Геометричні місця точок

Властивість точки, рівновіддаленої від вершин многокутника

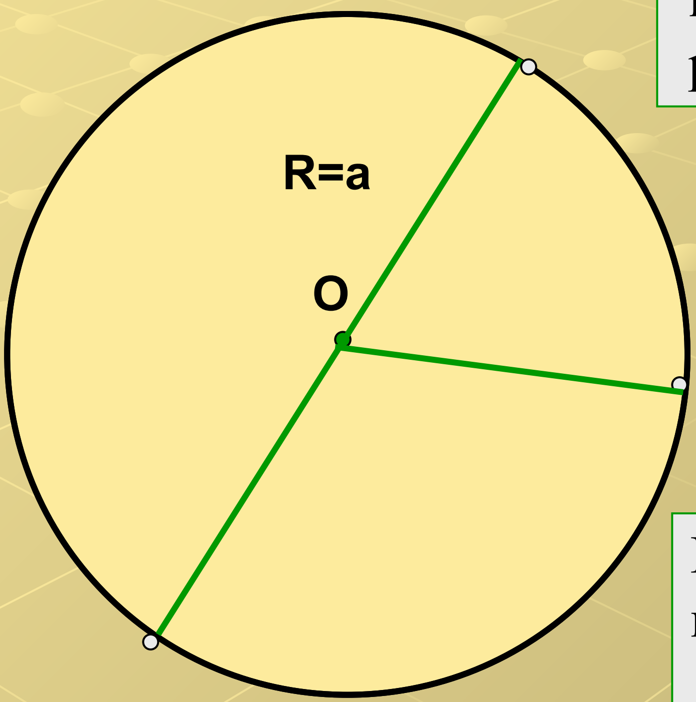
Творчий проект Фотенюк Надії

Що ж таке геометричне місце точок ?

На площині ГМТ визначається так:

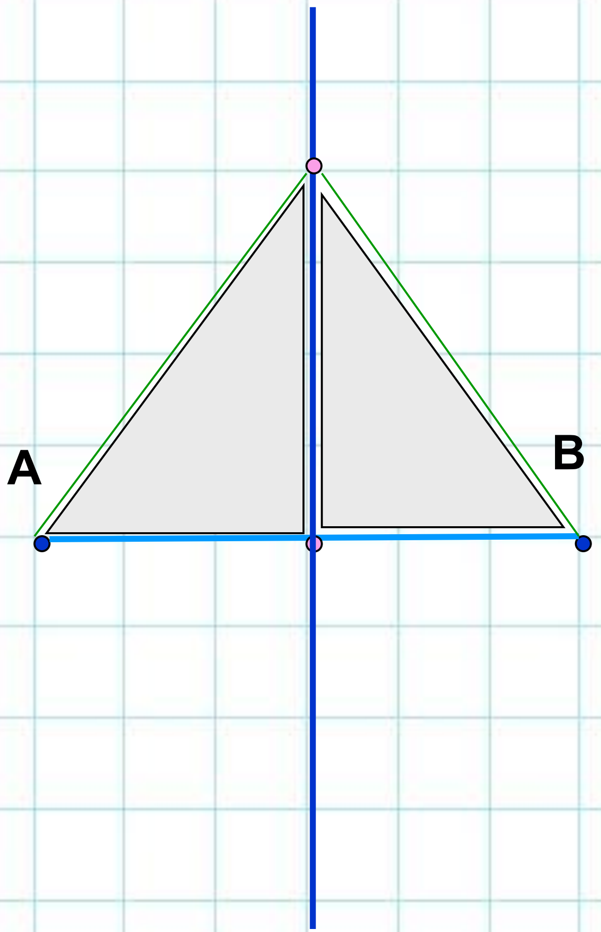
Геометричним місцем точок *називається* ***фігура****, що складається з усіх точок площини, які мають певну властивість.*

Геометричне місце точок, кожна з яких віддалена від даної точки О на відстань, рівну *а*, є коло радіуса *а* з центром у точці О.

