Транспортна
Задача
Лінійного
Програмування
(ТЗЛП)

Частина 1

ТЗЛП – підклас ЗЛП

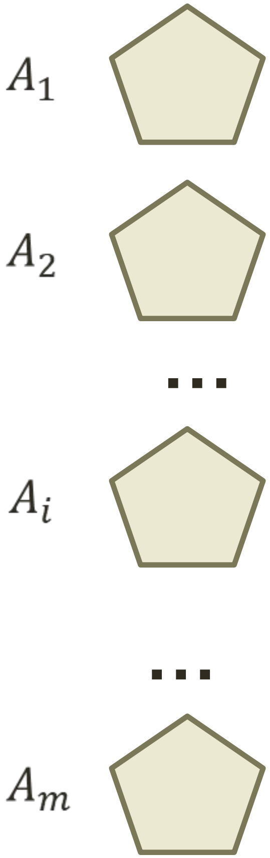
Поширені на практиці задачі приводять до ЗЛП, що мають особливості

Ці особливості дозволяють отримати для них більш простий, ніж в загальному випадку, варіант відповідного алгоритму розв’язання, або навіть принципово новий метод їх вирішення

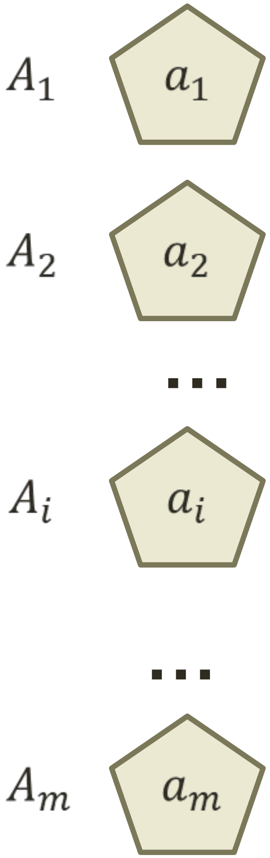
Тема 1. ТЗЛП

- 1. **Змістовна постановка і формальна модель ТЗЛП**
- **2. Умова існування розв'язку ТЗЛП**
- **3. Побудова формальної моделі ТЗЛП при порушенні умови балансу**
- **4. Властивості ТЗЛП**
- **5. Метод потенціалів**
  - 5.1. Методи побудови початкового ДБР
    - 5.1.1. Метод північно-західного кута
    - 5.1.2. Метод найменшої вартості
    - 5.1.3. Наближений метод Фогеля
  - 5.2. Виродженість ТЗЛП
  - 5.3. Етапи методу потенціалів
    - 5.3.1. Вибір змінної, що вводиться в базис
    - 5.3.2. Вибір змінної, що виводиться з базису
    - 5.3.3. Перехід до нового ДБР
  - 5.4. Схема алгоритму методу потенціалів
- 6. **Транспортна модель з проміжними пунктами**

