



## Лекція №3

# Системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

### План

1. Розв'язування систем  $m$  лінійних рівнянь з  $n$  невідомими.

Теорема Кронекера-Капеллі. Метод Гаусса.

2. Розв'язування систем  $n$  лінійних рівнянь з  $n$  невідомими. Формули Крамера.

3. Розв'язування систем  $n$  лінійних рівнянь з  $n$  невідомими за допомогою оберненої матриці.



# Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Систему алгебраїчних рівнянь називають лінійною, якщо вона може бути записана у вигляді

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right.$$

де  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , - невідомі;  $a_{ij}$  - коефіцієнти системи;  $b_k$  - вільні члени.



# Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik} & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- основна матриця С.Л.А.Р

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

- стовпець невідомих;

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

- стовпець вільних членів

$$\tilde{A} = \left( \begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik} & a_{in} & b_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

- розширена матриця С.Л.А.Р..



# Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Розв'язком системи називають множину дійсних чисел  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , підстановка яких у систему замість невідомих перетворює кожне рівняння у тотожність. Систему лінійних алгебраїчних рівнянь (С. Л.А. Р.) називають **сумісною**, якщо вона має хоч би один розв'язок. **Несумісною** у протилежному випадку.

системи лінійних рівнянь

сумісні

несумісні

**Визначені**

мають єдиний  
розв'язок

**Невизначені**

мають безліч  
розв'язків

не мають жодного  
розв'язку



## Розв'язування систем $m$ лінійних рівнянь з $n$ невідомими.

### Переваги застосування метода Гаусса:

- 1) дозволяє дослідити систему на сумісність;
- 2) у випадку сумісності знайти її розв'язки (єдиний або нескінченну кількість);
- 3) дослідження на сумісність і знаходження розв'язків, якщо вони існують, можна робити одночасно.

При дослідженні системи на сумісність використовують елементарні перетворення матриці та поняття ранга матриці



## Елементарні перетворення матриці

(Е.П.) матриці називають перетворення слідуєчого вигляду:

- відкидання нульового рядка (стовпця);
- множення всіх елементів рядка (стовпця) на ненульове число;
- перестановка рядків (стовпців);
- додавання до елементів одного рядка (стовпця) відповідних елементів іншого рядка (стовпця), помножених на довільне ненульове число;
- транспонування матриці.



# Мінор матриці

Мінором  $k$ -го порядку матриці  $A_{m \times n}$  називають визначник порядку  $k$ , який отримують викресленням будь-яких рядків і стовпців з матриці  $A$ .

Приклад 1

Обчислити всі мінори третього порядку і довільний мінор другого порядку матриці  $A$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок

$$\begin{vmatrix} 7 & 17 & 3 \\ 8 & 18 & 7 \\ 4 & 10 & 1 \end{vmatrix} = 126 + 476 + 240 - \\ - 216 - 136 - 490 = 0.$$



# Міnor матриці

Приклад 1 (продовження)

$$\begin{vmatrix} 1 & 17 & 3 \\ 4 & 18 & 7 \\ 0 & 10 & 1 \end{vmatrix} = 18 + 120 - 68 - 70 = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 17 \\ 4 & 8 & 18 \\ 0 & 4 & 10 \end{vmatrix} = 80 + 272 - 280 - 72 = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 4 & 8 & 7 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 8 + 48 - 28 - 28 = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 28 = -20 \neq 0.$$





# Ранг матриці

Рангом матриці  $A$  називають найвищий порядок її ненульового мінора.

Позначення:  $\text{rang}(A)$ ,  $r(A)$

## Властивості $\text{rang}(A)$

- $r(A) \leq \min(m;n)$
- $r(A) = 0$ , коли  $A=0$
- $r(A)$  не змінюється при **Е.П.**
- у матриці трапецієвидного вигляду

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1k} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rk} \end{pmatrix}; \text{ де } a_{ii} \neq 0, i=1,2,\dots,r$$

$$r(A) = r$$



# Ранг матриці

внаслідок того, що

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} = a_{11} \times a_{22} \times a_{rr} \neq 0;$$

Приклад 2

Обчислити ранг матриці  $A$  за допомогою Е.П.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$



## Ранг матриці

Розв'язок

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 9 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 9 & 0 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad r(A) = 2.$$



## Теорема Кронекера-Капеллі

Система  $m$  лінійних рівнянь з  $n$  невідомими  
**сумісна** тоді і тільки тоді, коли  $r(A) = r(\bar{A})$

Причому система

- сумісна визначена, якщо  $r(A) = r(\bar{A}) = n$  ;
- сумісна невизначена, якщо  $r(A) = r(\bar{A}) < n$ .
- у випадку  $r < n$  невідомі називають **базисними**, якщо **мінор**, утворений з коефіцієнтів при них, не дорівнює нулю.
- усі інші невідомі називають **вільними**.



## метод Гаусса

Суть метода Гаусса полягає в тому , що шляхом **елементарних перетворень С.Л.А.Р.** приводять до еквівалентної системи **трикутного** або **трапецієвидного** вигляду, з якої послідовно, починаючи з останніх (за номером) змінних, знаходять усі невідомі.

Перетворення Гаусса зручно проводити, здійснюючи перетворення не з самими рівняннями, а з матрицею їх коефіцієнтів яка є розширеною матрицею С.Л.А.Р.