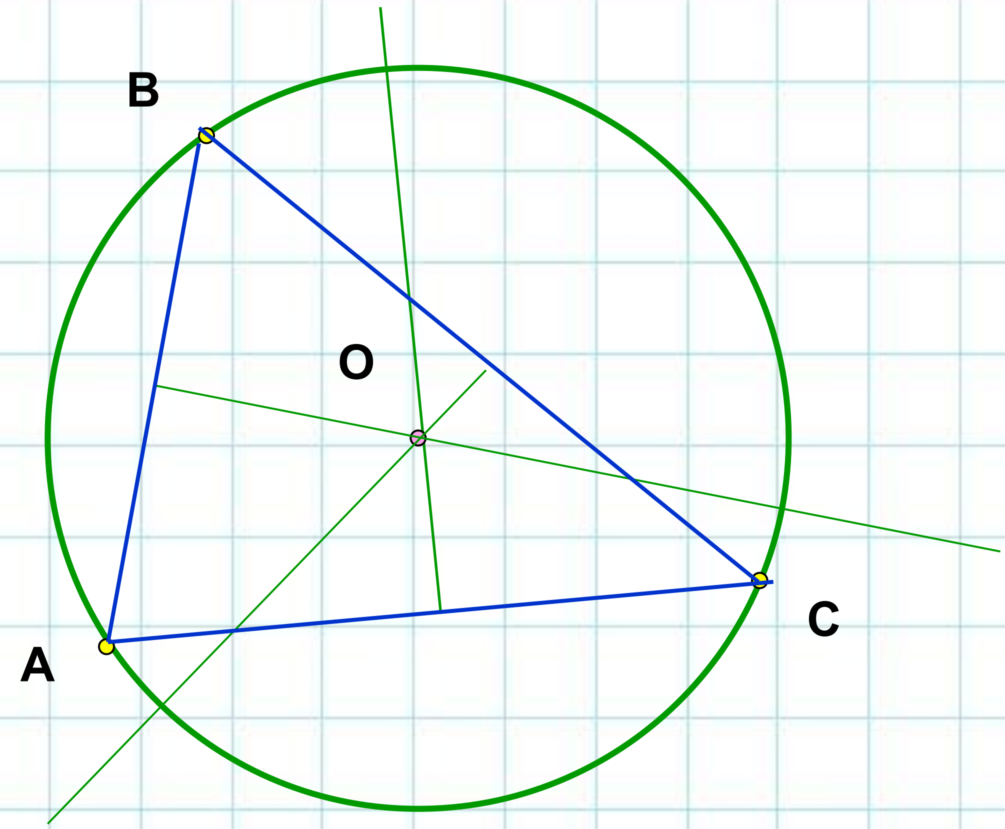


Геометричне місце точок, відстань яких від даної точки О не перевищує довжини *а* даного відрізка, є круг з центром у точці О радіуса *а*.

Геометричне місце точок, кожна з яких рівновіддалена від двох даних точок A і B, є пряма *l*, яка проходить через середину C відрізка AB перпендикулярно до нього.



Геометричне місце точок, кожна з яких рівновіддалена від трьох неколінеарних точок A, B, C, є точка O – центр кола, описаного навколо трикутника ABC.



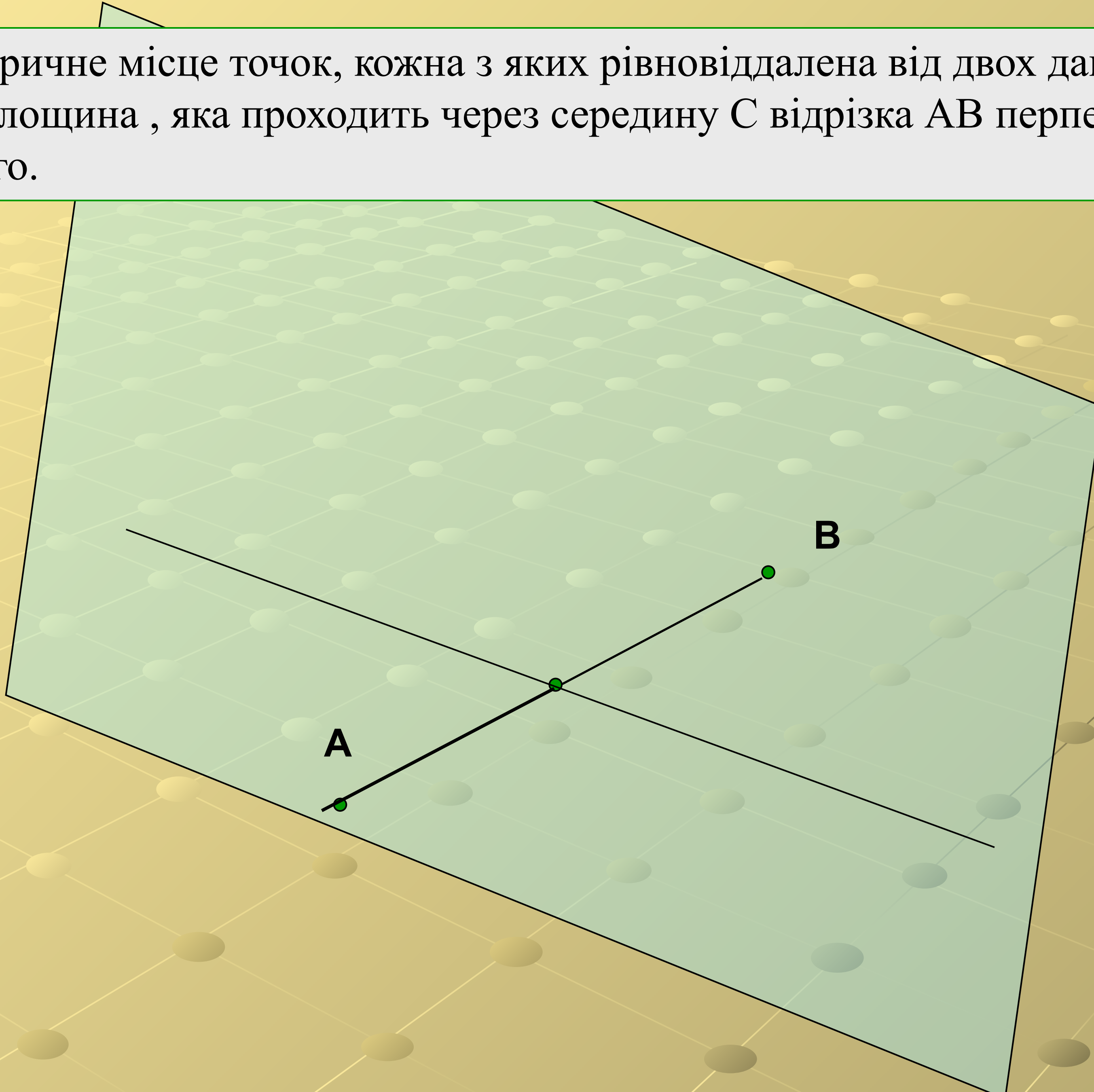
У просторі ГМТ визначається так:

Геометричним місцем точок *у просторі називається деяка* ***фігура****, що складається з усіх об'єктів простору, положення яких задовольняє одній або кільком певним умовам.*