Змістовна постановка задачі



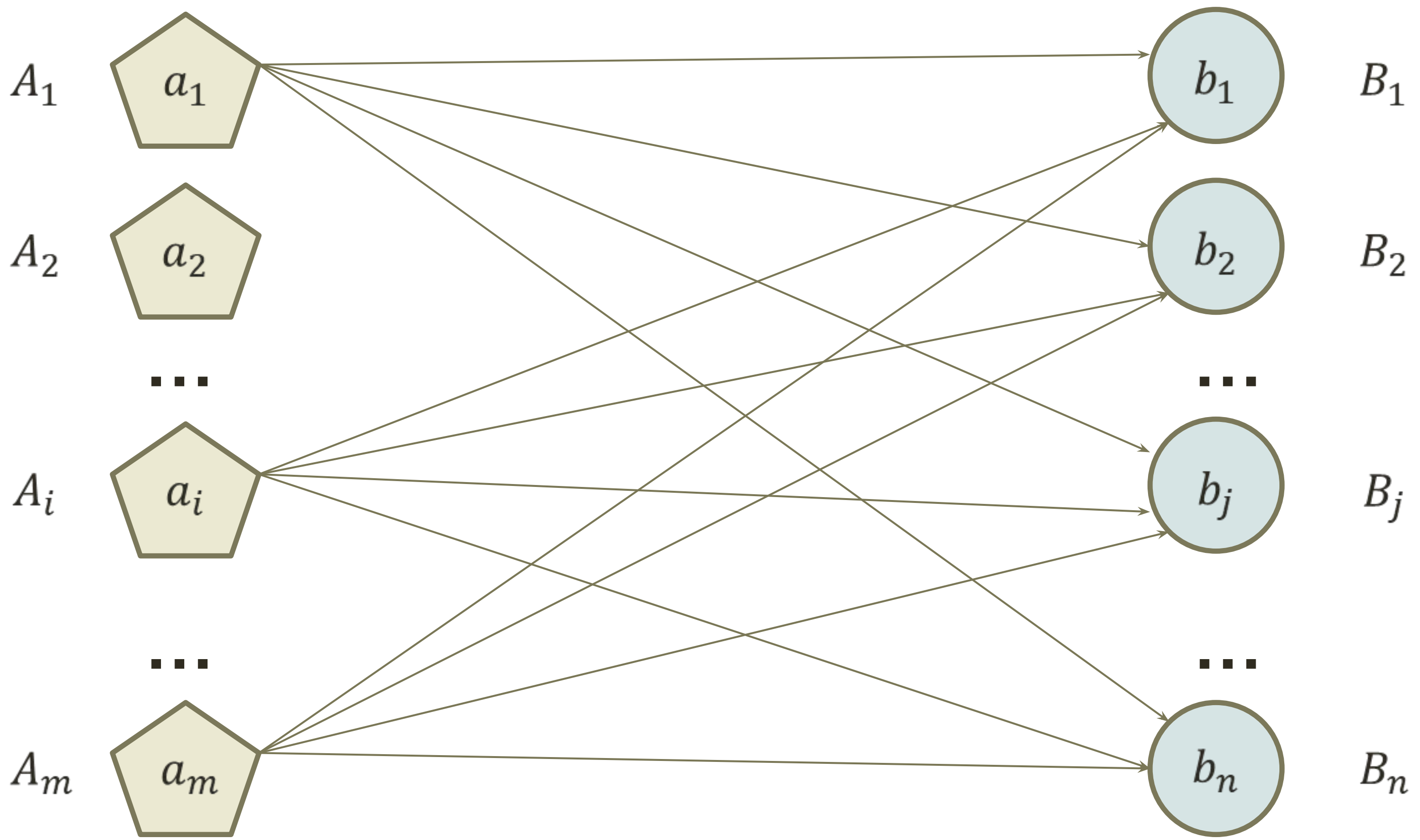
Змістовна постановка задачі



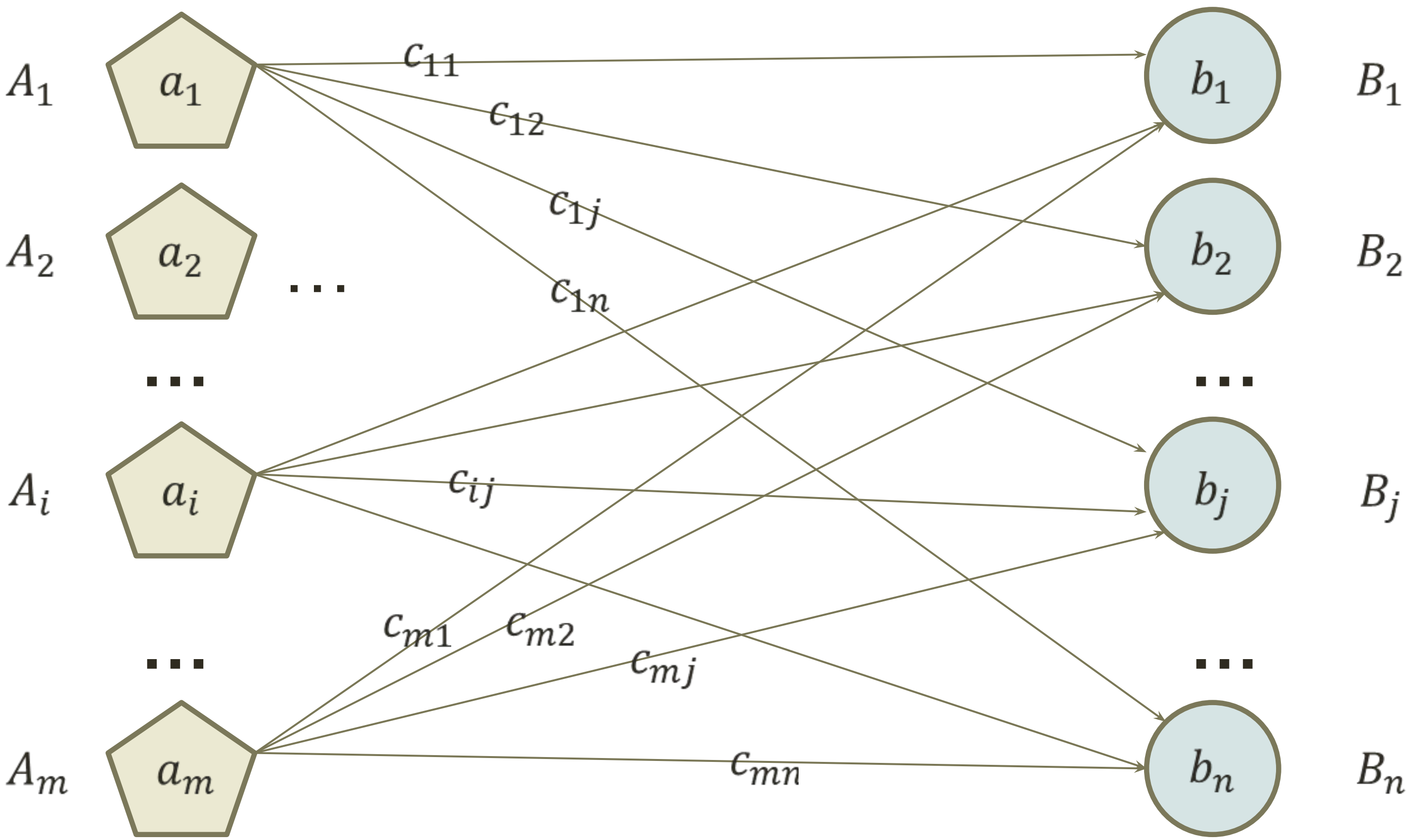
Змістовна постановка задачі

Змістовна постановка задачі

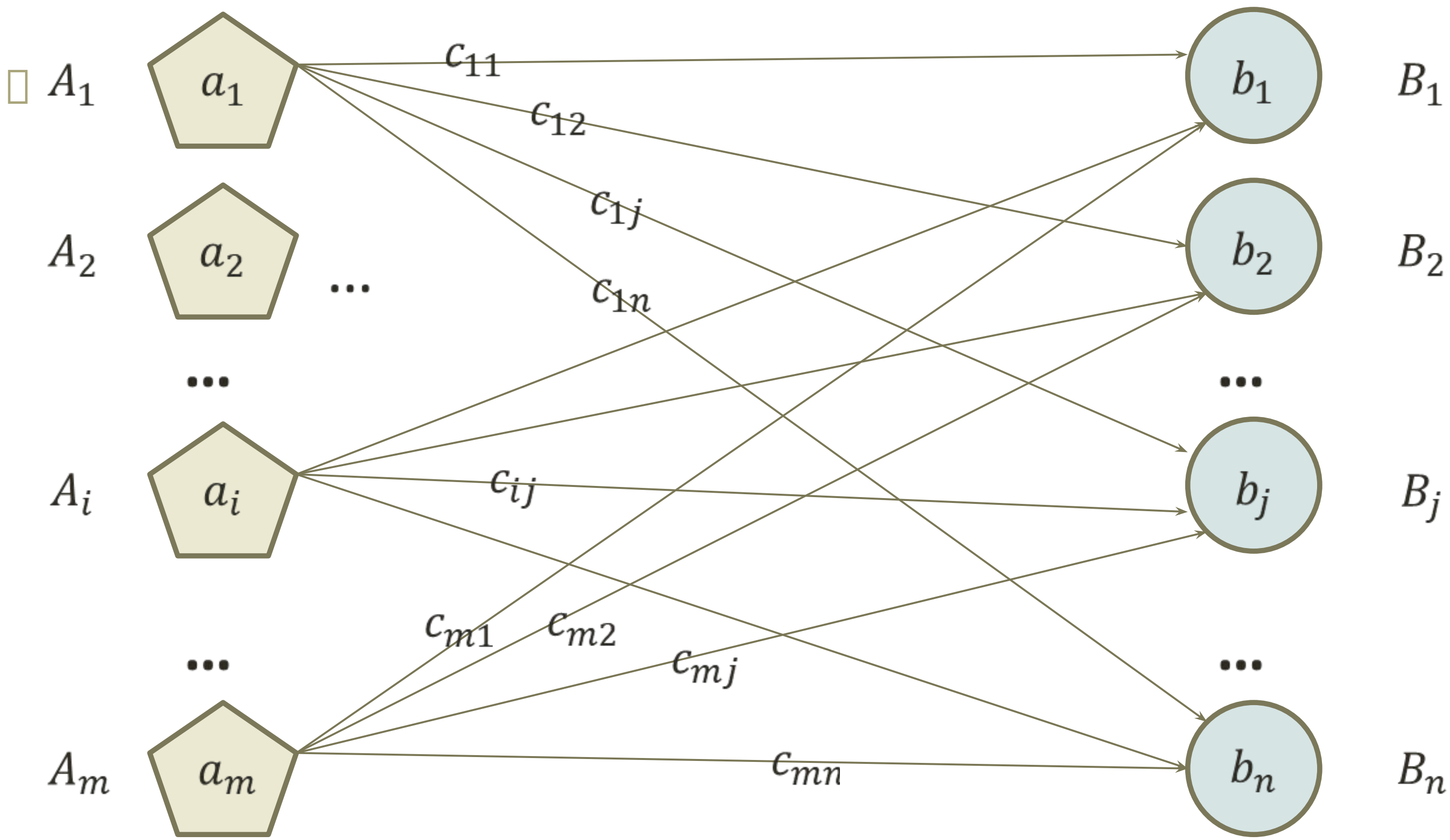
Змістовна постановка задачі



Змістовна постановка задачі



Змістовна постановка задачі



Змінні: x_{ij} - обсяг перевезень продукції по маршруту $A_i - B_j$

Математична модель ТЗЛП

Цільова функція

$$\min z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}; \qquad (1)$$

Обмеження

по виробниках:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i, \quad i = \overline{1,m}; \qquad (2)$$