## МЕТОД Гаусса

### Приклад 3

Дослідити систему рівнянь на сумісність і у випадку сумісності знайти розв'язки

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 3, \\ 3x_1 + 12x_2 + 3x_3 - x_4 = 11, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 8, \\ 2x_1 + x_2 - 12x_3 + 25x_4 = -4. \end{cases}$$

### Розв'язок

$$\overline{A} = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 3 & -4 & 3 \\ 3 & 12 & 3 & -1 & 11 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 8 \\ 2 & 1 & -12 & 25 & -4 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & -3 & -6 & 11 & 2 \\ 0 & -9 & -2 & 13 & 2 \\ 0 & -9 & -18 & 33 & -10 \end{array} \right) \sim$$



## МЕТОД

## Гаусса

### Приклад 3 (продовження )

$$\sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & -3 & -6 & 11 & 2 \\ 0 & 0 & 16 & -20 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -16 \end{array} \right) \quad r(A) = 3 \quad r(\bar{A}) = 4$$

0 = -16

Отже, початкова **система несумісна**.

$$\text{б) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 12 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ -3x_1 + x_2 + 4x_3 = 10 \end{cases}$$



## МЕТОД

## Приклад 3 (продовження)

## Гаусса

Розв'язок

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 12 \\ 2 & 1 & 2 & 9 \\ -3 & 1 & 4 & 10 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 12 \\ 0 & -3 & -4 & -15 \\ 0 & 7 & 13 & 46 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 12 \\ 0 & -3 & -4 & -15 \\ 0 & 1 & 5 & 16 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 12 \\ 0 & 1 & 5 & 16 \\ 0 & -3 & -4 & -15 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 12 \\ 0 & 1 & 5 & 16 \\ 0 & 0 & 11 & 33 \end{array} \right) \quad r(A) = r(\bar{A}) = 3$$

Система сумісна визначена

$$11x_3 = 33$$

$$x_2 = 16 - 5x_3 = 16 - 15 = 1$$

$$x_3 = 3$$

$$x_1 = 12 - 2x_2 - 3x_3 = 12 - 2 - 9 = 1$$

Відповідь:  $\{1, 1, 3\}$





## МЕТОД

## Гаусса

### Приклад 5 (продовження )

$$\text{в) } \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 5 \end{cases}$$

### Розв'язок

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & -3 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -1 & -1 & 5 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 7 & -5 & -3 \\ 0 & -5 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & -5 & 7 & -5 & -3 \end{array} \right) \sim$$



**метод**  
**Гаусса**  
Приклад 3 (продовження)

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 7 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 7 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$r(A) = r(\bar{A}) = 3$$

Система сумісна і невизначена.

Вважаємо  $x_4 = a$ , тоді

$$x_3 = \frac{2}{3}a, x_2 = \frac{9-a}{15}, x_1 = \frac{2a+7}{5}$$

Відповідь:  $x_1 = \frac{2a+7}{5}, x_2 = \frac{9-a}{15}, x_3 = \frac{2}{3}a, x_4 = a$



# Системи $n$ лінійних рівнянь з $n$ невідомими

Якщо

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \dots & a_{2k} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jk} & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

то  $r(A) = r(\bar{A}) = n$

(кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих), згідно з теоремою Кронекера-Капеллі така система має єдиний розв'язок.



## Знаходження єдиного розв'язку.

### Метод Крамера.

Розв'язком С.Л.А.Р. за правилом Крамера буде сукупність значень невідомих обчислених за формулами:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, j = \overline{1, n}$$

Цей визначник отримано шляхом послідовної заміни  $j$ -го стовпця визначника  $\Delta$  стовпцем чисел  $b_1, b_2, \dots, b_n$ .



## Приклад 4

Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь за формулами Крамера:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ 3x_1 - 2x_2 = 6. \end{cases}$$

Розв'язок

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -3.$$

$\Delta \neq 0$ , можемо застосувати правило Крамера

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \\ 6 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -6.$$



## Приклад 4 (продовження)

За формулами Крамера:  $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-6}{-3} = 2$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 3 & 6 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \\ 3 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{0}{-3} = 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 3.$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{3}{-3} = -1$$

Відповідь:  $\{2, 0, -1\}$



# Знаходження єдиного розв'язку.

## Метод оберненої матриці.

Якщо позначити  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik} & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & a_{nn} \end{pmatrix}$ ,  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$

то С.Л.А. Р., згідно з правилом множення матриць та умовою рівності матриць, можна записати у матричній формі

$$A \times X = B$$

Тоді  $A^{-1} \cdot A \times X = A^{-1} \cdot B \quad (A^{-1} \cdot A = E)$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

де  $A^{-1}$  - матриця обернена до  $A$ .



## Приклад 5

Розв'язати С.Л.А.Р. методом оберненої матриці

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ 3x_1 - 2x_2 = 6. \end{cases}$$

Розв'язок

Запишемо систему рівнянь у вигляді матричного рівняння  $A \cdot X = B$

$$\text{де } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Тоді } X = A^{-1} \cdot B$$





## Приклад 5 (продовження )

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

Визначник матриці  $A$  не дорівнює нулю, тому існує  $A^{-1}$  і розв'язок можна знайти методом оберненої матриці.

Знаходимо алгебраїчні доповнення:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -7; \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -2;$$



## Приклад 5 (продовження)

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -4;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5.$$

Записуємо обернену матрицю до матриці  $A$

$$A^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -7 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$



## Приклад 5 (продовження)

$$\begin{aligned} X &= A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -7 & -4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \cdot 1 + (-2) \cdot 5 + 1 \cdot 6 \\ -3 \cdot 1 + (-3) \cdot 5 + 3 \cdot 6 \\ -7 \cdot 1 + (-4) \cdot 5 + 5 \cdot 6 \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Відповідь:  $\{2, 0, -1\}$



## Недоліки застосування формул Крамера та метода оберненої матриці.

С.Л.Р. не може бути розв'язана за допомогою формул Крамера та методом оберненої матриці у випадках коли:

- 1) кількість рівнянь  $\neq$  кількості невідомих ( $m \neq n$ )  
або
- 2)  $\Delta = 0$ .