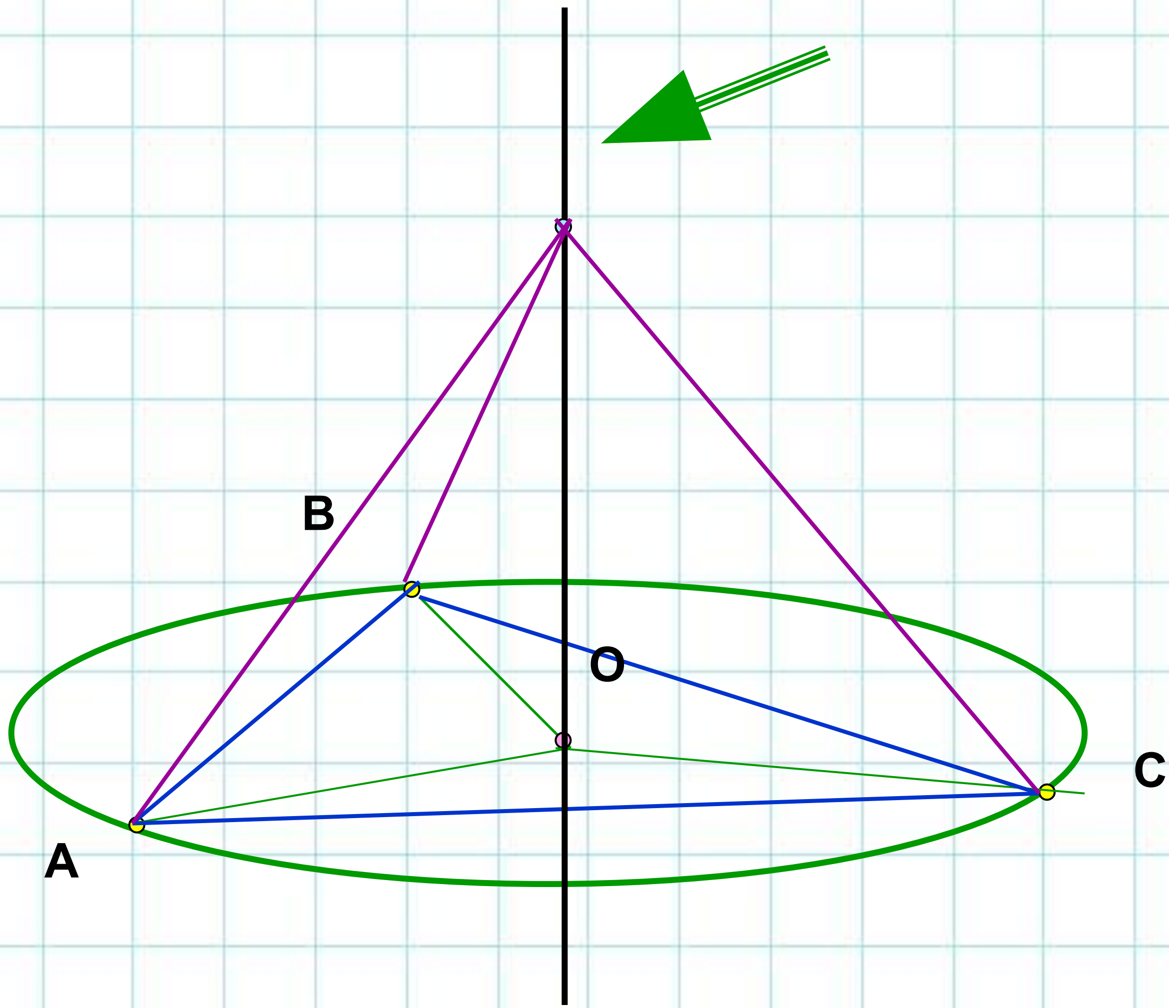
Геометричне місце точок, кожна з яких віддалена від даної точки О на відстань, рівну *а*, є сфера радіуса *а* з центром у точці О.

Геометричне місце точок, відстань яких від даної точки О не перевищує довжини *а* даного відрізка, є куля з центром у точці О радіуса *а*.

Геометричне місце точок, кожна з яких рівновіддалена від двох даних точок А і В, є площина , яка проходить через середину С відрізка АВ перпендикулярно до нього.