по споживачах:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1,n}; \qquad (3)$$

$$x_{ij} \ge 0, \; i = \overline{1,m}; \; j = \overline{1,n}. \qquad (4)$$

Умова існування розв’язку ТЗЛП

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \geq \sum_{j=1}^{n} b_j$$

сумарний об’єм виробництва

сумарний об’єм споживання

Балансування ТЗЛП

ТЗЛП називається ***збалансованою***, якщо для неї виконується умова балансу:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

сумарний об’єм виробництва

сумарний об’єм споживання

Метод потенціалів застосовний тільки для збалансованої ТЗЛП.

Математична модель збалансованої ТЗЛП

(алгебраїчна форма представлення)

Цільова функція

$$\min z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}; \qquad (5)$$

Обмеження

по виробниках:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1,m}; \qquad (6)$$

по споживачах:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1,n}; \qquad (7)$$

$$x_{ij} \geq 0, \; i = \overline{1,m}; \; j = \overline{1,n}. \qquad (8)$$

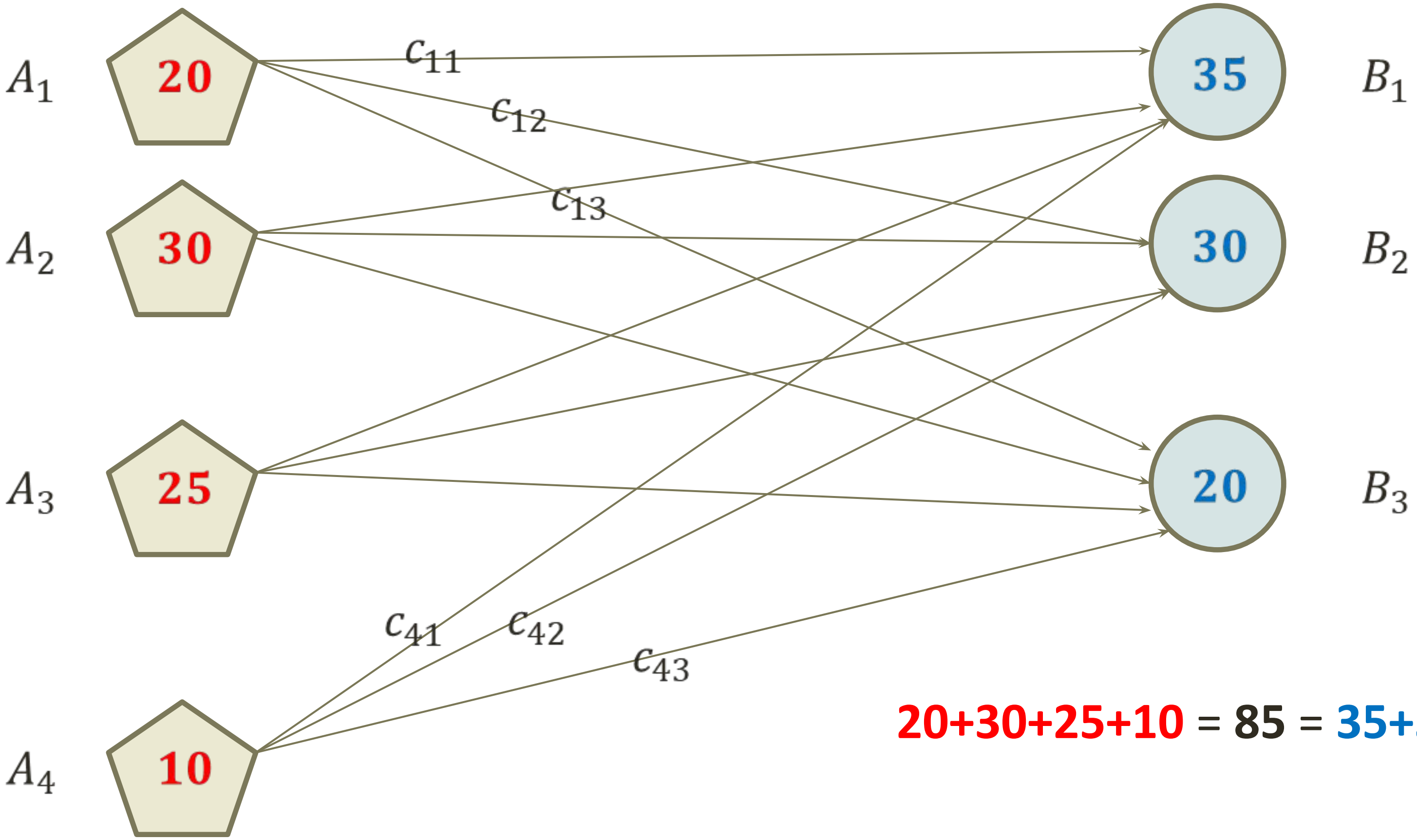
Теорема 1.

- *Для того, щоб задача (5)-(8) мала допустимий розв’язок, необхідно і достатньо, щоб виконувалася умова балансу.*

Будь-яка транспортна модель може бути збалансована

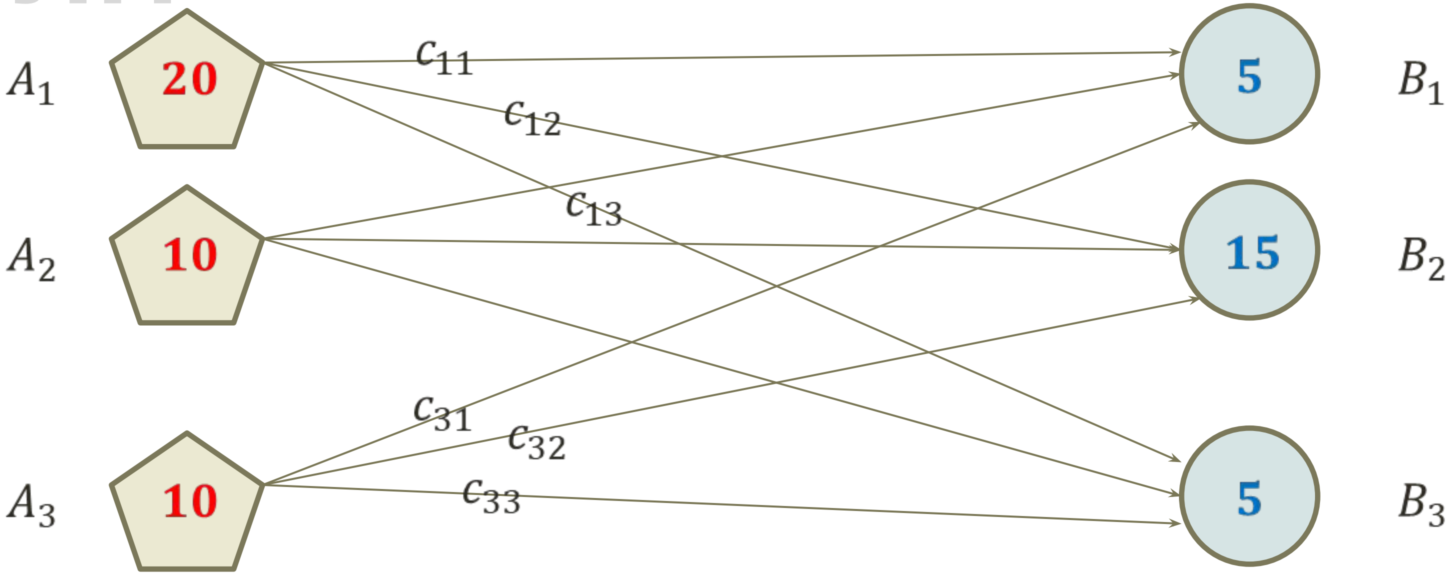
Прагнення збалансувати транспортну задачу (тобто перетворити всі її обмеження на рівність) обумовлене можливістю застосувати в цьому випадку ефективний обчислювальний метод.

