одиничну матрицю.

Обернена матриця позначається символом A^{-1}. Таким чином, відповідно визначення: $AA^{-1}=A^{-1}A=E$.

$$A \to \det A \neq 0 \to A^{T} \to A^{+} \to \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^{+}$$

Приєднана матриця отримується шляхом заміни кожного елементу матриці A^T на його алгебраїчне доповнення

Якщо визначник матриці дорівнює нулю, то обернена матриця не існує

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^{+}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Приклад. Знайти матрицю обернену до матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

.

Знаходимо матрицю A^{-1} Визначник матриці ***A***:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -14$$

Оскільки $\det A \neq 0$, матриця A має обернену матрицю A^{-1}
.

Обчислюємо алгебраїчні доповнення елементів матриці A:

,

$$A_{11}=\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix}=4 \qquad A_{21}=-\begin{vmatrix}2 & -5\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-9 \qquad A_{31}=\begin{vmatrix}2 & -5\\ 2 & 0\end{vmatrix}=10$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}4 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-8 \qquad A_{22}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & -3\end{vmatrix}=0 \qquad A_{32}=-\begin{vmatrix}3 & -5\\ 4 & 0\end{vmatrix}=-20$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}4 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2 \qquad A_{23}=-\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1 \qquad A_{33}=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 4 & 2\end{vmatrix}=-2$$

Бажано зробити перевірку . $A\cdot A^{-1}=E$

,

Одержуємо обернену матрицю A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{-14}\begin{pmatrix} 4 & -9 & 10 \\ -8 & 11 & -20 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4/14 & 9/14 & -10/14 \\ 8/14 & -11/14 & 20/14 \\ -2/14 & 1/14 & 2/14 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{12}{14}+\frac{16}{14}+\frac{10}{14} & \frac{27}{14}-\frac{22}{14}-\frac{5}{14} & -\frac{30}{14}+\frac{40}{14}-\frac{5}{14} \\ -\frac{16}{14}+\frac{16}{14}+0 & \frac{36}{14}-\frac{22}{14}+0 & -\frac{40}{14}+\frac{40}{14}+0 \\ -\frac{4}{14}+\frac{8}{14}-\frac{4}{14} & \frac{9}{14}-\frac{11}{14}+\frac{2}{14} & -\frac{10}{14}+\frac{20}{14}+\frac{4}{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Обернена матриця знайдена вірно

Метод оберної матриці розв'язання систем лінійних рівнянь

Метод оберної матриці розглянемо на прикладі розв'язання квадратної системи 3 порядку.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Запишемо цю систему в матричному вигляді. Позначимо:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Основна матриця системи

Матриця - стовпець вільних членів

Матриця - стовпець невідомих

Метод оберної матриці розв'язання систем лінійних рівнянь

Тоді систему можна записати так:

$$A\cdot X=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A\cdot X=B$$

Знайдемо розв'язок системи у матричному вигляді.

Нехай *det A* відмінний від нуля, тобто, існує обернена матриця A^{-1}.

Помножимо ліворуч матричний запис системи на обернену матрицю:

$$A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot B \Rightarrow E\cdot X=A^{-1}\cdot B \Rightarrow \boxed{X=A^{-1}\cdot B}$$

Метод оберненої матриці застосовується для розв'язання квадратних систем з невиродженою головною матрицею.

Метод оберної матриці розв'язання систем лінійних рівнянь

Розв'язати систему методом оберненої матриці.

$$\begin{cases} 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0.5 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -3 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} -0.5 \\ 2 \\ -5 \end{matrix} \qquad \Rightarrow \qquad X = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$