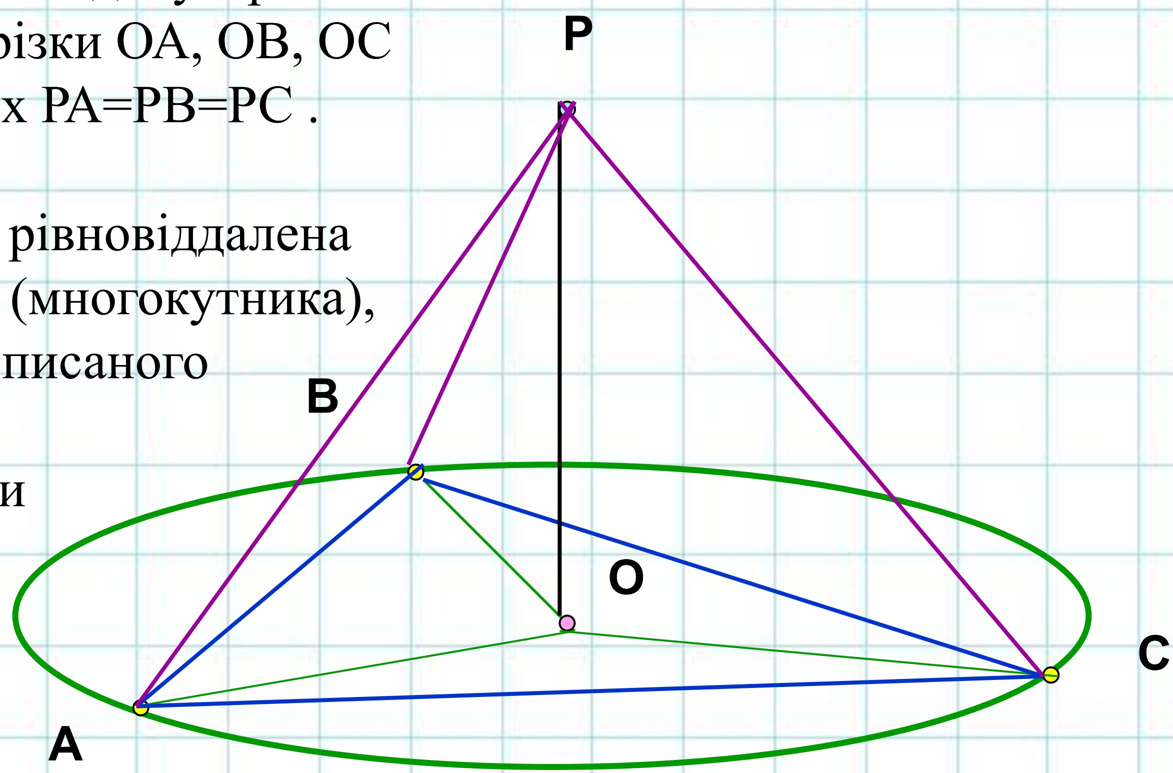


Геометричне місце точок, кожна з яких рівновіддалена від трьох неколінеарних точок A, B, C, є пряма, яка проходить через точку O – центр кола, описаного навколо трикутника ABC, перпендикулярно до площини трикутника ABC.



Опорна задача (про точку, рівновіддалену від усіх вершин многокутника) Якщо точка поза площиною многокутника рівновіддалена від усіх його вершин, то основою перпендикуляра, проведеного з даної точки до площини многокутника, є центр кола, описаного навколо многокутника.

Опустимо з точки P перпендикуляр PO до площини ABC. Відрізки OA, OB, OC проекції рівних похилих PA=PB=PC . Тому OA=OB=OC.
Точка O площини ABC рівновіддалена від вершин трикутника (многокутника), тобто є центром кола, описаного навколо нього,
що й треба було довести

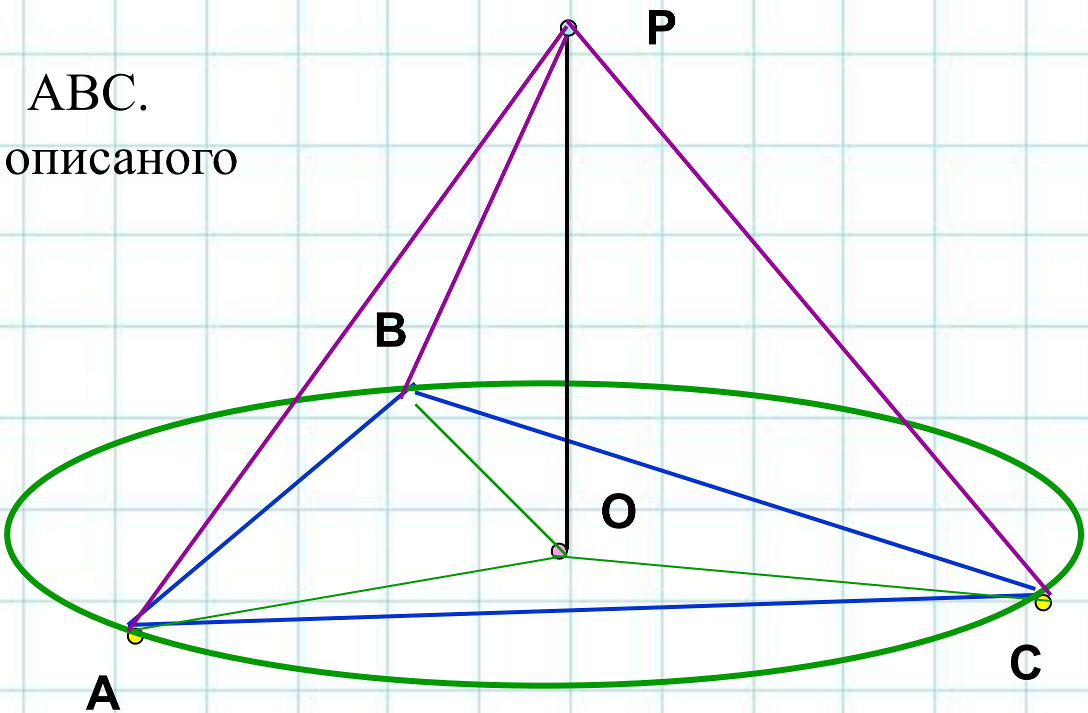


Обернена задача (про точку, рівновіддалену від усіх вершин многокутника) Якщо через центр кола, описаного навколо многокутника, проведено пряму, перпендикулярну до площини многокутника, то точки даної прямої рівновіддалені від усіх вершин многокутника.

PO- перпендикуляр до площини ABC.
Відрізки OA, OB, OC – радіуси описаного кола, тому OA=OB=OC.

Прямокутні трикутники
POA, POB, POC рівні
за двома катетами.

Звідси AP=BP=CP як
відповідні сторони
Точка P рівновіддалена
від вершин трикутника (многокутника),
що й треба було довести