Приклад збалансованої ЗЛП



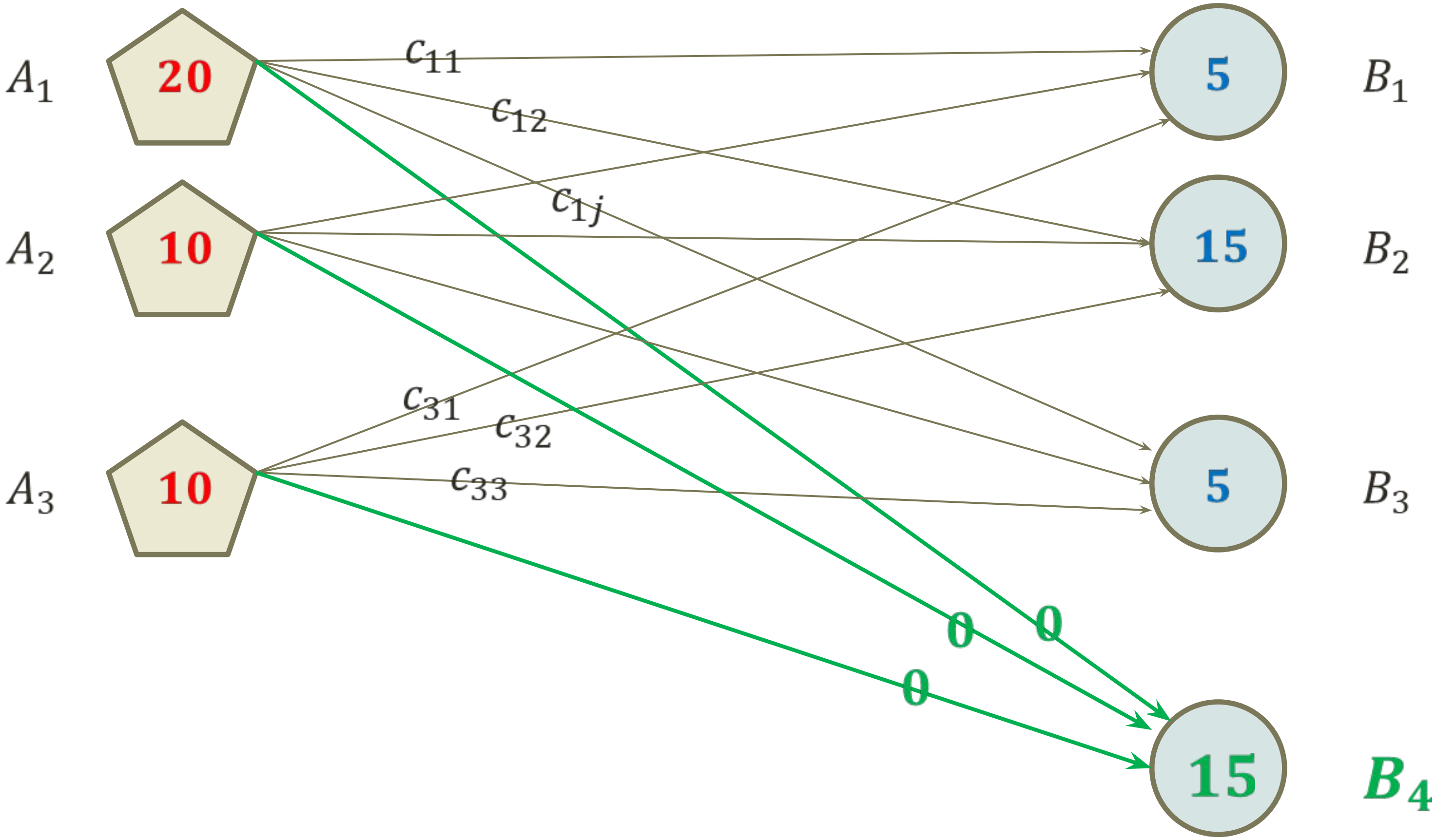
20+30+25+10 = 85 = 35+30+20

Приклад 1 незбалансованої ЗЛП



20+10+10=40 > 25 =5+15+5

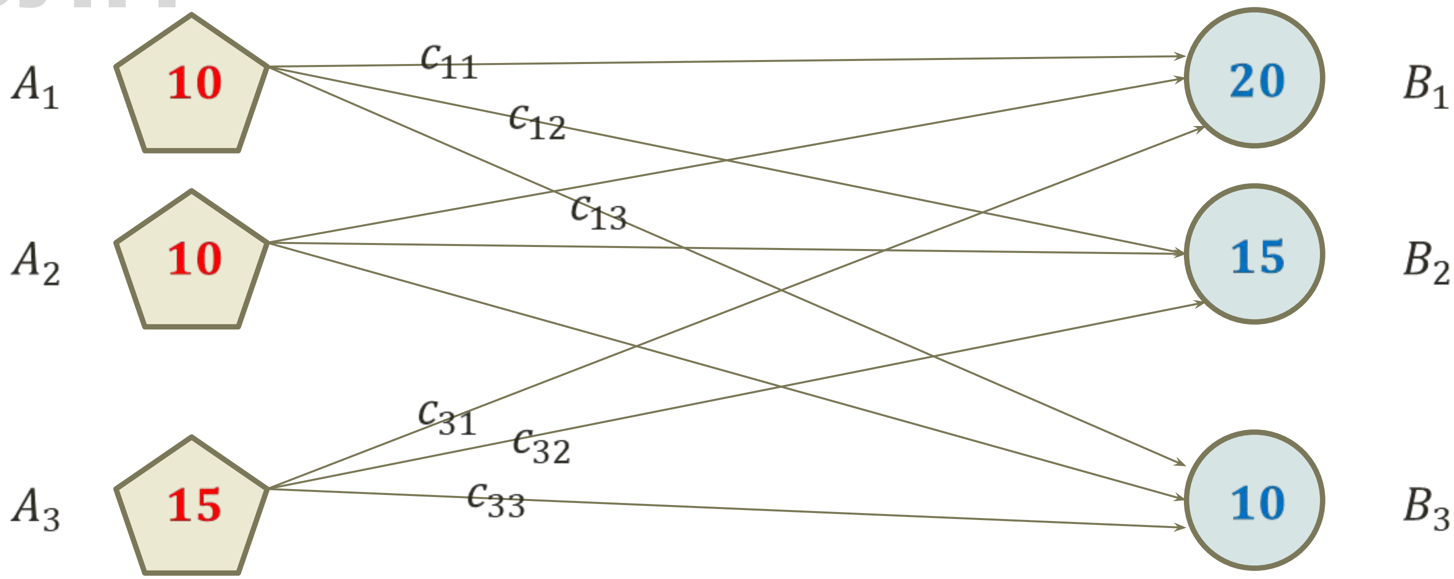
Балансування ТЗЛП (1)