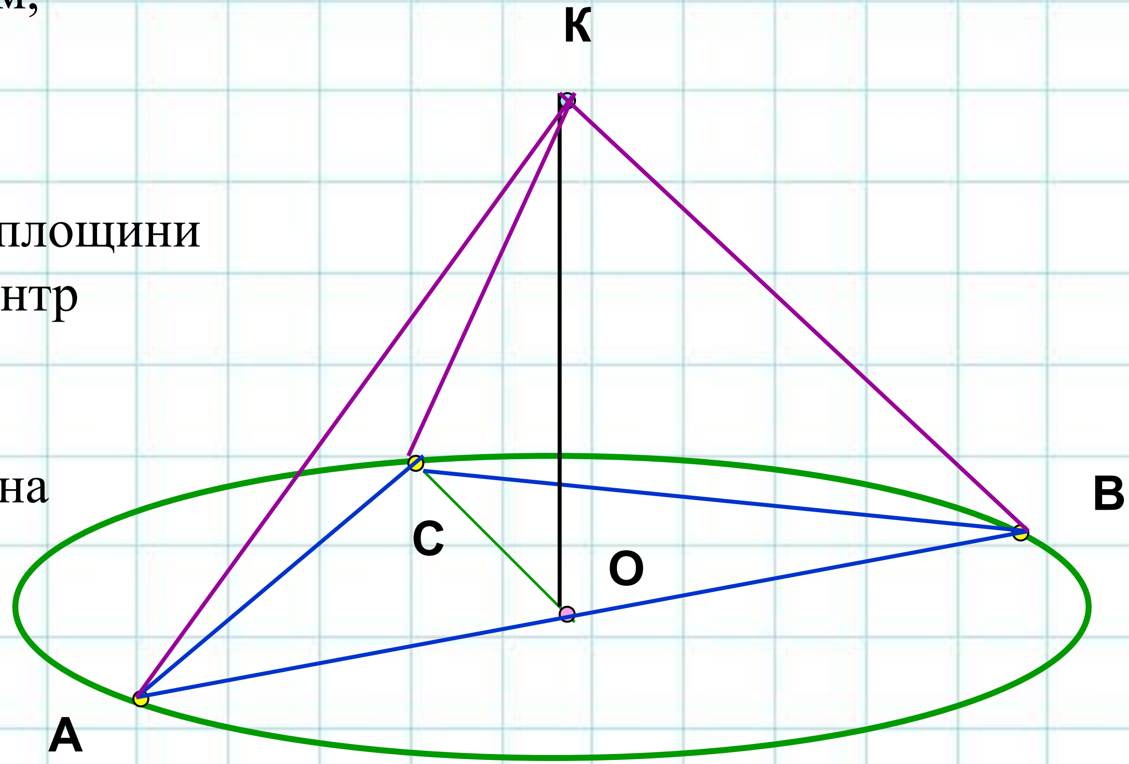


Задача 1. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 6 см і 8 см. Точка простору віддалена від кожної вершини трикутника на 13 см. Знайдіть відстань від даної точки до площини трикутника.

Дано: ΔABC, $\angle C=90^0$, $KO \perp (ABC)$,
$AC = 6$ см, $BC = 8$ см,
$AK=BK=CK= 13$ см
Знайти: KO

Розв'язання

Перпендикуляр KO до площини ABC проектується в центр описаного навколо трикутника кола.
Тому точка O – середина гіпотенузи AO=OB.
З ΔABC за теоремою Піфагора маємо



$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10(см)$$

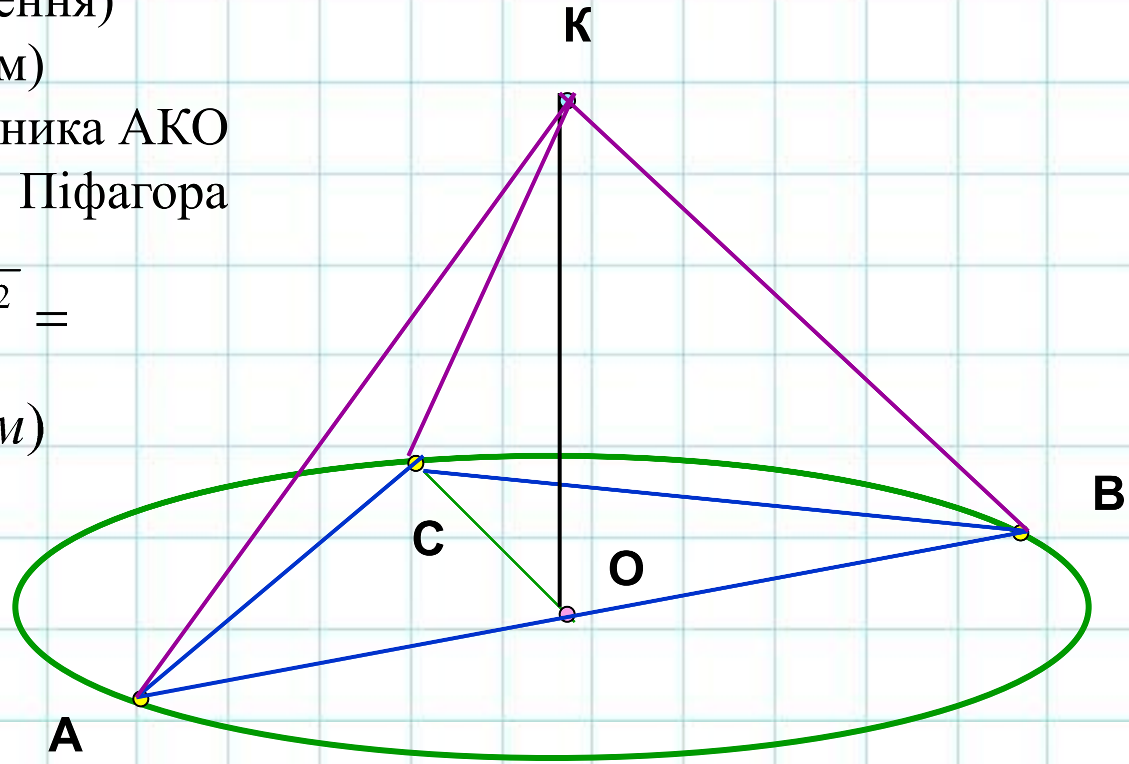
Дано: ΔABC, $\angle C=90^0$, КО $\perp$ (АВС),
АС = 6 см, ВС = 8 см,
АК=ВК=СК= 13 см
Знайти: КО

Розв'язання (продовження)
$AO=0,5AB=0,5 \cdot 10=5$(см)
З прямокутного трикутника АКО за наслідком з теореми Піфагора

$$KO = \sqrt{AK^2 - AO^2} =$$

$$= \sqrt{13^2 - 5^2} = 12(см)$$

Відповідь: 12 см



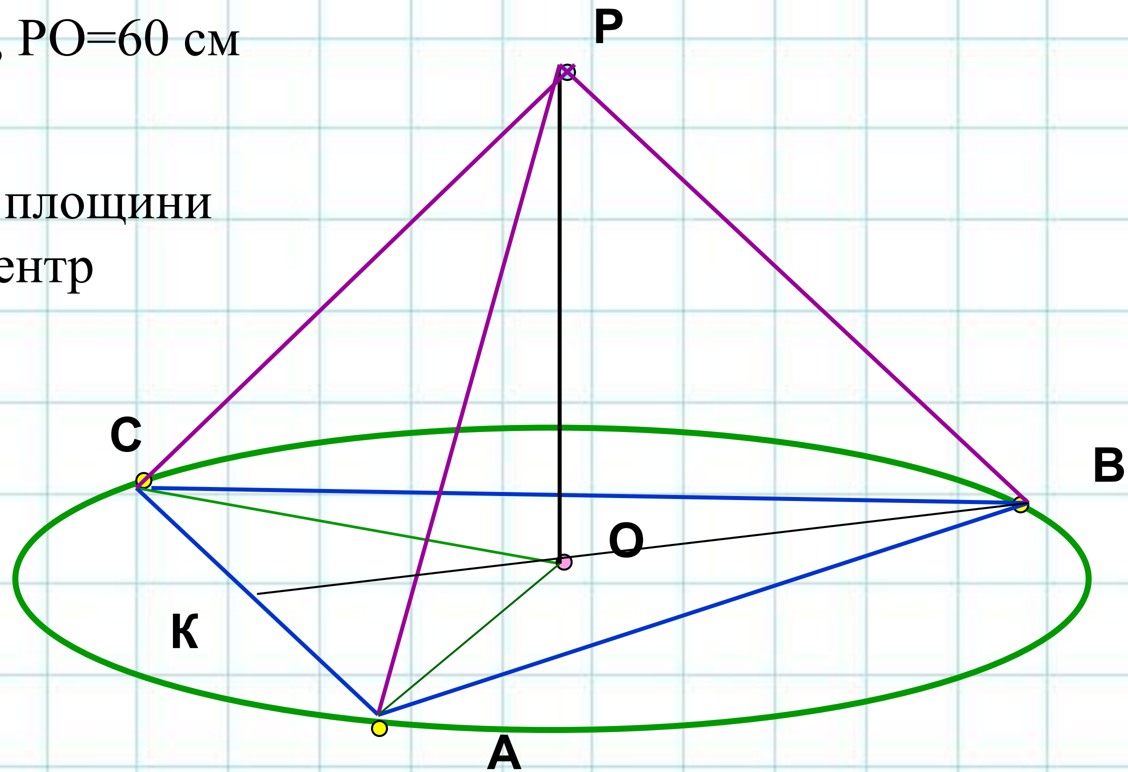
Задача 2. Точка, рівновіддалена від усіх вершин рівнобедреного трикутника, розміщена на відстані 60 см від площини трикутника. Знайдіть відстані від даної точки до вершин трикутника, якщо його основа дорівнює 48 см, а бічна сторона 40 см.

Дано: ΔABC, AB=BC=40см , PO ⊥ (ABC),
AC = 48см, AP=BP=CP, PO=60 см
Знайти: AP, BP, CP

Розв'язання

Перпендикуляр PO до площини ABC проектується в центр описаного навколо трикутника кола.
Для знаходження радіуса описаного кола можна використати формулу

$$R_{опис.кола} = \frac{abc}{4S_{\Delta}}$$



Дано: ΔABC, AB=BC=40см , PO $\perp$ (ABC),
AC = 48см, AP=BP=CP, PO=60 см
Знайти: AP, BP, CP

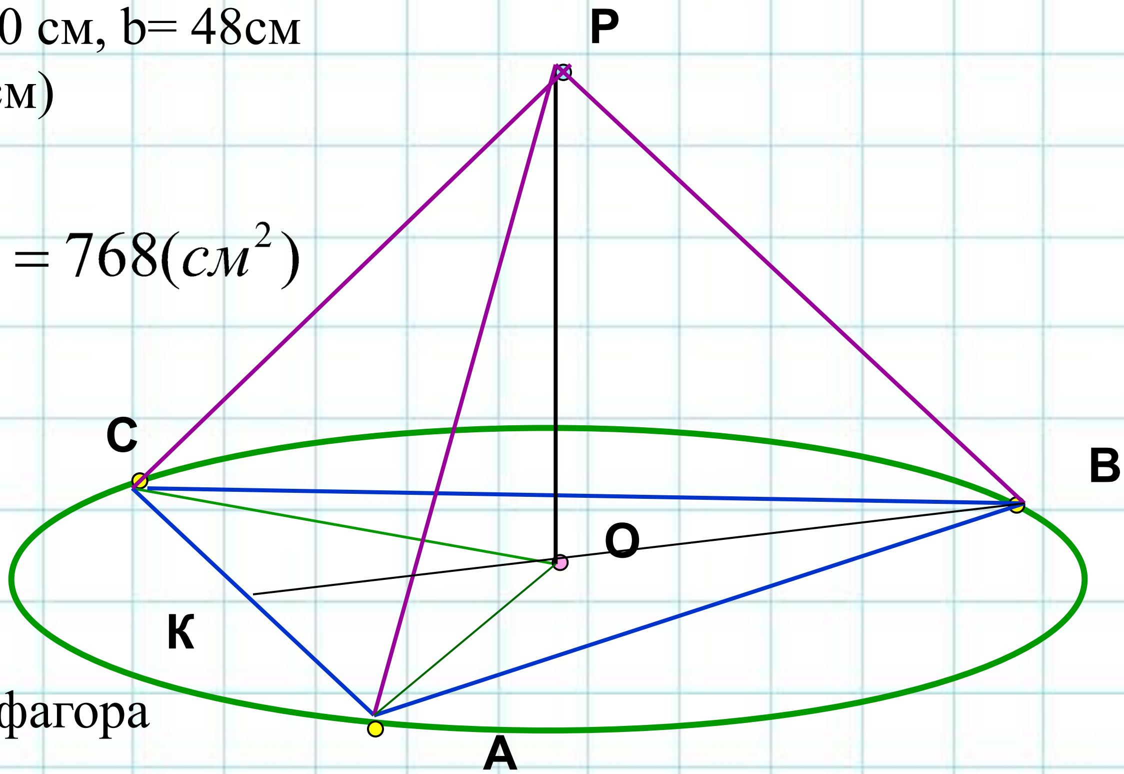
Розв'язання (продовження)