20+10+10=40 > 25 =5+15+5

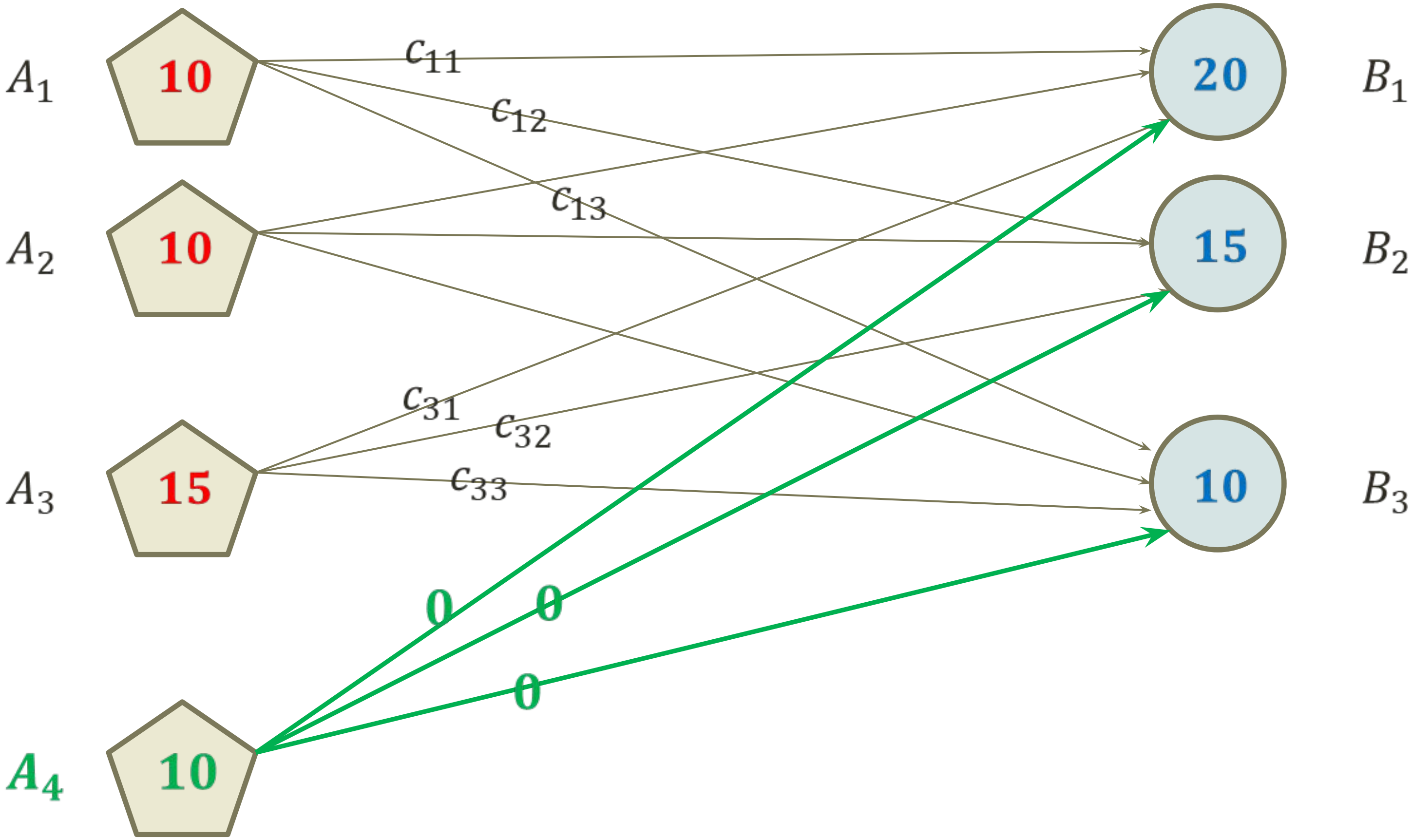
$$b_{фікт} = 40 - 25 = 15$$

Приклад 2 незбалансованої ЗЛП



10+10+15=35 < 45 =20+15+10

Балансування ТЗЛП (2)



10+10+15=35 < 45 =20+15+10

$$a_{фікт} = 45 - 35 = 10$$

Транспортна таблиця

c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}	a_2
…	…	…	…	
c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
b_1	b_2		b_n	

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1,m};$$

Транспортна таблиця

c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	$\dots$	c_{1n} x_{1n}	a_1
c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	$\dots$	c_{2n} x_{2n}	a_2
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	
c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	$\dots$	c_{mn} x_{mn}	a_m
b_1	b_2		b_n	

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1,n};$$

Транспортна таблиця

c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}	a_2
…	…	…	…	
c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
b_1	b_2		b_n	

$$\min z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij};$$

Приклади збалансованої та незбалансованої ТЗЛП

- Збалансована ТЗЛП:

			20
			30
			25
			10
35	30	20	

$$20+30+25+10=35+30+20$$

- Не збалансована ТЗЛП:

			50
			30
			45
			15
20	60	10	

$$50+30+45+15 \neq 20+60+10$$

Балансування ТЗЛП

Якщо не виконується умова балансу, тобто

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$$

			20
			10
			10
5	15	5	

$$b_{фікт} = 40 - 25 = 15$$

			0	20
			0	10
			0	10
5	15	5	15	40=40

Балансування ТЗЛП

Якщо не виконується умова балансу, тобто

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$$

			20
			10
			10
5	15	5	

$$b_{фікт} = 40 - 25 = 15$$

			0	20
			0	10
			0	10
5	15	5	15	

40=40

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$$

			10
			10
			15
20	15	10	

35<45

$$a_{фікт} = 45 - 35 = 10$$

			10
			10
			15
0	0	0	10
20	15	10	

45=45

Структура матриці обмежень ($Px = p_0$)

$$
\begin{array}{l}
\displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{1j} = a_1 \longrightarrow \\[4em]
\displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_{i1} = b_1 \longrightarrow
\end{array}
\quad
\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cc|cccc|l}
x_{11} & x_{12} & .. & x_{1n} & x_{21} & x_{22} & .. & x_{2n} & x_{31} & x_{32} & .. & x_{3n} & & & x_{m1} & x_{m2} & .. & x_{mn} & \\
1 & 1 & .. & 1 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & .. & .. & 0 & 0 & .. & 0 & : A_1 \\
0 & 0 & .. & 0 & 1 & 1 & .. & 1 & 0 & 0 & .. & 0 & .. & .. & 0 & 0 & .. & 0 & : A_2 \\
0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 1 & 1 & .. & 1 & .. & .. & 0 & 0 & .. & 0 & : A_3 \\
.. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & \;.. \\
0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & .. & .. & 1 & 1 & .. & 1 & : A_m \\
\hline
1 & 0 & .. & 0 & 1 & 0 & .. & 0 & 1 & 0 & .. & 0 & .. & .. & 1 & 0 & .. & 0 & : B_1 \\
0 & 1 & .. & 0 & 0 & 1 & .. & 0 & 0 & 1 & .. & 0 & .. & .. & 0 & 1 & .. & 0 & : B_2 \\
.. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & \;.. \\
0 & 0 & .. & 1 & 0 & 0 & .. & 1 & 0 & 0 & .. & 1 & .. & .. & 0 & 0 & .. & 1 & : B_n
\end{array}
\qquad
\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \dots \\ a_m \\ \hline b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}
$$

Структура векторів системи обмежень

Вектор змінної x_{ij} :

$$p_{ij} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \hdashline 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow 1 \\ \dots \\ \leftarrow i-1 \\ \leftarrow i \\ \leftarrow i+1 \\ \dots \\ \leftarrow m \\ \hdashline \leftarrow m+1 \\ \dots \\ \leftarrow m+j-1 \\ \leftarrow m+j \\ 0 \leftarrow m+j+1 \\ \dots \\ \leftarrow m+n \end{array}$$

Кожен вектор p_{ij} містить рівно дві одиниці

Права частина системи

(стовпець вільних членів):

$$p_0 = \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_{i-1} \\ a_i \\ a_{i+1} \\ \dots \\ a_m \\ \hdashline b_1 \\ \dots \\ b_{j-1} \\ b_j \\ b_{j+1} \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow 1 \\ \dots \\ \leftarrow i-1 \\ \leftarrow i \\ \leftarrow i+1 \\ \dots \\ \leftarrow m \\ \hdashline \leftarrow m+1 \\ \dots \\ \leftarrow m+j-1 \\ \leftarrow m+j \\ \leftarrow m+j+1 \\ \dots \\ \leftarrow m+n \end{array}$$

Математична модель збалансованої ТЗЛП

(векторна форма представлення)

Цільова функція

$$\min z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}; \qquad (5)$$

Обмеження

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_{ij} = p_0; \qquad (6)$$

$$x_{ij} \geq 0, \ i = \overline{1,m}; \ j = \overline{1,n}. \qquad (7)$$

Властивості ТЗЛП

- **Теорема 2.** *Ранг матриці P рівний $m+n-1$.*

Перед розв’язанням ТЗЛП (5)-(7) симплекс-методом одне (будь-яке) з обмежень системи (6) повинно бути видаленим
(домовимось, що ми видаляємо перше з обмежень)

ДБР містить $m+n-1$ базисних змінних

Властивості ТЗЛП

- **Теорема 3.** *Будь-який мінор матриці* P *транспортної задачі приймає одне з трьох числових значень 0, 1 або -1.*

Доведення теореми 3

Властивості матриці P:

1 Кожен елемент матриці рівний або 0 або 1

$$
\left|\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cc|cccc|l}
1 & 1 & .. & 1 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & .. & .. & 0 & 0 & .. & 0 & :A_1 \\
0 & 0 & .. & 0 & 1 & 1 & .. & 1 & 0 & 0 & .. & 0 & .. & .. & 0 & 0 & .. & 0 & :A_2 \\
0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 1 & 1 & .. & 1 & .. & .. & 0 & 0 & .. & 0 & :A_3 \\
.. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\
0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & .. & .. & 1 & 1 & .. & 1 & :A_m \\
\hline
1 & 0 & .. & 0 & 1 & 0 & .. & 0 & 1 & 0 & .. & 0 & .. & .. & 1 & 0 & .. & 0 & :B_1 \\
0 & 1 & .. & 0 & 0 & 1 & .. & 0 & 0 & 1 & .. & 0 & .. & .. & 0 & 1 & .. & 0 & :B_2 \\
.. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\
0 & 0 & .. & 1 & 0 & 0 & .. & 1 & 0 & 0 & .. & 1 & .. & .. & 0 & 0 & .. & 1 & :B_n
\end{array}\right.
$$

Доведення теореми 3

Властивості матриці P:

1 Кожен елемент матриці рівний або 0 або 1

2 Кожен стовпець містить не більше двох ненульових елементів

$$
\left|\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cc|cccc|l}
1 & 1 & .. & 1 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & .. & .. & 0 & 0 & .. & 0 & :A_1 \\
0 & 0 & .. & 0 & 1 & 1 & .. & 1 & 0 & 0 & .. & 0 & .. & .. & 0 & 0 & .. & 0 & :A_2 \\
0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 1 & 1 & .. & 1 & .. & .. & 0 & 0 & .. & 0 & :A_3 \\
.. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\
0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & .. & .. & 1 & 1 & .. & 1 & :A_m \\
\hline
1 & 0 & .. & 0 & 1 & 0 & .. & 0 & 1 & 0 & .. & 0 & .. & .. & 1 & 0 & .. & 0 & :B_1 \\
0 & 1 & .. & 0 & 0 & 1 & .. & 0 & 0 & 1 & .. & 0 & .. & .. & 0 & 1 & .. & 0 & :B_2 \\
.. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\
0 & 0 & .. & 1 & 0 & 0 & .. & 1 & 0 & 0 & .. & 1 & .. & .. & 0 & 0 & .. & 1 & :B_n
\end{array}\right.
$$

Доведення теореми 3

Властивості матриці P:

1 Кожен елемент матриці рівний або 0 або 1

2 Кожен стовпець містить не більше двох ненульових елементів

$$\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cc|cccc|l}
1 & 1 & .. & 1 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & .. & .. & 0 & 0 & .. & 0 & :A_1 \\
0 & 0 & .. & 0 & 1 & 1 & .. & 1 & 0 & 0 & .. & 0 & .. & .. & 0 & 0 & .. & 0 & :A_2 \\
0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 1 & 1 & .. & 1 & .. & .. & 0 & 0 & .. & 0 & :A_3 \\
.. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\
0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & .. & .. & 1 & 1 & .. & 1 & :A_m \\
\hline
1 & 0 & .. & 0 & 1 & 0 & .. & 0 & 1 & 0 & .. & 0 & .. & .. & 1 & 0 & .. & 0 & :B_1 \\
0 & 1 & .. & 0 & 0 & 1 & .. & 0 & 0 & 1 & .. & 0 & .. & .. & 0 & 1 & .. & 0 & :B_2 \\
.. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\
0 & 0 & .. & 1 & 0 & 0 & .. & 1 & 0 & 0 & .. & 1 & .. & .. & 0 & 0 & .. & 1 & :B_n
\end{array}$$

3 Множину всіх рядків матриці можна розбити на дві множини M і N,

де M складається з перших рядків (відповідних A_i),

а N - з останніх (відповідних B_j).