Площу трикутника легко обчислити за формулою Герона, враховуючи, що a=c=40 см, b= 48см
p=(40+40+48): 2= 64 (см)
Тому знаходимо

$$S_\Delta = \sqrt{64 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 16} = 768(см^2)$$

$$AO = R = \frac{abc}{4S_\Delta} =$$

$$= \frac{40 \cdot 40 \cdot 48}{4 \cdot 768} = 25(см)$$



З ΔAPO за теоремою Піфагора

$$AP = \sqrt{AO^2 + PO^2} = \sqrt{25^2 + 60^2} = 65(см)$$

AP=BP=CP=65 см

Задача 3. Точка простору віддалена від усіх вершин квадрата на 40 см. Інша точка віддалена від даної точки і від усіх вершин даного квадрата на 25 см. Знайдіть площу квадрата.

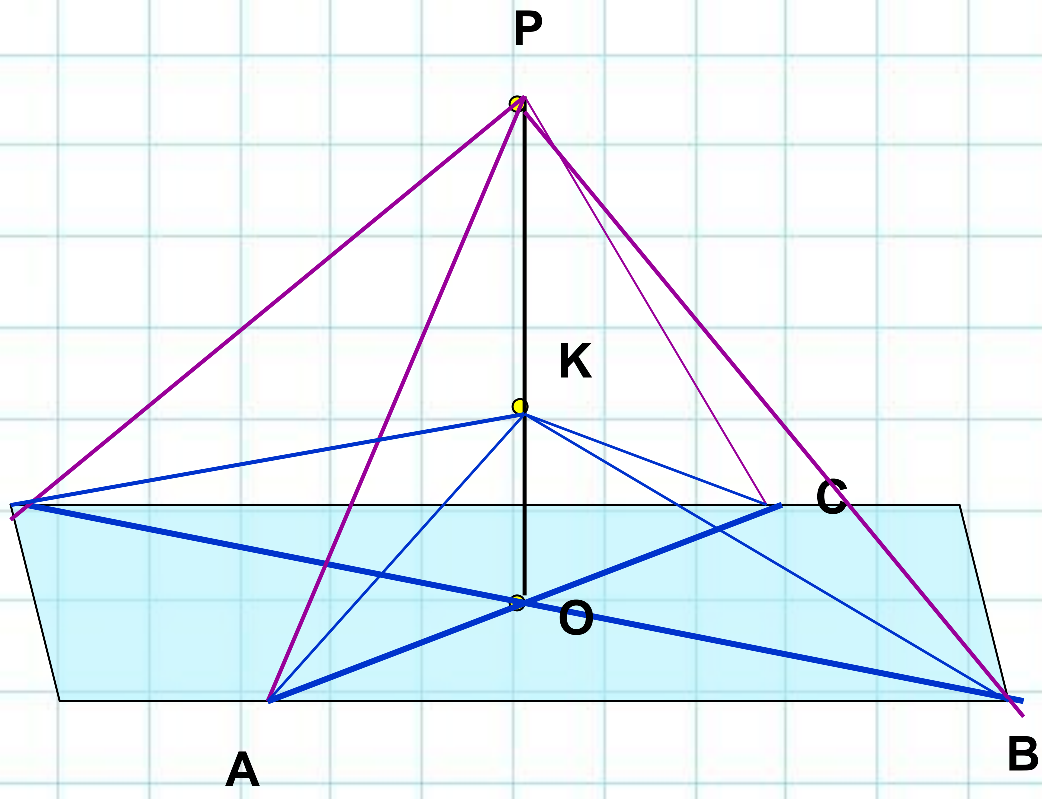
Дано: ABCD - квадрат, AP=BP=CP=DP=40см ,
PO $\perp$ (ABC),
AK=BK=CK=DK=PK=25 см
Знайти: S_{ABCD}

Розв'язання

Перпендикуляр PO до площини ABC проектується в центр описаного навколо квадрата кола – точку O перетину діагоналей.