При цьому, якщо два ненульові елементи лежать в одному стовпці матриці , то рядки, що містять ці елементи, належать різнім множинам.

Доведення теореми 3

$$\begin{array}{|cccc|cccc|cccc|cc|cccc|c}
1 & 1 & .. & 1 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & .. & .. & 0 & 0 & .. & 0 & :A_1 \\
0 & 0 & .. & 0 & 1 & 1 & .. & 1 & 0 & 0 & .. & 0 & .. & .. & 0 & 0 & .. & 0 & :A_2 \\
0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 1 & 1 & .. & 1 & .. & .. & 0 & 0 & .. & 0 & :A_3 \\
.. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\
0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & .. & .. & 1 & 1 & .. & 1 & :A_m \\
\hline
1 & 0 & .. & 0 & 1 & 0 & .. & 0 & 1 & 0 & .. & 0 & .. & .. & 1 & 0 & .. & 0 & :B_1 \\
0 & 1 & .. & 0 & 0 & 1 & .. & 0 & 0 & 1 & .. & 0 & .. & .. & 0 & 1 & .. & 0 & :B_2 \\
.. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\
0 & 0 & .. & 1 & 0 & 0 & .. & 1 & 0 & 0 & .. & 1 & .. & .. & 0 & 0 & .. & 1 & :B_n
\end{array}$$

Властивості матриці P:

1 Кожен елемент матриці рівний або 0 або 1

2 Кожен стовпець містить не більше двох ненульових елементів

3 Множину всіх рядків матриці можна розбити на дві множини M і N,
де M складається з перших рядків (відповідних A_i),
а N - з останніх (відповідних B_j).

При цьому, якщо два ненульові елементи лежать в одному стовпці матриці , то рядки, що містять ці елементи, належать різнім множинам.

4 Будь-яка підматриця P' матриці P володіє властивостями 1-3

Доведення теореми 3

$$\left|\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cc|cccc|l}
1 & 1 & .. & 1 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & .. & .. & 0 & 0 & .. & 0 & :A_1 \\
0 & 0 & .. & 0 & 1 & 1 & .. & 1 & 0 & 0 & .. & 0 & .. & .. & 0 & 0 & .. & 0 & :A_2 \\
0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 1 & 1 & .. & 1 & .. & .. & 0 & 0 & .. & 0 & :A_3 \\
.. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\
0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & .. & .. & 1 & 1 & .. & 1 & :A_m \\
\hline
1 & 0 & .. & 0 & 1 & 0 & .. & 0 & 1 & 0 & .. & 0 & .. & .. & 1 & 0 & .. & 0 & :B_1 \\
0 & 1 & .. & 0 & 0 & 1 & .. & 0 & 0 & 1 & .. & 0 & .. & .. & 0 & 1 & .. & 0 & :B_2 \\
.. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\
0 & 0 & .. & 1 & 0 & 0 & .. & 1 & 0 & 0 & .. & 1 & .. & .. & 0 & 0 & .. & 1 & :B_n
\end{array}\right.$$

Властивості матриці P:

1 Кожен елемент матриці рівний або 0 або 1

2 Кожен стовпець містить не більше двох
ненульових елементів

3 Множину всіх рядків матриці можна розбити на дві множини M і N,
де M складається з перших рядків (відповідних A_i),
а N - з останніх (відповідних B_j).

При цьому, якщо два ненульові елементи лежать в одному стовпці матриці , то рядки, що містять ці елементи, належать різнім множинам.

4 Будь-яка підматриця P' матриці P володіє властивостями 1-3

(достатньо показати, що будь-яка матриця P', що володіє цими властивостями, має визначник, рівний 0, $\pm$1)

Доведення теореми 3

- Доведемо методом індукції за порядком k квадратної -матриці P'.

Доведення теореми 3

Доведемо методом індукції за порядком k квадратної -матриці P'.

Для $k = 1$ теорема справедлива.

$$
\begin{array}{|cccc|cccc|cccc|cc|cccc|l}
1 & 1 & .. & 1 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & .. & .. & 0 & 0 & .. & 0 & : A_1 \\
0 & 0 & .. & 0 & 1 & 1 & .. & 1 & 0 & 0 & .. & 0 & .. & .. & 0 & 0 & .. & 0 & : A_2 \\
0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 1 & 1 & .. & 1 & .. & .. & 0 & 0 & .. & 0 & : A_3 \\
.. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & \;.. \\
0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & .. & .. & 1 & 1 & .. & 1 & : A_m \\
\hline
1 & 0 & .. & 0 & 1 & 0 & .. & 0 & 1 & 0 & .. & 0 & .. & .. & 1 & 0 & .. & 0 & : B_1 \\
0 & 1 & .. & 0 & 0 & 1 & .. & 0 & 0 & 1 & .. & 0 & .. & .. & 0 & 1 & .. & 0 & : B_2 \\
.. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & \;.. \\
0 & 0 & .. & 1 & 0 & 0 & .. & 1 & 0 & 0 & .. & 1 & .. & .. & 0 & 0 & .. & 1 & : B_n
\end{array}
$$

Доведення теореми 3

Доведемо методом індукції за порядком k квадратної -матриці P'.

Для $k = 1$ теорема справедлива.

Нехай твердження вірне для матриць порядку $k - 1$.

$$
\left|\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cc|cccc|l}
1 & 1 & .. & 1 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & .. & .. & 0 & 0 & .. & 0 & : A_1 \\
0 & 0 & .. & 0 & 1 & 1 & .. & 1 & 0 & 0 & .. & 0 & .. & .. & 0 & 0 & .. & 0 & : A_2 \\
0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 1 & 1 & .. & 1 & .. & .. & 0 & 0 & .. & 0 & : A_3 \\
.. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\
0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & .. & .. & 1 & 1 & .. & 1 & : A_m \\
\hline
1 & 0 & .. & 0 & 1 & 0 & .. & 0 & 1 & 0 & .. & 0 & .. & .. & 1 & 0 & .. & 0 & : B_1 \\
0 & 1 & .. & 0 & 0 & 1 & .. & 0 & 0 & 1 & .. & 0 & .. & .. & 0 & 1 & .. & 0 & : B_2 \\
.. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\
0 & 0 & .. & 1 & 0 & 0 & .. & 1 & 0 & 0 & .. & 1 & .. & .. & 0 & 0 & .. & 1 & : B_n
\end{array}\right.
$$

Доведення теореми 3

Доведемо методом індукції за порядком k квадратної -матриці P'.

Для $k = 1$ теорема справедлива.

Нехай твердження вірне для матриць порядку $k - 1$.

Нехай P' - квадратна матриця порядку k.

$$
\left|\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cc|cccc|l}
1 & 1 & .. & 1 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & .. & .. & 0 & 0 & .. & 0 & : A_1 \\
0 & 0 & .. & 0 & 1 & 1 & .. & 1 & 0 & 0 & .. & 0 & .. & .. & 0 & 0 & .. & 0 & : A_2 \\
0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 1 & 1 & .. & 1 & .. & .. & 0 & 0 & .. & 0 & : A_3 \\
.. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\
0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & .. & .. & 1 & 1 & .. & 1 & : A_m \\
\hline
1 & 0 & .. & 0 & 1 & 0 & .. & 0 & 1 & 0 & .. & 0 & .. & .. & 1 & 0 & .. & 0 & : B_1 \\
0 & 1 & .. & 0 & 0 & 1 & .. & 0 & 0 & 1 & .. & 0 & .. & .. & 0 & 1 & .. & 0 & : B_2 \\
.. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\
0 & 0 & .. & 1 & 0 & 0 & .. & 1 & 0 & 0 & .. & 1 & .. & .. & 0 & 0 & .. & 1 & : B_n
\end{array}\right.
$$

Доведення теореми 3

Можливі три випадки:

а) Кожен стовпець матриці P' має рівно два ненульові елементи

Із властивості 3) $\Rightarrow$ що сума всіх рядків з множини M дорівнює сумі всіх рядків з множини N $\Rightarrow$ $|P'|$=0

$$\begin{array}{cccc:c}
1 & 1 & 0 & 0 & A_1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & A_2 \\
\hline
1 & 0 & 1 & 0 & B_1 \\
0 & 1 & 0 & 1 & B_2
\end{array}$$

$$\left|\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cc|cccc|c}
1 & 1 & .. & 1 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & .. & .. & 0 & 0 & .. & 0 & :A_1 \\
0 & 0 & .. & 0 & 1 & 1 & .. & 1 & 0 & 0 & .. & 0 & .. & .. & 0 & 0 & .. & 0 & :A_2 \\
0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 1 & 1 & .. & 1 & .. & .. & 0 & 0 & .. & 0 & :A_3 \\
.. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\
0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & .. & .. & 1 & 1 & .. & 1 & :A_m \\
\hline
1 & 0 & .. & 0 & 1 & 0 & .. & 0 & 1 & 0 & .. & 0 & .. & .. & 1 & 0 & .. & 0 & :B_1 \\
0 & 1 & .. & 0 & 0 & 1 & .. & 0 & 0 & 1 & .. & 0 & .. & .. & 0 & 1 & .. & 0 & :B_2 \\
.. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\
0 & 0 & .. & 1 & 0 & 0 & .. & 1 & 0 & 0 & .. & 1 & .. & .. & 0 & 0 & .. & 1 & :B_n
\end{array}\right.$$

Доведення теореми 3

Можливі три випадки:

а) Кожен стовпець матриці P' має рівно два ненульові елементи

Із властивості 3) $\Rightarrow$ що сума всіх рядків з множини M дорівнює сумі всіх рядків з множини N $\Rightarrow$ $|P'|$=0

$$\begin{array}{cccc:c}
1 & 1 & 0 & 0 & A_1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & A_2 \\
\hline
1 & 0 & 1 & 0 & B_1 \\
0 & 1 & 0 & 1 & B_2
\end{array}$$

б) У деякому стовпці всі елементи дорівнюють нулю $\Rightarrow$ $|P'|$=0

$$\left|\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cc|cccc|c}
1 & 1 & .. & 1 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & .. & .. & 0 & 0 & .. & 0 & :A_1 \\
0 & 0 & .. & 0 & 1 & 1 & .. & 1 & 0 & 0 & .. & 0 & .. & .. & 0 & 0 & .. & 0 & :A_2 \\
0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 1 & 1 & .. & 1 & .. & .. & 0 & 0 & .. & 0 & :A_3 \\
.. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\
0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & .. & .. & 1 & 1 & .. & 1 & :A_m \\
\hline
1 & 0 & .. & 0 & 1 & 0 & .. & 0 & 1 & 0 & .. & 0 & .. & .. & 1 & 0 & .. & 0 & :B_1 \\
0 & 1 & .. & 0 & 0 & 1 & .. & 0 & 0 & 1 & .. & 0 & .. & .. & 0 & 1 & .. & 0 & :B_2 \\
.. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\
0 & 0 & .. & 1 & 0 & 0 & .. & 1 & 0 & 0 & .. & 1 & .. & .. & 0 & 0 & .. & 1 & :B_n
\end{array}\right.$$

Доведення теореми 3

в) Не всі стовпці містять рівно два ненульових елементи і немає нульових стовпців (в якому-небудь стовпці матриці P' є рівно один ненульовий елемент)

Знайдемо визначник матриці P' розкладенням по цьому стовпцю:

$|P'|=|P''|$,

де P'' - підматриця порядку $k-1$, що отримується викреслюванням в матриці виділеного стовпця і рядка, що містить ненульовий елемент цього стовпця.

$|P''| = 0, \pm 1$

Отже

$|P'| = 0, \pm 1$.

$$
\left|\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cc|cccc|c}
1 & 1 & .. & 1 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & .. & .. & 0 & 0 & .. & 0 & :A_1 \\
0 & 0 & .. & 0 & 1 & 1 & .. & 1 & 0 & 0 & .. & 0 & .. & .. & 0 & 0 & .. & 0 & :A_2 \\
0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 1 & 1 & .. & 1 & .. & .. & 0 & 0 & .. & 0 & :A_3 \\
.. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\
0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & .. & .. & 1 & 1 & .. & 1 & :A_m \\
\hline
1 & 0 & .. & 0 & 1 & 0 & .. & 0 & 1 & 0 & .. & 0 & .. & .. & 1 & 0 & .. & 0 & :B_1 \\
0 & 1 & .. & 0 & 0 & 1 & .. & 0 & 0 & 1 & .. & 0 & .. & .. & 0 & 1 & .. & 0 & :B_2 \\
.. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\
0 & 0 & .. & 1 & 0 & 0 & .. & 1 & 0 & 0 & .. & 1 & .. & .. & 0 & 0 & .. & 1 & :B_n
\end{array}\right.
$$

Базисні змінні	$(x_B)_1$	…	$(x_B)_m$	$(x_N)_1$		$(x_N)_j$		$(x_N)_{n-m}$	Розв'язок
z									
$(x_B)_1$	1			0	1	-1	0	1	
…				1	0	1	1	1	
$(x_B)_i$		1		-1	1	[illegible]	1	0	
…				1	-1	-1	1	0	
$(x_B)_m$			1	-1	0	0	0	-1	

N

Властивості ТЗЛП

- **Теорема 4.** *Якщо усі* a_i *і* b_j *у ТЗЛП - цілі, то всі* x_{ij} *у будь-якому ДБР (в т.ч. і оптимальному) також будуть цілими числами.*

Доведення теореми 4

Нехай $x = \{x_{ij}\}, i = \overline{1, m}, \ j = \overline{1, n}$ - ДБР ТЗЛП:

$$Px = p_0,$$
$$x \geq 0,$$

І нехай B - відповідна базисна матриця, x_B - вектор базисних змінних ДБР x. Тоді

$$Bx_B = p_0.$$

Розв'язуючи цю квадратну систему рівнянь за методом Крамера, отримуємо, що

$$x_{ij} = \frac{|B_{ij}|}{|B|},$$

де B_{ij} - матриця, отримана з B заміною стовпця p_{ij} на вектор p_0. Визначник $|B_{ij}|$ - ціле число і $|B| = \pm 1$ (за теоремою 3) $\Rightarrow$ x_{ij} цілі. ■