Прямокутні трикутники APO та AKO мають спільний катет AO

Введемо змінну ***x*** для позначення довжини відрізка KO: KO=***x***



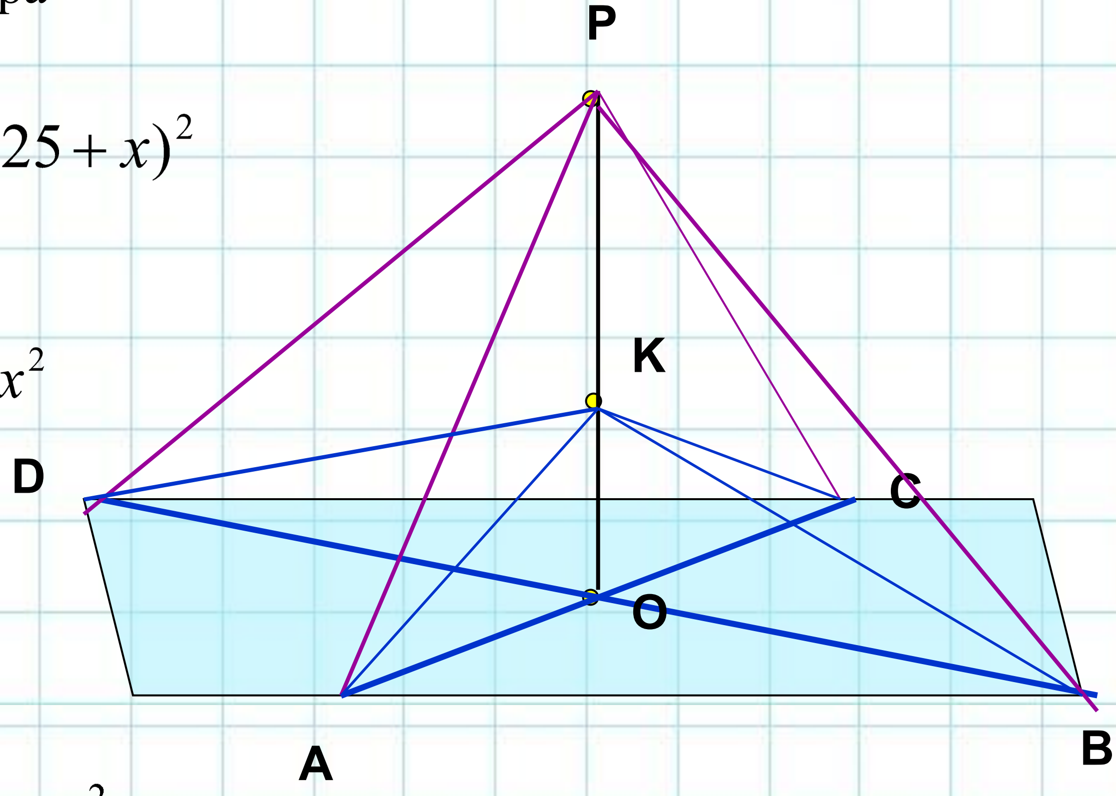
Дано: ABCD - квадрат, AP=BP=CP=DP=40см ,
PO $\perp$ (ABC),
AK=BK=CK=DK=PK=25 см
Знайти: S_{ABCD}

Розв'язання (продовження)
За наслідком з теореми Піфагора
з Δ APO маємо

$$AO^2 = AP^2 - PO^2 = 40^2 - (25+x)^2$$

Аналогічно з Δ AKO маємо

$$AO^2 = AK^2 - KO^2 = 25^2 - x^2$$



Прирівнявши вирази,
Знаходимо x

$$40^2 - (25+x)^2 = 25^2 - x^2,$$

$$1600 - 625 - 50x - x^2 = 625 - x^2,$$

$$1600 - 625 - 625 = 50x,$$

Дано: ABCD - квадрат, AP=BP=CP=DP=40см ,
PO $\perp$ (ABC),
AK=BK=CK=DK=PK=25 см
Знайти: S_{ABCD}

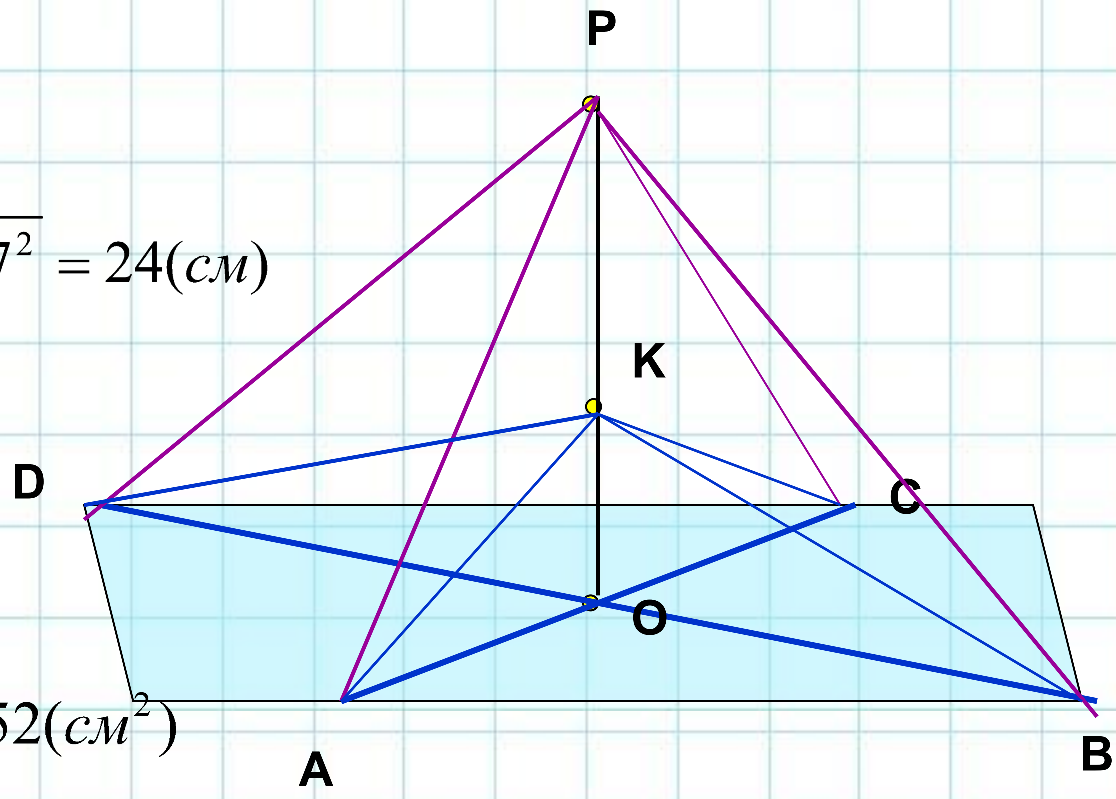
Розв'язання (продовження)

$$50x = 350, x = 7(см)$$

Обчислимо з Δ AKO катет AO

$$AO = \sqrt{AK^2 - KO^2} = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24(см)$$

Тоді
AC=BD=2 · AO=2 · 24=48(см)



Площа квадрата дорівнює

$$S_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{48^2}{2} = 1152(см^2)$$